



Wolfgang Werner

# Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1

Tensoralgebra und Tensoranalysis  
Darstellung mit Matrizen

*2. Auflage*



Springer Vieweg

---

# Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1

---

Wolfgang Werner

# Vektoren und Tensoren als universelle Sprache in Physik und Technik 1

Tensoralgebra und Tensoranalysis  
Darstellung mit Matrizen

2., korrigierte, aktualisierte und erweiterte Auflage

Wolfgang Werner  
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-49782-8                    ISBN 978-3-658-49783-5 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-49783-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <https://portal.dnb.de> abrufbar.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019, 2025

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jede Person benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des/der jeweiligen Zeichennhaber\*in sind zu beachten.

Der Verlag, die Autor\*innen und die Herausgeber\*innen gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autor\*innen oder die Herausgeber\*innen übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Alexander Grün  
Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Wenn Sie dieses Produkt entsorgen, geben Sie das Papier bitte zum Recycling.

# Vorwort zur zweiten Auflage

Die kritische Durchsicht beider Bände des Gesamtwerks im Abstand von mehreren Jahren führte neben der Korrektur von unvermeidbaren Schreibfehlern auch zu stilistischen Glättungen, indem der Text an vielen Stellen prägnanter gefasst und sprachlich präzisiert wurde. Die inhaltliche Darstellung wurde durch zusätzliche Aspekte und aktuelle Entwicklungen ergänzt. Alle Formeln und Berechnungen wurden überprüft und gelegentliche, zu knappe Darstellungen durch Hinweise oder Erweiterungen im Rechengang leichter verständlich gemacht. Gleichzeitig wurde das typographische Erscheinungsbild in ansprechender Weise durch farbige Akzente gestaltet.

Die zweite Auflage bietet die Gelegenheit, das Gesamtwerk im Ganzen durch zusätzliche Querverweise auf Formeln und Abschnitte sowie eine größere Anzahl von Literaturzitaten besser zu überblicken, wodurch dem Leser oder der Leserin der Zugang und das Verständnis erleichtert oder das Thema stärker verdeutlicht werden soll.

Wichtige Zahlenwerte und bestimmte wesentliche Sachverhalte wurden als nummerierte Kernaussagen kenntlich gemacht, die im Sachverzeichnis unter diesen Stichwörtern aufgeführt sind.

Trotz der umfangreichen Überarbeitung blieben Anspruch und Zielsetzung beider Bände unverändert, um den angesprochenen Zielgruppen in Studium und beruflicher Praxis ein Werk an die Hand zu geben, das die Tensorrechnung in Grundlagen und Anwendungen in ausführlicher Weise darlegt.

Dem Springer-Verlag und seinem Lektor Dr. GRÜN danke ich für die Möglichkeit, eine zweite Auflage beider Bände zu veröffentlichen. Danken möchte ich auch Frau SAGLIO vom Lektorat für die Betreuung dieses Buchprojektes.

# Vorwort zur ersten Auflage

Die Absicht des vorliegenden ersten Bandes des zweibändigen Gesamtwerkes besteht darin, die Tensorrechnung in einer Weise zu entwickeln und darzustellen, wie sie in dieser Form in der einschlägigen Literatur nicht behandelt wird.

Dabei ist die Vektorrechnung in der für Ingenieure und Naturwissenschaftler vertrauten Form als spezieller Fall der Tensorrechnung der Ausgangspunkt der Darstellung. Vektoren und Tensoren werden mit Matrizen beschrieben und im Unterschied zu den üblichen Darstellungen wird die Indexschreibweise nur gelegentlich zur Erläuterung verwendet.

Die Beschäftigung mit Koordinatensystemen, die Beschreibung von Vektoren und Tensoren in koordinatenfreier und -gebundener Form, die Umrechnung ihrer Komponenten beim Wechsel von Koordinatensystemen sowie ihr Auftreten und ihre Anwendungen in den physikalischen Fachgebieten begleiten den Autor mit wechselnder Intensität seit Studium und Assistenzzeit am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik und während langjähriger Forschungs- und Lehrtätigkeit auf den Gebieten der Systemtheorie und der allgemeinen und optischen Nachrichtentechnik.

Erst seit dem Ende der aktiven Berufsphase mit jahrzehntelanger Erfahrung in Darstellung und Weitergabe von wissenschaftlichen Inhalten im Forschungs- und Hochschulbereich als Wissenschaftler und Hochschullehrer stand genügend Zeit zur Verfügung für die intensive und tiefgehende Bearbeitung der für die Ingenieurwissenschaften grundlegenden Vektoren und Tensoren, sowie deren Anwendung und Auftreten in wesentlichen Bereichen der Physik.

Die berufliche Erfahrung als Lehrender vor Generationen von Studenten führte zur Erkenntnis, dass klare Formulierungen, einfache Schreibweise und

nachvollziehbare Rechengänge, die auch manchen genialen Einfall, Kunstgriff oder „Trick“ mit einschließen, das Verständnis stark fördern und den Erkenntnisgewinn bei angemessenem Zeitaufwand ermöglichen.

Ein wesentliches Merkmal des Gesamtwerks besteht darin, die Einfachheit der Grundideen zu betonen, ohne die Komplexität der mathematischen Behandlung einzuschränken, dabei aber ihre Durchführung klar zu erläutern.

Der gesamten Darstellung liegt die Absicht zugrunde, alle Überlegungen durch transparente Angabe von Zwischenschritten sowie durch Querverweise in genügender Ausführlichkeit darzulegen, um den Gang der Rechnung übersichtlich zu gestalten und auch einfallsreiche oder längere Ableitungen nachvollziehbar zu machen. Zusätzlich sind besonders im zweiten Band, der den Anwendungen gewidmet ist, viele Zitate der einschlägigen Literatur angegeben, um den Leser auf weitere und ausführlichere Darstellungen eines bestimmten Sachverhaltes hinzuweisen oder um längere und aufwendige Ableitungen abzukürzen oder zu vermeiden.

Ein ernstzunehmendes Hindernis bei Behandlung und Darstellung der Tensorrechnung sieht der Autor darin, dass die übliche und durchgängige Schreibweise mit vielen Indizes insbesondere bei den als wesentlich anzusehenden Koordinatentransformationen schwer zu überblicken ist und dem klaren Erfassen der zugrunde liegenden Sachverhalte im Wege steht. Das wird verstärkt durch die bei der Tensorrechnung auftretenden unteren und oberen Indizes zur Kennzeichnung der gemeinsam verwendeten ko- und kontravarianten Komponenten sowie die als EINSTEIN'sche Summationskonvention bezeichnete Unterdrückung aller Summenzeichen, wobei auch die Indexlaufweite nicht mehr klar erkennbar ist.

Darin liegt sicher einer der Gründe, dass das ganze Thema als schwierig und undurchsichtig gilt und nur mit erheblichem Aufwand zu erlernen ist. Selbst der berühmte Mathematiker Hermann WEYL bemerkt im Vorwort seines Buches <sup>1</sup>, dass seine Darstellung der Relativitätstheorie „vor den Genuss der Erkenntnisfrucht den Schweiß des Tensorkalküls gesetzt hat“!

