Wolfgang Werner

Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1

Tensoralgebra und Tensoranalysis
Darstellung mit Matrizen

2. Auflage

Springer Vieweg

Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1

Wolfgang Werner

Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1

Tensoralgebra und Tensoranalysis
Darstellung mit Matrizen

2., korrigierte, aktualisierte und erweiterte Auflage

Springer Vieweg

Wolfgang Werner
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-49782-8 ISBN 978-3-658-49783-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-49783-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Alexander Grün
Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Wenn Sie dieses Produkt entsorgen, geben Sie das Papier bitte zum Recycling.

Vorwort zur zweiten Auflage

Die kritische Durchsicht beider Bände des Gesamtwerks im Abstand von mehreren Jahren führte neben der Korrektur von unvermeidbaren Schreibfehlern auch zu stilistischen Glättungen, indem der Text an vielen Stellen prägnanter gefasst und sprachlich präzisiert wurde. Die inhaltliche Darstellung wurde durch zusätzliche Aspekte und aktuelle Entwicklungen ergänzt. Alle Formeln und Berechnungen wurden überprüft und gelegentliche, zu knappe Darstellungen durch Hinweise oder Erweiterungen im Rechengang leichter verständlich gemacht. Gleichzeitig wurde das typographische Erscheinungsbild in ansprechender Weise durch farbige Akzente gestaltet.

Die zweite Auflage bietet die Gelegenheit, das Gesamtwerk im Ganzen durch zusätzliche Querverweise auf Formeln und Abschnitte sowie eine größere Anzahl von Literaturzitaten besser zu überblicken, wodurch dem Leser oder der Leserin der Zugang und das Verständnis erleichtert oder das Thema stärker verdeutlicht werden soll.

Wichtige Zahlenwerte und bestimmte wesentliche Sachverhalte wurden als nummerierte Kernaussagen kenntlich gemacht, die im Sachverzeichnis unter diesen Stichwörtern aufgeführt sind.

Trotz der umfangreichen Überarbeitung blieben Anspruch und Zielsetzung beider Bände unverändert, um den angesprochenen Zielgruppen in Studium und beruflicher Praxis ein Werk an die Hand zu geben, das die Tensorrechnung in Grundlagen und Anwendungen in ausführlicher Weise darlegt.

Dem Springer-Verlag und seinem Lektor Dr. Grün danke ich für die Möglichkeit, eine zweite Auflage beider Bände zu veröffentlichen. Danken möchte ich auch Frau Saglio vom Lektorat für die Betreuung dieses Buchprojektes.

Vorwort zur ersten Auflage

Die Absicht des vorliegenden ersten Bandes des zweibändigen Gesamtwerkes besteht darin, die Tensorrechnung in einer Weise zu entwickeln und darzustellen, wie sie in dieser Form in der einschlägigen Literatur nicht behandelt wird.

Dabei ist die Vektorrechnung in der für Ingenieure und Naturwissenschaftler vertrauten Form als spezieller Fall der Tensorrechnung der Ausgangspunkt der Darstellung. Vektoren und Tensoren werden mit Matrizen beschrieben und im Unterschied zu den üblichen Darstellungen wird die Indexschreibweise nur gelegentlich zur Erläuterung verwendet.

Die Beschäftigung mit Koordinatensystemen, die Beschreibung von Vektoren und Tensoren in koordinatenfreier und -gebundener Form, die Umrechnung ihrer Komponenten beim Wechsel von Koordinatensystemen sowie ihr Auftreten und ihre Anwendungen in den physikalischen Fachgebieten begleiten den Autor mit wechselnder Intensität seit Studium und Assistenzzeit am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik und während langjähriger Forschungs- und Lehrtätigkeit auf den Gebieten der Systemtheorie und der allgemeinen und optischen Nachrichtentechnik.

Erst seit dem Ende der aktiven Berufsphase mit jahrzehntelanger Erfahrung in Darstellung und Weitergabe von wissenschaftlichen Inhalten im Forschungs- und Hochschulbereich als Wissenschaftler und Hochschullehrer stand genügend Zeit zur Verfügung für die intensive und tiefgehende Bearbeitung der für die Ingenieurwissenschaften grundlegenden Vektoren und Tensoren, sowie deren Anwendung und Auftreten in wesentlichen Bereichen der Physik.

