

Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte
Ideen und
Geschichten von
Pythagoras bis Peano

SACHBUCH



Springer

Mathematik – einfach genial!

Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten
von Pythagoras bis Peano

2., erweiterte Auflage



Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-71415-7

ISBN 978-3-662-71416-4 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-71416-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <https://portal.dnb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2020, 2025

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jede Person benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des/der jeweiligen Zeicheninhaber*in sind zu beachten.

Der Verlag, die Autor*innen und die Herausgeber*innen gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autor*innen oder die Herausgeber*innen übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Einbandabbildung: nach Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Wenn Sie dieses Produkt entsorgen, geben Sie das Papier bitte zum Recycling.

Vorwort zur 1. Auflage

Wer sich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigt, mit den vielen Ideen, die im Laufe der Jahrhunderte entwickelt wurden, der kommt aus dem Staunen nicht heraus – da kann man nur feststellen: „Einfach genial!“

Und es gibt auch eine Reihe von genialen Ansätzen, die von der Nachwelt regelrecht vergessen wurden – die Universalgelehrten aus dem islamischen Kulturkreis etwa sind in Europa kaum noch bekannt, obwohl sie wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Mathematik geleistet haben.

In dem vorliegenden Buch werden einige dieser bemerkenswerten genialen Ideen dargestellt. Ausgewählt habe ich 18 Themen, die mithilfe zahlreicher farbiger Abbildungen anschaulich entwickelt und durch möglichst einfache Beispiele verdeutlicht werden. Manche der Ideen haben eine Vorgeschichte, auf die ich zunächst eingehe – so wird noch klarer, welcher Fortschritt durch diese Idee erreicht wurde.

Die Menschen hinter diesen Ideen haben in ihrer jeweiligen Zeit gelebt, und oft wurden ihre Schicksale von dramatischen historischen Veränderungen beeinflusst. Daher war es naheliegend, auch die Lebensgeschichten dieser Personen zu erzählen – so, wie ich es seit 2006 jeden Monat im *Mathematischen Monatskalender* versuche (Überblick auf www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/).

Die meisten hatten nicht nur eine einzige geniale Idee. Bei diesen finden Sie im jeweiligen Kapitel einen dritten Abschnitt, in dem beschrieben wird, mit welchen Themen sich diese Gelehrten auch noch beschäftigt haben. In manchen Fällen (Archimedes, Fermat, Euler, Lagrange) ist dies umfangreich und kann – insbesondere bei Leonhard Euler – nur andeuten, wie außergewöhnlich diese Mathematiker waren.

Die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches geben Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie in der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertrffen; daher wurden auch diese Quellen genannt. An etlichen Stellen ergaben sich Querverweise zu meinen ebenfalls im Springer-Verlag erschienenen Büchern *Mathematik ist schön*, *Mathematik ist wunderschön* und *Mathematik ist wunderwunderschön*. Außerdem enthalten die Literaturhinweise auch jeweils

konkrete Angaben über die *Spektrum-Kalenderblätter* sowie ggf. auch über Beiträge im *MNU Journal*, wo ich einige der genialen Ideen (in Kurzfassung) beschrieben hatte.

Der gewählte Aufbau – und natürlich der vorgegebene Gesamtumfang des Buches – haben dazu geführt, dass es *nur* 18 geniale Ideen sind, die hier vorgestellt werden können. Mir war es sehr wichtig, über mehr zu berichten als nur über die einzelnen Ideen. Ich hoffe, es wird deutlich, wie spannend es sein kann, sich mit dem Schicksal der ausgewählten Personen zu beschäftigen, das oft durch besondere historische Ereignisse mitgeprägt wurde.

Die Auswahl der genialen Ideen mag willkürlich erscheinen. Keinesfalls erhebe ich den Anspruch, dass alle Epochen und alle Länder (Kulturen) *repräsentativ* vertreten sind. Die Resonanz auf dieses Buch wird zeigen, ob es eine weitere Gelegenheit geben wird, beispielsweise auch über geniale Ideen von Mathematikerinnen und über indische und chinesische Mathematiker zu berichten. Weitere geniale Ideen wie beispielsweise der euklidische Algorithmus, diophantische Gleichungen, Faulhaber'sche Formeln usw. bieten sich an.