Um hier eine Alternative zu bieten, die der Anschaulichkeit dienen, das Verständnis fördern und einen neuen Zugang ermöglichen soll, werden von Anfang an Vektoren und Tensoren als eigenständige physikalische Größen eingeführt, die unabhängig vom Koordinatensystem und damit invariant sind.

---

<sup>1</sup>Weyl, H.: Raum, Zeit, Materie, Springer Verlag, 8. Aufl. (1993)

Ihre Darstellung in Koordinatensystemen, also ihre Zerlegung in Komponenten für die einzelnen Koordinatenrichtungen sowie deren Transformationen beim Wechsel solcher Systeme, werden konsequent mit *Matrizen* formuliert und nur selten für einführende Beispiele oder Erläuterungen wird Summen- und Indexschreibweise verwendet. Außer einer formalen Kennzeichnung mit einem speziellen Symbol zur Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten treten kaum Indizes auf. Da die Bildung von Matrizenprodukten die Summation mit impliziter Indizierung einschließt, bleiben die Beziehungen insgesamt übersichtlich und leicht verständlich.

Matrizen gehören seit langem zum Handwerkszeug von Naturwissenschaftlern, Ingenieuren und weiteren Berufskreisen und sind insbesondere bei vielen numerischen Verfahren unverzichtbar, so dass die Behandlung der Tensorrechnung mit diesen mathematischen Größen einprägsam und elegant durchgeführt werden kann.

Großer Wert wird weiterhin gelegt auf systematische Vorgehensweise, Unterstützung der Vorstellung durch anschauliche Abbildungen und Beispiele sowie eine klare und ausführliche Erläuterung zentraler Begriffe der Tensorrechnung.

An mathematischen Vorkenntnissen werden lediglich Differential- und Integralrechnung sowie die Grundlagen von Matrizen und Vektoren vorausgesetzt, wobei auf die beiden letzten Themenbereiche noch in eigenen Kapiteln als Übersicht und Formelsammlung für die spätere Verwendung eingegangen wird.

Wer den Eindruck gewinnt, dass sich die Beschäftigung mit dem Gegenstand lohnt und bereit ist, dem logischen Ablauf der Darstellung zu folgen, wird trotz einer gewissen Ausdauer kaum Schwierigkeiten haben, das vorgelegte Thema zu erfassen und sich zu eigen zu machen.

Geschrieben wurde das Buch von einem Ingenieur, allerdings mit profundem theoretischen Hintergrund, dessen Absicht es ist, Begriffe und Sachverhalte so deutlich und verständlich wie möglich darzustellen. Mit der beruflichen Ausrichtung wird auch der Verzicht auf mathematische Strenge und Beweisführung begründet, die man bei Bedarf in den zitierten, einschlägigen Lehrbüchern finden kann. In inhaltlicher Hinsicht wird keine Originalität angestrebt, denn es existieren viele Lehr- und Fachbücher zu den verschiedenen Themengebieten oder zu einzelnen Aspekten, auf die im Text verwiesen wird und die im umfangreichen Gesamtverzeichnis der Bücher thematisch geord-

net aufgeführt sind. Neu zu sein scheint dagegen die Art der Darstellung, die besondere Schreibweise und die Verwendung von Matrizen.

Ursprünglich war dieses Buch nur als ein *Handbüchlein* geplant, das sich für viele zum Nutzen im Themenbereich von Vektor- und Tensorrechnung erweitern sollte. Mit dem Fortschritt der Bearbeitung und der Erkenntnis, dass die physikalischen Anwendungen unverzichtbar sind für ein grundlegendes Verständnis dieses mathematischen Handwerkszeuges, nahm der Umfang immer mehr zu, so dass die anfängliche Idee zugunsten eines am Ende zweibändigen Gesamtwerkes aufgegeben wurde.

Die Hoffnung des Autors besteht dennoch darin, dass beide Bücher Eingang finden in die „handhabbare“ wissenschaftliche Literatur und nicht nur auf Bibliotheksrettern vor sich hindösen. Sollte sich dieses Ziel erfüllen, dann ist die Absicht des Autors vollkommen erreicht.

Danken möchte ich an erster Stelle meiner Frau und lebenslanger Partnerin Nelly, der ich dieses Buch widme, für ihre langjährige ungeheure Geduld und Nachsicht mit einem beflissen und MINT-begeisterten Akademiker und nun auch Autor.

Rat und Unterstützung erhielt ich durch die Professoren Hans-Joachim GELBRICH und Joachim MEISSNER, die über viele Jahre hinweg Freunde und Kollegen sowie zuverlässige und stets bereite Gesprächspartner waren und die auch eine kritische Durchsicht von Teilen des Manuskriptes vornahmen.

Dem Springer-Verlag und seinem Cheflektor Herrn DAPPER danke ich für die Annahme und bereitwillige Unterstützung dieses Buchprojektes. Danken möchte ich auch Frau BROSSLER vom Lektorat, die die Vertragsabwicklung und Manuskriptbetreuung durchführte und bei vielen Kontakten auf eine Reihe von Sonderwünschen einging, die für mich von besonderer Bedeutung in der Gestaltung beider Bände waren. Frau BARTH von der Firma le-tex danke ich für wertvolle Hinweise bei Fragen zum Schreib- und Formelsatzprogramm L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
	Literaturangaben . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>13</b>
2.1	Allgemeine Bemerkungen zur Schreibweise . . . . .	13
2.2	Mathematische Größen . . . . .	15
2.3	Physikalische Größen . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Beziehungen der Matrizenrechnung</b>	<b>25</b>
3.1	Definitionen . . . . .	26
3.1.1	Spaltenvektor und Zeilenvektor . . . . .	26
3.1.2	Matrix . . . . .	26
3.2	Produkte von Matrizen . . . . .	27
3.2.1	Skalarprodukt (Zeile mal Spalte) . . . . .	27
3.2.2	Dydisches Produkt (Spalte mal Zeile) . . . . .	28
3.2.3	Matrizenprodukt . . . . .	28
3.2.4	Lineares Gleichungssystem . . . . .	30
3.2.5	Matrizenprodukte mit FALK-Schema . . . . .	30
3.2.6	Piktogramme der Matrixmultiplikation . . . . .	32
3.2.7	Rechts- und Linksmultiplikation . . . . .	32
3.2.8	Matrixtransformationen . . . . .	32
3.3	Inverse Matrix und adjungierte Matrix . . . . .	34
3.4	Formale Matrizen und Produkte . . . . .	35
3.5	Spezielle Matrizen . . . . .	37
3.5.1	Einheitsmatrix . . . . .	37
3.5.2	Einsmatrix . . . . .	37