Die berufliche Erfahrung als Lehrender vor Generationen von Studenten führte zur Erkenntnis, dass klare Formulierungen, einfache Schreibweise und nachvollziehbare Rechengänge, die auch manchen genialen Einfall, Kunstgriff oder „Trick“ mit einschließen, das Verständnis stark fördern und den Erkenntnisgewinn bei angemessenem Zeitaufwand ermöglichen.

Ein wesentliches Merkmal des Gesamtwerks besteht darin, die Einfachheit der Grundideen zu betonen, ohne die Komplexität der mathematischen Behandlung einzuschränken, dabei aber ihre Durchführung klar zu erläutern.

Der gesamten Darstellung liegt die Absicht zugrunde, alle Überlegungen durch transparente Angabe von Zwischenschritten sowie durch Querverweise in genügender Ausführlichkeit darzulegen, um den Gang der Rechnung übersichtlich zu gestalten und auch einfallsreiche oder längere Ableitungen nachvollziehbar zu machen. Zusätzlich sind besonders im zweiten Band, der den Anwendungen gewidmet ist, viele Zitate der einschlägigen Literatur angegeben, um den Leser auf weitere und ausführlichere Darstellungen eines bestimmten Sachverhaltes hinzuweisen oder um längere und aufwendige Ableitungen abzukürzen oder zu vermeiden.

Ein ernstzunehmendes Hindernis bei Behandlung und Darstellung der Tensorrechnung sieht der Autor darin, dass die übliche und durchgängige Schreibweise mit vielen Indizes insbesondere bei den als wesentlich anzusehenden Koordinatentransformationen schwer zu überblicken ist und dem klaren Erfassen der zugrunde liegenden Sachverhalte im Wege steht. Das wird verstärkt durch die bei der Tensorrechnung auftretenden unteren und oberen Indizes zur Kennzeichnung der gemeinsam verwendeten ko- und kontravarianten Komponenten sowie die als EINSTEIN'sche Summationskonvention bezeichnete Unterdrückung aller Summenzeichen, wobei auch die Indexlaufweite nicht mehr klar erkennbar ist.

Darin liegt sicher einer der Gründe, dass das ganze Thema als schwierig und undurchsichtig gilt und nur mit erheblichem Aufwand zu erlernen ist. Selbst der berühmte Mathematiker Hermann WEYL bemerkt im Vorwort seines Buches [1], dass seine Darstellung der Relativitätstheorie „*vor den Genuss der Erkenntnisfrucht den Schweiß des Tensorkalküls gesetzt hat*“!

Um hier eine Alternative zu bieten, die der Anschaulichkeit dienen, das Verständnis fördern und einen neuen Zugang ermöglichen soll, werden von Anfang an Vektoren und Tensoren als eigenständige physikalische Größen eingeführt, die unabhängig vom Koordinatensystem und damit invariant sind.

[1] Weyl, H.: Raum, Zeit, Materie, Springer Verlag, 8. Aufl. (1993)

Ihre Darstellung in Koordinatensystemen, also ihre Zerlegung in Komponenten für die einzelnen Koordinatenrichtungen sowie deren Transformationen beim Wechsel solcher Systeme, werden konsequent mit *Matrizen* formuliert und nur selten für einführende Beispiele oder Erläuterungen wird Summen- und Indexschreibweise verwendet. Außer einer formalen Kennzeichnung mit einem speziellen Symbol zur Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten treten kaum Indizes auf. Da die Bildung von Matrizenprodukten die Summation mit impliziter Indizierung einschließt, bleiben die Beziehungen insgesamt übersichtlich und leicht verständlich.

Matrizen gehören seit langem zum Handwerkszeug von Naturwissenschaftlern, Ingenieuren und weiteren Berufskreisen und sind insbesondere bei vielen numerischen Verfahren unverzichtbar, so dass die Behandlung der Tensorrechnung mit diesen mathematischen Größen einprägsam und elegant durchgeführt werden kann.