3.5.3	Diagonalmatrizen . . . . .	37
3.5.4	Orthogonale Matrizen . . . . .	38
3.6	Spezielle Beziehungen . . . . .	40
3.6.1	Distributivität und Assoziativität . . . . .	40
3.6.2	Ausklammern . . . . .	40
3.6.3	Blockmatrizen . . . . .	40
3.6.4	Transponierung und Inversion . . . . .	41
3.6.5	Determinante und Spur für $n \times n$ -Matrizen . . . . .	41
3.6.6	LAPLACE'scher Entwicklungssatz . . . . .	41
3.6.7	Additions- und Determinantensatz . . . . .	42
3.6.8	Differentiation von Matrizen . . . . .	43
3.6.9	Ableitung von Determinanten . . . . .	44
3.7	Summen als Matrizenprodukte . . . . .	45
3.7.1	Einfache Summe . . . . .	45
3.7.2	Doppelsummen . . . . .	45
3.7.3	vec-Operator . . . . .	47
3.8	Erweiterung der Matrixmultiplikation . . . . .	48
3.8.1	Höhere Matrizen . . . . .	48
3.8.2	Tensoren 3. und 4. Stufe . . . . .	51
3.9	Grenzen der Berechnung mit Matrizen . . . . .	54
	Literaturangaben . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Physikalische Grössen und Felder</b>	<b>56</b>
4.1	Zielsetzung der Physik . . . . .	56
4.2	Transformation physikalischer Grössen . . . . .	58
4.3	Physikalische Felder . . . . .	59
4.3.1	Der Begriff des Feldes . . . . .	59
4.3.2	Beispiele für Felder und ihre Darstellungen . . . . .	61
	Literaturangaben . . . . .	62
<b>II</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Vektorbeziehungen</b>	<b>65</b>
5.1	Grundlegende Eigenschaften von Vektoren . . . . .	65
5.1.1	Affiner Vektorbegriff . . . . .	66
5.1.2	Vektoraddition . . . . .	66
5.1.3	Skalarprodukt und metrische Eigenschaften . . . . .	67

5.1.4	Einheitsvektoren . . . . .	68
5.1.5	Kreuzprodukt . . . . .	69
5.2	Mehrfachprodukte der Vektorrechnung . . . . .	70
5.2.1	Spatprodukt . . . . .	70
5.2.2	Doppeltes Kreuzprodukt, Entwicklungssatz . . . . .	71
5.2.3	Vierfachprodukt, Identität von LAGRANGE . . . . .	71
5.2.4	GRAM'sche Determinante . . . . .	72
5.3	Physikalische Einteilung der Vektoren . . . . .	73
5.3.1	Inversion des Koordinatensystems . . . . .	73
5.3.2	Polare Vektoren . . . . .	73
5.3.3	Axiale Vektoren . . . . .	74
5.3.4	Flächenelement . . . . .	75
5.3.5	Multiplikative Verknüpfung von Skalaren und Vektoren	76
5.3.6	Beispiele physikalischer Skalare und Vektoren . . . . .	77
5.3.6.1	Skalare . . . . .	77
5.3.6.2	Pseudoskalare . . . . .	77
5.3.6.3	Polare Vektoren . . . . .	78
5.3.6.4	Axiale Vektoren . . . . .	78
5.4	Vektoren im Raum . . . . .	78
5.4.1	Zerlegung eines Vektors bezüglich einer Richtung . . .	78
5.4.2	Vektordarstellung von Ebenen . . . . .	80
5.5	GRAM'sche Matrizen . . . . .	82
5.5.1	GRAM'sche Matrix für zwei Sätze von Vektoren . . .	82
5.5.2	Reziproke Vektoren und Reziprozitätsbedingung . . .	83
5.5.3	Vektorzerlegung nach reziproken Vektoren . . . . .	84
5.6	Ableitung von Vektoren und Anwendungen . . . . .	85
5.6.1	Produkte und Einheitsvektor . . . . .	85
5.6.2	Bewegung von Punkten auf Bahnkurven . . . . .	85
5.6.3	Geradlinige Bahnkurve . . . . .	87
5.6.4	Kreisförmige Bahnkurve . . . . .	87
5.6.5	Relativbewegungen . . . . .	91
5.6.6	Grundgrößen von Raumkurven . . . . .	93
5.6.6.1	Beispiel einer Raumkurve . . . . .	103
5.6.7	Ableitungen in Koordinatensystemen . . . . .	105
5.7	Integration von Vektorfunktionen . . . . .	106
	Literaturangaben . . . . .	108

<b>6 Gera</b> dlinige Koordinatensysteme	<b>110</b>
6.1 Notwendigkeit und Bedeutung . . . . .	110
6.2 Begriffe der Tensorrechnung . . . . .	111
6.3 Kartesische Koordinatensysteme . . . . .	112
6.3.1 Eigenschaften der kartesischen Basisvektoren . . . . .	112
6.3.2 Basisvektoren bei Basiswechsel . . . . .	114
6.3.3 Eigenschaften orthogonaler Transformationen . . . . .	114
6.4 Kovariante Basis als Grundsystem . . . . .	116
6.4.1 Grundvektoren als kovariante Basisvektoren . . . . .	116
6.4.2 Darstellung im kartesischen System . . . . .	116
6.5 Kontravariante Basis . . . . .	117
6.5.1 Kontravariante Basisvektoren . . . . .	117
6.5.2 Darstellung im kartesischen System . . . . .	117
6.6 Reziproke Basissysteme . . . . .	118
6.6.1 Reziprozitätsbedingung bei ungleicher Indexstellung .	118
6.6.2 Graphische Darstellung reziproker Vektoren . . . . .	119
6.6.3 Metrikmatrizen bei gleicher Indexstellung . . . . .	120
6.6.4 Begründung für zwei Basissysteme . . . . .	121
6.6.5 Orthogonale Koordinatensysteme . . . . .	121
6.7 Eigenschaften der Metrikmatrizen . . . . .	122
6.7.1 Umrechnung der reziproken Basisvektoren . . . . .	122
6.7.2 Inversion und Kontragredienz . . . . .	122
6.7.3 Beziehungen zwischen den Matrizen . . . . .	123
6.8 Weitere Produkte der Basisvektoren . . . . .	124
6.8.1 Spatprodukte . . . . .	124
6.8.2 Vektorprodukte . . . . .	125
6.9 Basisvektoren bei Basiswechsel . . . . .	127
6.9.1 Lineare Transformation der Basen . . . . .	127
6.9.2 Basen bei Drehung des kartesischen Systems . . . . .	128
6.9.3 Starre Drehung des Gesamtsystems . . . . .	129
6.9.4 Transformationsmatrix der ebenen Drehung . . . . .	130
6.9.5 Räumliche Drehung und EULER'sche Winkel . . . . .	131
6.9.6 Graphische Darstellung der Systemkopplungen . . . . .	134
6.9.7 Spatprodukte in neuen Systemen . . . . .	135
6.10 Beispiele für Basissysteme . . . . .	136
6.10.1 Ko- und kontravariantes System A . . . . .	136
6.10.2 Ko- und kontravariantes System B . . . . .	137