Großer Wert wird weiterhin gelegt auf systematische Vorgehensweise, Unterstützung der Vorstellung durch anschauliche Abbildungen und Beispiele sowie eine klare und ausführliche Erläuterung zentraler Begriffe der Tensorrechnung.

An mathematischen Vorkenntnissen werden lediglich Differential- und Integralrechnung sowie die Grundlagen von Matrizen und Vektoren vorausgesetzt, wobei auf die beiden letzten Themenbereiche noch in eigenen Kapiteln als Übersicht und Formelsammlung für die spätere Verwendung eingegangen wird.

Wer den Eindruck gewinnt, dass sich die Beschäftigung mit dem Gegenstand lohnt und bereit ist, dem logischen Ablauf der Darstellung zu folgen, wird trotz einer gewissen Ausdauer kaum Schwierigkeiten haben, das vorgelegte Thema zu erfassen und sich zu eigen zu machen.

Geschrieben wurde das Buch von einem Ingenieur, allerdings mit profundem theoretischen Hintergrund, dessen Absicht es ist, Begriffe und Sachverhalte so deutlich und verständlich wie möglich darzustellen. Mit der beruflichen Ausrichtung wird auch der Verzicht auf mathematische Strenge und Beweisführung begründet, die man bei Bedarf in den zitierten, einschlägigen Lehrbüchern finden kann. In inhaltlicher Hinsicht wird keine Originalität angestrebt, denn es existieren viele Lehr- und Fachbücher zu den verschiedenen Themengebieten oder zu einzelnen Aspekten, auf die im Text verwiesen wird und die im umfangreichen Gesamtverzeichnis der Bücher thematisch geordnet aufgeführt sind. Neu zu sein scheint dagegen die Art der Darstellung, die besondere Schreibweise und die Verwendung von Matrizen.

Ursprünglich war dieses Buch nur als ein *Handbüchlein* geplant, das sich für viele zum Nutzen im Themenbereich von Vektor- und Tensorrechnung erweisen sollte. Mit dem Fortschritt der Bearbeitung und der Erkenntnis, dass die physikalischen Anwendungen unverzichtbar sind für ein grundlegendes Verständnis dieses mathematischen Handwerkszeuges, nahm der Umfang immer mehr zu, so dass die anfängliche Idee zugunsten eines am Ende zweibändigen Gesamtwerkes aufgegeben wurde.

Die Hoffnung des Autors besteht dennoch darin, dass beide Bücher Eingang finden in die „handhabbare“ wissenschaftliche Literatur und nicht nur auf Bibliotheksbrettern vor sich hindösen. Sollte sich dieses Ziel erfüllen, dann ist die Absicht des Autors vollkommen erreicht.

Danken möchte ich an erster Stelle meiner Frau und lebenslanger Partnerin Nelly, der ich dieses Buch widme, für ihre langjährige ungeheure Geduld und Nachsicht mit einem beflissenen und MINT-begeisterten Akademiker und nun auch Autor.

Rat und Unterstützung erhielt ich durch die Professoren Hans-Joachim Gelbrich und Joachim Meissner, die über viele Jahre hinweg Freunde und Kollegen sowie zuverlässige und stets bereite Gesprächspartner waren und die auch eine kritische Durchsicht von Teilen des Manuskriptes vornahmen.

Dem Springer-Verlag und seinem Cheflektor Herrn Dapper danke ich für die Annahme und bereitwillige Unterstützung dieses Buchprojektes. Danken möchte ich auch Frau Brossler vom Lektorat, die die Vertragsabwicklung und Manuskriptbetreuung durchführte und bei vielen Kontakten auf eine Reihe von Sonderwünschen einging, die für mich von besonderer Bedeutung in der Gestaltung beider Bände waren. Frau Barth von der Firma le-tex danke ich für wertvolle Hinweise bei Fragen zum Schreib- und Formelsatzprogramm LaTeX.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Einführung

Die physikalische Beschreibung der Natur und der darin auftretenden Phänomene erfordert für konkrete, quantitative Aussagen die Mathematik und ihre Begriffsbildungen, wenn man über eine rein deskriptive oder qualitative Darstellung hinauskommen will. Diese Erkenntnis wurde bereits vor vierhundert Jahren von Galileo GALILEI sinngemäß ausgesprochen, denn das *„große Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik und Geometrie geschrieben“*, (Il Saggiatore, 1623).

Das Thema des zweibändigen Gesamtwerkes ist die **Tensorrechnung** als ein Gebiet der angewandten Mathematik, das die Vektorrechnung umfasst und verallgemeinert und in nahezu allen Teilen der Physik unverzichtbar ist für Darstellung und Beschreibung der beobachtbaren Phänomene. Wenn in diesem Buch von Tensorrechnung oder Tensorkalkül die Rede ist, wird immer auch implizit die „normale“ Vektorrechnung als spezieller Fall darunter verstanden und eingeschlossen, die den natürlichen Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet.

Im **ersten Band** werden die algebraischen und analytischen Eigenschaften von Vektoren und Tensoren behandelt und im **zweiten Band** wird das Auftreten dieser Größen in mathematischen und vornehmlich physikalischen Fachgebieten untersucht.

Tensoren sind als höherrangige Größen zur Beschreibung einer Reihe physikalischer Phänomene erforderlich, bei denen eine skalare oder vektorielle Darstellung weder angemessen noch ausreichend ist, wie bei der Abbildung von Vektoren durch Operatoren, bei Spannungszuständen in verformbaren Materialien oder anisotropen Eigenschaften der Materie.

W. Werner, *Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-49783-5_1

Die hier vorgelegte Behandlung der Tensorrechnung unterscheidet grundsätzlich in Darstellung und Schreibweise zwischen Vektoren und Tensoren als invariante physikalische Größen selbst sowie ihrer Zerlegung in Komponenten in Koordinatensystemen.

Als Alternative zur bisherigen in der Literatur weit verbreiteten Indexschreibweise werden zur Darstellung der Komponenten von Vektoren und Tensoren **Matrizen** verwendet, mit denen alle Transformationen von Koordinaten, Komponenten und Basisvektoren einfach beschrieben werden können und die bei den vielfach auftretenden Transformationen einen klaren Überblick gewährleisten.

Das vorliegende Werk richtet sich an zwei **Gruppen von Lesern**. Die eine Zielgruppe sind Studenten höherer Semester aus Physik und Ingenieurwissenschaften, denen beide Bücher neben den Vorlesungen begleitend zur Verfügung stehen sollen. Die andere Zielgruppe stellen Ingenieure und Naturwissenschaftler dar, die in ihrer beruflichen Praxis die tensorielle Verallgemeinerung physikalischer Größen, ihre mathematische Behandlung sowie deren Anwendung und Auftreten benötigen oder kennenlernen wollen.

Verschiedene mathematische Themenbereiche werden entweder als bekannt vorausgesetzt wie Analysis mit Differential- und Integralrechnung oder werden wie bei der Matrizenrechnung im Sinne einer kurz gehaltenen Einführung nur gestreift und durch bestimmte Beziehungen ergänzt, wobei strenge Beweisführungen und mathematische Ableitungen unterbleiben, die man entsprechenden Lehrbüchern entnehmen kann.

Der Leser wird bei allen Kapiteln selbst entscheiden, was er schon kennt und überspringen kann, ob er Neues findet oder etwas wiederholen will!

An vielen Stellen, speziell im *Abschnitt 2.3* und im zweiten Band, werden die **Einheiten** der auftretenden physikalischen Größen angegeben, einerseits um Verständnis und Interpretation der Gleichungen zu unterstützen, andererseits um bei Bedarf Dimensionskontrollen durchzuführen.

Bis auf wenige Ausnahmen werden alle physikalischen Größen im **Internationalen Einheitensystem SI** (*Système international d'unités*) angegeben, das in den 1960er Jahren verabschiedet wurde und seither in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft als verbindlich anzusehen ist. Ab Mai 2019 tritt eine neue Definition in Kraft, um alle sieben **SI-Basiseinheiten** auf fundamentale physikalische Konstanten **(Naturkonstanten)** zurückzuführen, wodurch vorhandene Abhängigkeiten von veränderlichen Größen beendet werden, [19].