6.10.3	Kopplung zwischen System A und System B . . . . .	137
6.10.4	Ko- und kontravariantes System C mit Drehung . . . . .	138
6.11	Tabellen . . . . .	140
	Literaturangaben . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Vektoren und ihre Komponenten</b>	<b>145</b>
7.1	Vektoren in kartesischen Koordinatensystemen . . . . .	145
7.1.1	Allgemeiner Vektor . . . . .	145
7.1.2	Ortsvektor . . . . .	147
7.2	Vektoren in reziproken Systemen . . . . .	147
7.2.1	Kovariante Basis . . . . .	147
7.2.2	Kontravariante Komponenten . . . . .	148
7.2.3	Kontravariante Basis . . . . .	149
7.2.4	Kovariante Komponenten . . . . .	149
7.2.5	Forminvariante Darstellung . . . . .	150
7.2.6	Betrag eines Vektors . . . . .	151
7.3	Graphische Vektordarstellung . . . . .	152
7.3.1	Parallelprojektion in schiefwinkligen Systemen . . . . .	152
7.3.2	Orthogonalprojektion im schiefwinkligen System . . . . .	153
7.4	Beträge und Längen der Vektorkomponenten . . . . .	153
7.4.1	Geometrische Beziehungen . . . . .	153
7.4.1.1	Beträge und Skalarprodukte d. Basisvektoren	154
7.4.1.2	Beträge der vektoriellen Komponenten bei Parallelprojektion . . . . .	154
7.4.1.3	Längen der Orthogonalprojektionen . . . . .	155
7.4.2	Physikalische Vektorkomponenten . . . . .	155
7.5	Umrechnung der Komponenten im gleichen Basissystem . . . . .	156
7.6	Produkte von Vektoren . . . . .	156
7.6.1	Skalarprodukt zweier Vektoren . . . . .	156
7.6.2	Kreuzprodukt zweier Vektoren, Determinantenform . . . . .	158
7.6.3	Spatprodukt . . . . .	159
<b>8</b>	<b>Vektorkomponenten bei Basiswechsel</b>	<b>161</b>
8.1	Kartesische Komponenten . . . . .	161
8.2	Ko- und kontravariante Komponenten . . . . .	162
8.3	Kogredienz und Kontragredienz . . . . .	163
8.4	Allgemeine lineare Transformation . . . . .	163
8.4.1	Definition . . . . .	163

8.4.2	Wechsel des Koordinatensystems . . . . .	164
8.4.3	Orthogonale Systeme . . . . .	164
8.4.4	Reziproke Systeme . . . . .	165
8.5	Beispiele für Vektortransformationen . . . . .	166
8.5.1	Vektorvorgabe im kartesischen System . . . . .	166
8.5.2	Vektordarstellung im System A . . . . .	166
8.5.3	Vektordarstellung im System B . . . . .	166
8.5.4	Starre Drehung von System A . . . . .	167
8.5.5	Physikalische Vektorkomponenten . . . . .	168
8.6	Tabellen . . . . .	168
<b>III</b>	<b>Tensoralgebra</b>	<b>171</b>
<b>9</b>	<b>Tensorbegriff und Tensor 2. Stufe</b>	<b>173</b>
9.1	Lineare Vektorfunktion . . . . .	173
9.1.1	Abbildung von Vektoren und Tensordefinition . . . . .	173
9.1.2	Linearitätseigenschaft . . . . .	175
9.1.3	Tensorielles Produkt von Vektoren . . . . .	175
9.1.4	Projektion als lineare Abbildung . . . . .	176
9.2	Tensor 2. Stufe in kartesischer Basis . . . . .	177
9.2.1	Darstellung der Abbildung durch einen Tensor . . . . .	177
9.2.2	Tensordarstellung und Komponenten . . . . .	178
9.3	Tensor 2. Stufe in reziproken Basissystemen . . . . .	179
9.3.1	Tensordarstellung in Summenform . . . . .	179
9.3.2	Tensorraum . . . . .	180
9.3.3	Tensorzerlegung . . . . .	180
9.3.4	Tensordarstellung in Matrixform . . . . .	181
9.3.5	Komponentenmatrizen . . . . .	182
9.3.6	Systemvektoren der Koordinaten . . . . .	182
9.3.7	Tensorkomponenten bei doppeltem Skalarprodukt . . . . .	183
9.4	Tensorkomponenten bei gleicher Basis . . . . .	184
9.5	Tensorkomponenten bei Basiswechsel . . . . .	185
9.5.1	Transformation der Tensorkomponenten . . . . .	185
9.5.2	Tensorkomponenten bei starrer Drehung . . . . .	185
9.5.3	Allgemeine Transformationsregel . . . . .	186
9.6	Tabellen . . . . .	187

<b>10 Tensoren und ihre Produkte</b>	<b>190</b>
10.1 Klassifizierung von Tensoren . . . . .	190
10.1.1 Tensoren beliebiger Stufe . . . . .	190
10.1.2 Matrixdarstellung . . . . .	192
10.2 Verjüngung von Tensoren . . . . .	193
10.2.1 Zielsetzung . . . . .	193
10.2.2 Verjüngung beim Tensor 2. Stufe . . . . .	193
10.2.3 Verjüngung höherstufiger Tensoren . . . . .	194
10.3 Produktbildung bei Tensoren . . . . .	195
10.3.1 Tensorielles Produkt . . . . .	195
10.3.2 Skalarprodukte aus Tensor 2. Stufe und Vektor . . . . .	195
10.3.3 Doppeltes Skalarprodukt beim Tensor 2. Stufe . . . . .	197
10.3.4 Transponierter Tensor . . . . .	198
10.3.5 Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe . . . . .	199
10.4 Summationskonvention . . . . .	200
10.4.1 Begründung . . . . .	200
10.4.2 Vergleich und Bewertung . . . . .	201
10.5 Tabelle . . . . .	205
10.5.1 Hinweise zur Tabelle 10.1 . . . . .	205
10.5.2 Berechnungsbeispiele . . . . .	205
10.5.3 Systemvektoren . . . . .	205
Literaturangaben . . . . .	207
<b>11 Spezielle Tensoren</b>	<b>208</b>
11.1 Symmetrischer Tensor 2. Stufe . . . . .	208
11.1.1 Symmetrieeigenschaften der Komponenten . . . . .	208
11.1.2 Symmetrie der Tensorprodukte . . . . .	209
11.2 Einheitstensor oder Metriktensor . . . . .	210
11.2.1 Definierende Eigenschaft . . . . .	210
11.2.2 Komponenten des Einheitstensors . . . . .	210
11.2.3 Matrix- und Summenform . . . . .	211
11.2.4 Metriktensor bei Basiswechsel . . . . .	212
11.2.5 Überschiebung . . . . .	212
11.3 Alternierender Tensor 2. Stufe . . . . .	215
11.3.1 Eigenschaften der Komponenten . . . . .	215
11.3.2 Antisymmetrie der Tensorprodukte . . . . .	215
11.3.3 Tensorform des Kreuzproduktes . . . . .	216
11.4 Tensor-Merkmale und Eigenschaften . . . . .	218

11.4.1	Additive Tensorzerlegung	218
11.4.2	Dyaden	219
11.4.3	Verjüngung spezieller Tensoren	220
11.5	Tensor 3. Stufe	221
11.5.1	Summenform der Komponenten	221
11.5.2	Matrixdarstellung	221
11.5.3	Umrechnung der Komponenten	224
11.5.4	Komponenten bei Basiswechsel	226
11.6	Vollständige Tensoren gemäß Symmetrie	228
11.6.1	Definition	228
11.6.2	Vollständig symmetrischer Tensor 3. Stufe	228
11.6.3	Vollständig antisymmetrischer Tensor 3. Stufe	228
11.6.3.1	Transformation bei Basiswechsel	229
11.7	$\epsilon$ -Tensor	230
11.7.1	Definition gemäß Transformationsverhalten	230
11.7.2	Determinantenform der Tensorkomponenten	231
11.7.3	Räumliche Darstellung	231
11.7.4	Matrix- und Summenform des $\epsilon$ -Tensors	232
11.7.5	Skalarprodukte mit dem $\epsilon$ -Tensor	233
11.8	Tensorinterpretation von Vektorprodukten	234
11.8.1	Kreuzprodukt	234
11.8.2	Spatprodukt	236
11.8.3	Doppeltes Kreuzprodukt	236
11.8.4	Zusammenfassende Bewertung	237
11.9	KRONECKER-Tensor 6. Stufe	238
11.9.1	Definition und Komponenten	238
11.9.2	Verjüngungen des Kronecker-Tensors	239
	Literaturangaben	241
<b>12</b>	<b>Hauptachsentransformation symmetrischer Tensoren</b>	<b>242</b>
12.1	Zielsetzung und Bedingungen der Transformation	242
12.2	Durchführung der Transformation	245
12.2.1	Aufstellung der Gleichungssysteme	245
12.2.2	Charakteristische Gleichung und Eigenwerte	246
12.2.3	Bestimmung der Eigenvektoren	247
12.2.4	Orthogonale Transformationsmatrix	248
12.2.5	Berechnung der Eigenvektoren	249
12.2.6	Normierung der Eigenvektoren	250

12.2.7 Ebener Fall und MOHR'scher Kreis . . . . .	251
12.3 Invarianten bei Matrixtransformationen . . . . .	254
12.3.1 Charakteristische Größen einer Matrix . . . . .	254
12.3.2 Invarianten bei Ähnlichkeitstransformation . . . . .	255
12.3.3 Spektralverschiebung . . . . .	256
12.3.4 Matrixpotenzen . . . . .	257
12.3.5 Eigenwerte und Eigenvektoren bei Matrixpotenzen . . . . .	257
12.3.6 Deviator . . . . .	259
12.3.7 Tensorinvarianten . . . . .	259
12.3.8 Tensorprodukt bei Orthogonaltransformation . . . . .	260
12.4 Quadratische Formen . . . . .	261
12.4.1 Definition und Auftreten . . . . .	261
12.4.2 Klassifizierung . . . . .	262
12.5 Tensorflächen . . . . .	263
12.5.1 Erzeugung quadratischer Formen . . . . .	263
12.5.2 Hauptachsentransformation und Tensorellipsoid . . . . .	263
12.5.3 POINSOT'sche Konstruktion . . . . .	264
12.6 Beispiele für Hauptachsentransformationen . . . . .	267
12.6.1 $2 \times 2$ -Matrix . . . . .	267
12.6.2 $3 \times 3$ -Matrix, einfache Eigenwerte . . . . .	268
12.6.2.1 Erstes Beispiel . . . . .	268
12.6.2.2 Zweites Beispiel . . . . .	269
12.6.3 $3 \times 3$ -Matrix, zweifacher Eigenwert . . . . .	270
12.7 Tabellen . . . . .	272
Literaturangaben . . . . .	275
<b>IV Tensoranalysis</b>	<b>277</b>
<b>13 Allgemeine Funktionssysteme</b>	<b>279</b>
13.1 Eigenschaften eines Funktionssystems . . . . .	279
13.1.1 Definition des Funktionssatzes . . . . .	279
13.1.2 Totale Differentiale . . . . .	280
13.1.3 Funktionalmatrix, JACOBI-Matrix . . . . .	280
13.1.4 Funktionaldeterminante, JACOBI'sche Determinante . . . . .	281
13.1.5 Lineares Funktionssystem . . . . .	281
13.1.6 $n$ -dimensionale Volumenelemente . . . . .	282
13.2 Inverses Funktionssystem . . . . .	282

13.2.1 Inverser Funktionssatz und Argumenttausch . . . . .	282
13.2.2 Kettenregel und Multiplikationssatz . . . . .	283
13.3 TAYLOR'sche Formel . . . . .	284
Literaturangaben . . . . .	287
<b>14 Krummlinige Koordinatensysteme</b>	<b>288</b>
14.1 Einführung krummliniger Koordinaten . . . . .	288
14.2 Definition des Koordinatensystems . . . . .	289
14.3 Funktionalmatrix . . . . .	291
14.4 Grundgrößen von Koordinatensystemen . . . . .	291
14.4.1 Ortsvektor und kovariante Grundvektoren . . . . .	291
14.4.2 Wegelement als kontravarianter Vektor . . . . .	293
14.4.3 Differentielles Abstandsquadrat . . . . .	294
14.4.4 Wegelement in einer Koordinatenfläche . . . . .	295
14.4.5 Reziproke, kontravariante Basisvektoren . . . . .	297
14.4.6 Beziehungen der Funktionalmatrizen . . . . .	298
14.4.7 Darstellung der Basisvektoren . . . . .	298
14.5 Metrik des Raumes . . . . .	299
14.5.1 Metrikoeffizienten und Klassifizierung . . . . .	299
14.5.2 Metrikmatrizen und Metriktensor . . . . .	299
14.5.3 Winkel zwischen Wegelementen . . . . .	301
14.6 Produkte und geometrische Größen . . . . .	302
14.6.1 Spatprodukt der kovarianten Grundvektoren . . . . .	302
14.6.2 Kreuzprodukte der Basisvektoren . . . . .	302
14.6.3 Flächen- und Volumenelemente . . . . .	303
14.6.4 Darstellung des Ortsvektors . . . . .	305
14.7 Beispiele krummliniger Koordinatensysteme . . . . .	307
14.7.1 Wendelkoordinaten . . . . .	307
14.7.2 Astroidkoordinaten . . . . .	309
Literaturangaben . . . . .	312
<b>15 Transformation der Komponenten</b>	<b>313</b>
15.1 Transformationen bei gleicher Basis . . . . .	313
15.2 Transformationen bei Basiswechsel . . . . .	314
15.2.1 Neues Koordinatensystem . . . . .	314
15.2.2 Umrechnung von Basisvektoren und Metrikmatrizen .	315
15.2.3 Umrechnung von Vektor- und Tensorkomponenten .	316
15.2.4 Kontragrediente Transformation . . . . .	317