Dennoch gibt es in Teilgebieten der Physik einzelne, aus historischen oder praktischen Gründen beibehaltene **nichtkompatible Einheiten**, auf die speziell hingewiesen wird. Auch neuere Bücher verwenden mitunter eine Darstellung im veralteten cgs-System, in dem z.B. die MAXWELL'schen Gleichungen in anderer Gestalt erscheinen. Dagegen hat Arnold SOMMERFELD als einer der berühmten theoretischen Physiker bereits 1948 in seinem mehrbändigen Lehrbuch über *Optik* [13, S. 7] und *Elektrodynamik*, [14, S. 40f.], das *rationelle* oder *physikalische System* und seinen Vorzug klar begründet und verwendet, das später zum SI-System weiterentwickelt wurde.

Eine besondere Stellung nimmt das hier aus prinzipiellen Gründen nicht verwendete *natürliche Einheitensystem* ein, das in der Relativitätstheorie mit der Absicht eingeführt wurde, um Beziehungen einfacher oder einheitlicher zu gestalten. Dabei wird die Lichtgeschwindigkeit c auf Eins normiert, wodurch Dimensionskontrollen von Gleichungen, die aber für Ingenieure und viele andere Wissenschaftler unverzichtbar sind, unmöglich werden und die physikalische Realität zu einem Zweig der Mathematik mit reiner Strukturuntersuchung wird!

Bei der Behandlung der einzelnen Themengebiete steht zweifellos die mathematische Darstellung im Vordergrund, die zur exakten Beschreibung notwendig und unverzichtbar ist. Für den Leser bedeutet es, dass die Erkenntnis beim Weg durch die einzelnen Kapitel mit Ausdauer und manchmal auch mit Anstrengung erreicht werden kann.

Um den Fließtext zu strukturieren und Textstellen leichter auffindbar zu machen, erscheinen wichtige Begriffe, die auch im Sachverzeichnis aufgeführt sind, sowie bedeutsame Aussagen in **Fettdruck** und in speziellen Fällen auch in *kursiver Schrift.*

Viele Formeln, die einen gewissen Abschluss eines Gedankenganges bilden und Zwischenziele oder Endergebnisse darstellen, sind mit **Rahmen** versehen. Das dient der Strukturierung des Rechenganges und der größeren Übersicht beim Auffinden von Ergebnissen sowie der Nummerierung von Gleichungen für spätere Verweise. In aller Regel sind die zahlreichen **Verweise** rückwärtsgerichtet, wodurch der aufbauende Charakter der Darlegungen und Entwicklungen betont wird. Nur in sehr wenigen, aber manchmal unvermeidbaren Fällen wird dagegen auf ein erst später erscheinendes Ergebnis verwiesen, das zwar benötigt wird, aber aus bestimmten Gründen im aktuellen Zusammenhang nicht dargelegt werden kann.

Als **Themenbereiche** werden im vorliegenden ersten Band des Gesamtwerkes Algebra und Analysis von Vektoren und Tensoren als eigenständige Fachdisziplinen behandelt. Daran schließen sich Darstellungen der Differentialoperationen und Integralsätze an, die speziell im Hinblick auf die Beschreibung physikalischer Zusammenhänge im zweiten Band entwickelt werden.

Die Tensorrechnung, auch **Tensorkalkül** genannt, geht nach Vorarbeiten von GAUSS, RIEMANN und anderen auf dem Gebiet der Differentialgeometrie auf die Untersuchungen der beiden italienischen Mathematiker **Gregorio RICCI-CURBASTRO** (1853-1925) und **Tullio LEVI-CIVITA** (1873-1941) um das Jahr 1900 zurück, die deshalb zunächst als **RICCI-Kalkül** bezeichnet wurde. Verallgemeinernd lassen sich alle physikalischen Größen, also auch Skalare und Vektoren, als Tensoren unterschiedlicher Stufen ansehen und der axiale Vektor des Kreuzproduktes kann als spezieller Tensor gedeutet werden.