15.2.5	Gegenüberstellung der Transformationen . . . . .	318
15.3	Tabellen . . . . .	319
	Literaturangaben . . . . .	321
<b>16</b>	<b>Ableitung krummliniger Grundvektoren</b>	<b>322</b>
16.1	Darstellung der Grundvektoren und ihrer Änderungen . . . . .	322
16.2	Ableitung nach kovarianten Koordinaten . . . . .	324
16.2.1	Schreibweise für die Ableitung . . . . .	324
16.2.2	Durchführung der Ableitung der Grundvektoren . . . . .	324
16.3	CHRISTOFFEL-Symbole . . . . .	326
16.3.1	Zerlegung der Grundvektor-Ableitungen . . . . .	326
16.3.2	Geometrische Bedeutung der CHRISTOFFEL-Symbole .	327
16.3.3	Ableitung der kontravarianten Basisvektoren . . . . .	327
16.3.4	Ableitung der Metrikmatrizen . . . . .	328
16.3.5	Totales Differential der Grundvektoren . . . . .	329
16.3.6	Charakter der Grundvektoren und ihrer Ableitungen .	329
16.4	Matrizen der CHRISTOFFEL-Symbole . . . . .	330
16.4.1	Darstellung und Symmetrie d. CHRISTOFFEL-Symbole	330
16.4.2	CHRISTOFFEL-Matrizen . . . . .	331
16.4.3	H-Matrix . . . . .	332
16.4.4	L-Symbole und L-Matrix . . . . .	333
16.4.5	Berechnung der CHRISTOFFEL-Symbole . . . . .	334
16.5	Spezielle Koordinatensysteme . . . . .	335
16.5.1	CHRISTOFFEL-Symbole in geradlinigen Systemen .	335
16.5.2	CHRISTOFFEL-Symbole in ebenen Systemen . . . . .	336
16.5.3	CHRISTOFFEL-Symbole in orthogonalen Systemen .	336
16.6	CHRISTOFFEL-Symbole bei Basiswechsel . . . . .	338
16.7	Beispiele für CHRISTOFFEL-Symbole . . . . .	340
16.7.1	CHRISTOFFEL-Symbole und H-Matrix . . . . .	340
16.7.2	Wendelkoordinaten . . . . .	340
16.7.3	Astroidkoordinaten . . . . .	342
	Literaturangaben . . . . .	344
<b>17</b>	<b>Differentialoperationen</b>	<b>345</b>
17.1	Gradient skalarer Ortsfunktionen . . . . .	346
17.1.1	Totales Differential als Skalarprodukt . . . . .	346
17.1.2	Gradient und Nabla als kovariante Vektoren . . . . .	346
17.1.3	Deutung des Gradienten, Niveaupläne und Feldlinien	348

17.1.4	Deutung der kontravarianten Basisvektoren . . . . .	351
17.1.5	Skalare Ortsfunktion bei Basiswechsel . . . . .	352
17.2	Ableitung von Vektoren und Tensoren . . . . .	353
17.2.1	Partielle Ableitung der Vektorkomponenten . . . . .	353
17.2.2	Partielle Ableitung von Vektoren, Vektorableitung . .	353
17.2.3	Kovariante Ableitung von Vektoren . . . . .	354
17.2.4	Transformation der kovarianten Ableitungen . . . . .	356
17.2.5	Kovarianzmatrizen . . . . .	357
17.2.6	Totales Differential und absolute Differentiale . . . .	358
17.2.7	Zweite Vektorableitung . . . . .	359
17.2.8	Kovariante Ableitung von Tensoren, Tensorableitung .	360
17.2.9	Ableitung des Metriktensors, Lemma von RICCI . . .	362
17.2.10	Produktregel der kovarianten Ableitung . . . . .	363
17.2.11	Kovariante Ableitung bei Basiswechsel . . . . .	364
17.2.12	Überblick über die Ableitungen . . . . .	365
17.3	Produkte mit Nabla-Vektor . . . . .	367
17.3.1	Zielsetzung . . . . .	367
17.3.2	Vektorgradient, Tensor der kovarianten Ableitungen	367
17.3.3	Vektorgradient der Basisvektoren . . . . .	369
17.3.4	Gradient von Tensoren 2. Stufe, Tensorgradient . . .	370
17.3.5	Der skalare Operator ( $a \cdot \mathbf{grad}$ ) . . . . .	372
17.3.6	Gradientenbildung und Richtungsableitung . . . . .	373
17.3.7	Divergenz von Vektoren . . . . .	375
17.3.8	Divergenz von Tensoren 2. Stufe . . . . .	377
17.3.9	Rotation von Vektoren . . . . .	378
17.3.10	Rotation von Tensoren 2. Stufe . . . . .	380
17.3.11	Differentialoperationen des Metriktensors . . . . .	381
17.4	Zusammengesetzte Argumente . . . . .	381
17.4.1	Gradient von Produkten . . . . .	382
17.4.2	Divergenz von Produkten . . . . .	382
17.4.3	Rotation von Produkten . . . . .	383
17.5	Mehrfachprodukte mit Nabla-Vektor . . . . .	384
17.5.1	Zweistufiger Ableitungstensor . . . . .	384
17.5.2	Identisch verschwindende Produkte . . . . .	384
17.5.3	LAPLACE-Operator . . . . .	385
17.5.4	Vektor-LAPLACE-Operator . . . . .	386
17.6	HELMHOLTZ-Theorem . . . . .	387

17.7	Beziehungen für den Abstandsvektor . . . . .	389
17.7.1	Bedeutung des Abstandsvektors . . . . .	389
17.7.2	Ableitungen nach verschiedenen Koordinaten . . . . .	390
17.7.3	Reihenentwicklung des reziproken Abstands . . . . .	391
17.7.4	Differentialoperationen für den Abstandsvektor . . . . .	393
17.8	Beispiele für Basisvektoren . . . . .	397
17.8.1	Zylinderkoordinaten im ebenen Bild . . . . .	397
17.8.2	Astroidkoordinaten im ebenen Bild . . . . .	398
17.9	Tabellen . . . . .	399
	Literaturangaben . . . . .	401
<b>18</b>	<b>Orthogonale Koordinatensysteme</b>	<b>403</b>
18.1	Krummlinige orthogonale Koordinaten . . . . .	403
18.1.1	Bedeutung . . . . .	403
18.1.2	Grundlegende Eigenschaften . . . . .	404
18.1.3	Metrische Faktoren und Wegelement, Flächen- und Volumenelemente . . . . .	406
18.1.4	Umrechnung von Einheitsvektoren und Komponenten	407
18.1.5	Prüfung auf Rechtssystem . . . . .	408
18.2	Ableitung der Einheitsvektoren . . . . .	409
18.2.1	CHRISTOFFEL-Symbole in orthogonalen Systemen . .	409
18.2.2	Durchführung der Ableitung und zugehörige Matrizen	411
18.3	Vektor- und Tensorkomponenten . . . . .	414
18.3.1	Darstellung physikalischer Komponenten . . . . .	414
18.3.2	Ableitung der Komponenten . . . . .	416
18.3.3	Vektor- und Tensorableitung . . . . .	417
18.4	Differentialoperationen . . . . .	418
18.4.1	Basisvektoren und Maßstäbe . . . . .	418
18.4.2	Gradient in orthogonalen Koordinaten . . . . .	418
18.4.3	Divergenz in orthogonalen Koordinaten . . . . .	418
18.4.4	Rotation in orthogonalen Koordinaten . . . . .	420
18.4.5	LAPLACE-Operator in orthogonalen Koordinaten . .	421
18.5	Beispiele von Koordinatensystemen . . . . .	422
18.5.1	Kartesische Koordinaten . . . . .	422
18.5.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	426
18.5.3	Kugelkoordinaten . . . . .	429
18.5.4	Gegenseitige Darstellung der Koordinatensysteme . .	432
18.5.5	Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids .	433

Literaturangaben . . . . .	438
<b>19 Integralsätze und zeitabhängige Felder</b>	<b>439</b>
19.1 Grundlegende Integralsätze . . . . .	439
19.1.1 Fluss von Feldern und GAUSS'scher Satz . . . . .	439
19.1.2 Zirkulation eines Feldes und STOKES'scher Satz . . . . .	441
19.1.3 Anschauliche Darstellung von Quellen und Wirbeln . .	443
19.1.3.1 Beispiele für Einheitsvektoren . . . . .	444
19.2 Abgeleitete Integralsätze . . . . .	445
19.2.1 Sonderfälle des GAUSS'schen Satzes . . . . .	445
19.2.2 Divergenz-Theorem für Tensoren 2. Stufe . . . . .	445
19.2.3 Sonderfälle des STOKES'schen Satzes . . . . .	447
19.2.4 STOKES-Theorem für Tensoren 2. Stufe . . . . .	448
19.2.5 GREEN'sche Sätze für Skalarfelder . . . . .	449
19.2.6 STRATTION'sche Sätze für Vektorfelder . . . . .	449
19.2.7 Differentialoperatoren in Integralen . . . . .	450
19.3 Zeitableitung von Feldgrößen . . . . .	451
19.3.1 Totale Ableitung einer Skalarfunktion nach der Zeit .	451
19.3.2 Totale Ableitung einer Vektorfunktion nach der Zeit .	451
19.3.3 EULER'sche Differentiationsregel . . . . .	452
19.4 Zeitliche Ableitung von Integralen . . . . .	453
19.4.1 Aufgabenstellung . . . . .	453
19.4.2 Volumenintegral einer skalaren Funktion . . . . .	454
19.4.3 Flächenintegral einer vektoriellen Funktion . . . . .	455
19.4.4 Konturintegral einer vektoriellen Funktion . . . . .	458
Literaturangaben . . . . .	460
<b>Anhang</b>	<b>461</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>463</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>465</b>
<b>Personenverzeichnis</b>	<b>466</b>
<b>Personenbezogene Begriffe</b>	<b>467</b>
<b>Gesamtverzeichnis der Bücher</b>	<b>469</b>

<b>Sachverzeichnis</b>	<b>491</b>
------------------------	------------

# Teil I

# Grundlagen



# Kapitel 1

## Einführung

Die physikalische Beschreibung der Natur und der darin auftretenden Phänomene erfordert für konkrete, quantitative Aussagen die Mathematik und ihre Begriffsbildungen, wenn man über eine rein deskriptive oder qualitative Darstellung hinauskommen will. Diese Erkenntnis wurde bereits vor vierhundert Jahren von Galileo GALILEI sinngemäß ausgesprochen, denn das „*große Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik und Geometrie geschrieben*“, (Il Saggiatore, 1623).

Das Thema des zweibändigen Gesamtwerkes ist die **Tensorrechnung** als ein Gebiet der angewandten Mathematik, das die Vektorrechnung umfasst und verallgemeinert und in nahezu allen Teilen der Physik unverzichtbar ist für Darstellung und Beschreibung der beobachtbaren Phänomene. Wenn in diesem Buch von Tensorrechnung oder Tensorkalkül die Rede ist, wird immer auch implizit die „normale“ Vektorrechnung als spezieller Fall darunter verstanden und eingeschlossen, die den natürlichen Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet.

Im **ersten Band** werden die algebraischen und analytischen Eigenschaften von Vektoren und Tensoren behandelt und im **zweiten Band** wird das Auftreten dieser Größen in mathematischen und vornehmlich physikalischen Fachgebieten untersucht.

Tensoren sind als höherrangige Größen zur Beschreibung einer Reihe physikalischer Phänomene erforderlich, bei denen eine skalare oder vektorielle Darstellung weder angemessen noch ausreichend ist, wie bei der Abbildung von Vektoren durch Operatoren, bei Spannungszuständen in verformbaren Materialien oder anisotropen Eigenschaften der Materie.

Die hier vorgelegte Behandlung der Tensorrechnung unterscheidet grundsätzlich in Darstellung und Schreibweise zwischen Vektoren und Tensoren als invariante physikalische Größen selbst sowie ihrer Zerlegung in Komponenten in Koordinatensystemen.

Als Alternative zur bisherigen in der Literatur weit verbreiteten Indexschreibweise werden zur Darstellung der Komponenten von Vektoren und Tensoren **Matrizen** verwendet, mit denen alle Transformationen von Koordinaten, Komponenten und Basisvektoren einfach beschrieben werden können und die bei den vielfach auftretenden Transformationen einen klaren Überblick gewährleisten.

Das vorliegende Werk richtet sich an zwei **Gruppen von Lesern**. Die eine Zielgruppe sind Studenten höherer Semester aus Physik und Ingenieurwissenschaften, denen beide Bücher neben den Vorlesungen begleitend zur Verfügung stehen sollen. Die andere Zielgruppe stellen Ingenieure und Naturwissenschaftler dar, die in ihrer beruflichen Praxis die tensorielle Verallgemeinerung physikalischer Größen, ihre mathematische Behandlung sowie deren Anwendung und Auftreten benötigen oder kennenlernen wollen.

Verschiedene mathematische Themenbereiche werden entweder als bekannt vorausgesetzt wie Analysis mit Differential- und Integralrechnung oder werden wie bei der Matrizenrechnung im Sinne einer kurz gehaltenen Einführung nur gestreift und durch bestimmte Beziehungen ergänzt, wobei strenge Beweisführungen und mathematische Ableitungen unterbleiben, die man entsprechenden Lehrbüchern entnehmen kann.

Der Leser wird bei allen Kapiteln selbst entscheiden, was er schon kennt und überspringen kann, ob er Neues findet oder etwas wiederholen will!

An vielen Stellen, speziell im *Abschnitt 2.3* und im zweiten Band, werden die **Einheiten** der auftretenden physikalischen Größen angegeben, einerseits um Verständnis und Interpretation der Gleichungen zu unterstützen, andererseits um bei Bedarf Dimensionskontrollen durchzuführen.

Bis auf wenige Ausnahmen werden alle physikalischen Größen im **Internationalen Einheitensystem SI** (*Système international d'unités*) angegeben, das in den 1960er Jahren verabschiedet wurde und seither in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft als verbindlich anzusehen ist. Ab Mai 2019 tritt eine neue Definition in Kraft, um alle sieben **SI-Basiseinheiten** auf fundamentale physikalische Konstanten (**Naturkonstanten**) zurückzuführen.

ren, wodurch vorhandene Abhängigkeiten von veränderlichen Größen beseitigt werden, [19].

Dennoch gibt es in Teilgebieten der Physik einzelne, aus historischen oder praktischen Gründen beibehaltene **nichtkompatible Einheiten**, auf die speziell hingewiesen wird. Auch neuere Bücher verwenden mitunter eine Darstellung im veralteten cgs-System, in dem z.B. die MAXWELL'schen Gleichungen in anderer Gestalt erscheinen. Dagegen hat Arnold SOMMERFELD als einer der berühmten theoretischen Physiker bereits 1948 in seinem mehrbändigen Lehrbuch über *Optik* [13, S. 7] und *Elektrodynamik*, [14, S. 40f.], das *rationelle* oder *physikalische System* und seinen Vorzug klar begründet und verwendet, das später zum SI-System weiterentwickelt wurde.