Dem Tensorkalkül eigentümlich und eine wesentliche Art der Darstellung ist die gleichzeitige Verwendung von **zwei Bezugssystemen**, die einen speziellen, reziproken Zusammenhang besitzen. Man nennt sie die ko- und kontravarianten Koordinaten-, Grund- oder Basissysteme, in denen Tensoren entsprechende ko- und kontravariante, sowie gemischte Komponenten besitzen. Durch die gemeinsame Verwendung beider Basissysteme und der zugehörigen Komponenten lassen sich viele Beziehungen einfach und übersichtlich formulieren. Zweck und Namensgebung der Systeme werden in ihrer Bedeutung während der Entwicklung des Tensorkalküls, das die Vektorrechnung als Sonderfall umfasst, verständlich.

Charakteristisch und ein wesentlicher Bestandteil des Tensorkalküls sind die verschiedenen Komponentendarstellungen und ihre Umrechnung bei Basiswechsel mit zugehöriger Indizierung und Vielfachsummationen je nach Stufenzahl der Tensoren, die die Formelnotierung aufwendig machen. **Albert EINSTEIN**, dessen Allgemeine Relativitätstheorie auf dem RICCI-Kalkül beruhte, führte deshalb eine **Summationskonvention** ein, durch die das Notieren der Summenzeichen unterdrückt wird, um von Schreibarbeit zu entlasten. Nach seiner eigenen Aussage sei das seine größte Erfindung in der Mathematik gewesen!

Diese Art der abgekürzten Schreibweise findet man nahezu durchgängig in der gesamten Tensorliteratur, wodurch die Lesbarkeit vieler Beziehungen und speziell der Transformationsrelationen mit unterer und oberer Mehrfachindizierung der verschiedenen Komponenten bei Wechsel der Koordinatensysteme erleichtert werden soll, dem Autor dagegen als unübersichtlich und schwerer verständlich erscheint, was auch in [16, S. 151] aus didaktischen Gründen vermieden wird. Darstellung und Kritik der Summationskonvention werden im *Abschnitt 10.4* noch näher betrachtet.

Ein neueres Buch zur Allgemeinen Relativitätstheorie, [9], die im zweiten Band behandelt wird und deren Feldgleichungen nur mit Tensoren dargestellt werden können, verzichtet kommentarlos auf die Summationskonvention. Dieses hervorragende und gut verständliche Buch der Open University richtet sich speziell an Studenten im Fern- oder Selbststudium und das Autorenteam erachtete es offenbar als pädagogisch und didaktisch sinnvoller, alle Summen ausführlich darzustellen, um dadurch den Überblick über die vielfach auftretenden Indizes und ihre Laufweite zu wahren.

Durch die **Verwendungung von Matrizen** können Vektor- und Tensorkomponenten und ihre Umrechnungen bei Basiswechsel sehr klar, übersichtlich und leicht verständlich dargestellt werden, weil man sofort erkennt, wo Transformationsmatrizen in transponierter oder inverser Form auftreten oder sich in Produkten ggf. zur Einheitsmatrix kompensieren. Die Ergebnisse der zahlreichen Umrechnungen von Basisvektoren und Komponenten sind zusätzlich in einer Reihe von **Tabellen** mit den entsprechenden Matrixrelationen zusammengefasst, die als eine Art Formelsammlung anzusehen sind.

Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren werden durch eine bestimmte Indizierung formalisiert, wobei ein **spezielles Symbol** (#) als unterer oder oberer **Laufindex** zur Kennzeichnung von ko- und kontravarianten Elementen verwendet wird. Die durchgängige Matrixschreibweise stellt einen erheblichen Vorteil gegenüber der üblichen, aber oft schwer zu überblickenden Indexschreibweise dar. Das gilt speziell bei den für die Tensorrechnung wesentlichen Transformationseigenschaften bei Basiswechsel, wodurch dieser Kalkül gewöhnlich als schwierig gilt und von vielen Ingenieuren und Naturwissenschaftlern nicht beherrscht wird.

In der vorliegenden Darstellung der Tensorrechnung mit Matrizen ist die **Summationskonvention nicht erforderlich**, da ja die Produktbildung der Matrizenrechnung die Summation als wesentliche Eigenschaft implizit enthält!