Eine besondere Stellung nimmt das hier aus prinzipiellen Gründen nicht verwendete *natürliche Einheitensystem* ein, das in der Relativitätstheorie mit der Absicht eingeführt wurde, um Beziehungen einfacher oder einheitlicher zu gestalten. Dabei wird die Lichtgeschwindigkeit  $c$  auf Eins normiert, wodurch Dimensionskontrollen von Gleichungen, die aber für Ingenieure und viele andere Wissenschaftler unverzichtbar sind, unmöglich werden und die physikalische Realität zu einem Zweig der Mathematik mit reiner Strukturuntersuchung wird!

Bei der Behandlung der einzelnen Themengebiete steht zweifellos die mathematische Darstellung im Vordergrund, die zur exakten Beschreibung notwendig und unverzichtbar ist. Für den Leser bedeutet es, dass die Erkenntnis beim Weg durch die einzelnen Kapitel mit Ausdauer und manchmal auch mit Anstrengung erreicht werden kann.

Um den Fließtext zu strukturieren und Textstellen leichter auffindbar zu machen, erscheinen wichtige Begriffe, die auch im Sachverzeichnis aufgeführt sind, sowie bedeutsame Aussagen in **Fettdruck** und in speziellen Fällen auch in *kursiver Schrift*.

Viele Formeln, die einen gewissen Abschluss eines Gedankenganges bilden und Zwischenziele oder Endergebnisse darstellen, sind mit **Rahmen** versehen. Das dient der Strukturierung des Rechenganges und der größeren Übersicht beim Auffinden von Ergebnissen sowie der Nummerierung von Gleichungen für spätere Verweise. In aller Regel sind die zahlreichen **Verweise** rückwärtsgerichtet, wodurch der aufbauende Charakter der Darlegungen und Entwicklungen betont wird. Nur in sehr wenigen, aber manchmal unvermeidbaren Fällen wird dagegen auf ein erst später erscheinendes Er-

gebnis verwiesen, das zwar benötigt wird, aber aus bestimmten Gründen im aktuellen Zusammenhang nicht dargelegt werden kann.

Als **Themenbereiche** werden im vorliegenden ersten Band des Gesamtwerkes Algebra und Analysis von Vektoren und Tensoren als eigenständige Fachdisziplinen behandelt. Daran schließen sich Darstellungen der Differentialoperationen und Integralsätze an, die speziell im Hinblick auf die Beschreibung physikalischer Zusammenhänge im zweiten Band entwickelt werden.

Die Tensorrechnung, auch **Tensorkalkül** genannt, geht nach Vorarbeiten von GAUSS, RIEMANN und anderen auf dem Gebiet der Differentialgeometrie auf die Untersuchungen der beiden italienischen Mathematiker **Gregorio RICCI-CURBASTRO** (1853-1925) und **Tullio LEVI-CIVITA** (1873-1941) um das Jahr 1900 zurück, die deshalb zunächst als **RICCI-Kalkül** bezeichnet wurde. Verallgemeinernd lassen sich alle physikalischen Größen, also auch Skalare und Vektoren, als Tensoren unterschiedlicher Stufen ansehen und der axiale Vektor des Kreuzproduktes kann als spezieller Tensor gedeutet werden.

Dem Tensorkalkül eigentümlich und eine wesentliche Art der Darstellung ist die gleichzeitige Verwendung von **zwei Bezugssystemen**, die einen speziellen, reziproken Zusammenhang besitzen. Man nennt sie die ko- und kontravarianten Koordinaten-, Grund- oder Basissysteme, in denen Tensoren entsprechende ko- und kontravariante, sowie gemischte Komponenten besitzen. Durch die gemeinsame Verwendung beider Basissysteme und der zugehörigen Komponenten lassen sich viele Beziehungen einfach und übersichtlich formulieren. Zweck und Namensgebung der Systeme werden in ihrer Bedeutung während der Entwicklung des Tensorkalküls, das die Vektorrechnung als Sonderfall umfasst, verständlich.

Charakteristisch und ein wesentlicher Bestandteil des Tensorkalküls sind die verschiedenen Komponentendarstellungen und ihre Umrechnung bei Basiswechsel mit zugehöriger Indizierung und Vielfachsummationen je nach Stufenzahl der Tensoren, die die Formelnotierung aufwendig machen. **Albert EINSTEIN**, dessen Allgemeine Relativitätstheorie auf dem RICCI-Kalkül beruhte, führte deshalb eine **Summationskonvention** ein, durch die das Notieren der Summenzeichen unterdrückt wird, um von Schreibarbeit zu entlasten. Nach seiner eigenen Aussage sei das seine größte Erfindung in der Mathematik gewesen!

Diese Art der abgekürzten Schreibweise findet man nahezu durchgängig in der gesamten Tensorliteratur, wodurch die Lesbarkeit vieler Beziehungen und speziell der Transformationsrelationen mit unterer und oberer Mehrfachindizierung der verschiedenen Komponenten bei Wechsel der Koordinatensysteme erleichtert werden soll, dem Autor dagegen als unübersichtlich und schwerer verständlich erscheint, was auch in [16, S. 151] aus didaktischen Gründen vermieden wird. Darstellung und Kritik der Summationskonvention werden im *Abschnitt 10.4* noch näher betrachtet.

Ein neueres Buch zur Allgemeinen Relativitätstheorie, [9], die im zweiten Band behandelt wird und deren Feldgleichungen nur mit Tensoren dargestellt werden können, verzichtet kommentarlos auf die Summationskonvention. Dieses hervorragende und gut verständliche Buch der Open University richtet sich speziell an Studenten im Fern- oder Selbststudium und das Autorenteam erachtete es offenbar als pädagogisch und didaktisch sinnvoller, alle Summen ausführlich darzustellen, um dadurch den Überblick über die vielfach auftretenden Indizes und ihre Laufweite zu wahren.

Durch die **Verwendung von Matrizen** können Vektor- und Tensorkomponenten und ihre Umrechnungen bei Basiswechsel sehr klar, übersichtlich und leicht verständlich dargestellt werden, weil man sofort erkennt, wo Transformationsmatrizen in transponierter oder inverser Form auftreten oder sich in Produkten ggf. zur Einheitsmatrix kompensieren. Die Ergebnisse der zahlreichen Umrechnungen von Basisvektoren und Komponenten sind zusätzlich in einer Reihe von **Tabellen** mit den entsprechenden Matrixrelationen zusammengefasst, die als eine Art Formelsammlung anzusehen sind.

Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren werden durch eine bestimmte Indizierung formalisiert, wobei ein **spezielles Symbol** (#) als unterer oder oberer **Laufindex** zur Kennzeichnung von ko- und kontravarianten Elementen verwendet wird. Die durchgängige Matrixschreibweise stellt einen erheblichen Vorteil gegenüber der üblichen, aber oft schwer zu überblickenden Indexschreibweise dar. Das gilt speziell bei den für die Tensorrechnung wesentlichen Transformationseigenschaften bei Basiswechsel, wodurch dieser Kalkül gewöhnlich als schwierig gilt und von vielen Ingenieuren und Naturwissenschaftlern nicht beherrscht wird.

In der vorliegenden Darstellung der Tensorrechnung mit Matrizen ist die **Summationskonvention nicht erforderlich**, da ja die Produktbildung der Matrizenrechnung die Summation als wesentliche Eigenschaft implizit enthält!