Die Kapitel dieses Buches sind weitgehend unabhängig voneinander lesbar – wo es sinnvoll ist, werden Bezüge zu anderen Kapiteln aufgezeigt.

Die Themen sind durchweg mit schulischem Vorwissen aus der Ober- oder Mittelstufe nachvollziehbar; in diesem Buch werden also keine mathematischen Theorien entwickelt, die deutlich über das an der Schule erreichbare Niveau hinausgehen. Daher empfiehlt sich das Buch für alle, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, und ist beispielsweise auch für Arbeitsgemeinschaften an Schulen und als Anregung für Facharbeiten geeignet.

Vorwort zur 2. Auflage

In der Zwischenzeit konnte ich in den beiden Büchern

- *Geschichten aus der Mathematik – Indien, China und das europäische Erwachen* (2023)
- *Verkannt, verfemt, vergessen – Geschichten aus der europäischen Mathematik der Neuzeit* (2024)

auf eine Reihe von weiteren genialen Ideen eingehen, dabei auch die besonderen Beiträge von indischen und chinesischen Mathematikern sowie von Mathematikerinnen berücksichtigen.

Ich bin dem Verlag dankbar, dass ich nunmehr für die vorliegende zweite Auflage des Buches die 18 genialen Ideen der ersten Auflage um drei weitere ergänzen kann. Die Kapitel des Buches sind unabhängig voneinander lesbar; daher ließ es sich aus technischen Gründen nicht vermeiden, dass geringfügige Dopplungen vorkommen.

Da der italienische Mathematiker Giuseppe Peano nach Georg Cantor geboren wurde, wurde der Untertitel des vorliegenden Buches angepasst:

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Peano

Auch diesmal bedanke ich mich herzlich bei allen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung unterstützt haben:

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich auch diesmal wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei meinem Sohn Andreas, der auch die drei zusätzlichen Porträts der ausgewählten Mathematiker im Stile des *Urban Sketching* zeichnete (<https://kunst-a-s.jimdoweb.com/>), sowie
- bei Wilfried Herget, dessen hilfreiche Formulierungsvorschläge wesentlich zur besseren Lesbarkeit meiner Texte beigetragen haben,

und nicht zuletzt bei Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer-Verlag, die dieses Buch ermöglichten.

Inhaltsverzeichnis

1 Pythagoras von Samos – Sektenführer und Philosoph	1
1.1 Einfach genial: Pythagoreische Zahlenmuster	3
1.1.1 Dreieckszahlen	4
1.1.2 Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen	10
1.1.3 Winkelhaken	12
1.1.4 Pythagoreische Zahlentripel	14
1.2 Wer war Pythagoras? Wer waren die Pythagoreer?	17
1.3 Weitere pythagoreische Zahlenmuster	20
1.4 Literaturhinweise	21
2 Archimedes von Syrakus – Mathematiker, Physiker und Ingenieur	23
2.1 Einfach genial: Archimedes bestimmt den Flächeninhalt eines Parabelsegments	24
2.2 Wer war Archimedes?	30
2.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Archimedes außerdem?	35
2.3.1 Über die Methode	36
2.3.2 Über das Gleichgewicht ebener Flächen	36
2.3.3 Kreismessung	38
2.3.4 Über Spiralen	41
2.3.5 Über Kugel und Zylinder	44
2.3.6 Archimedisches Axiom	47
2.3.7 Stomachion	48
2.3.8 Sandrechner	48
2.3.9 Das Buch der Lemmata	49
2.3.10 Über regelmäßige Körper	54
2.4 Literaturhinweise	55

3 Diophant von Alexandria – virtuose Anfänge von Algebra und Zahlentheorie	57
3.1 Hinweise zu den von Diophant verwendeten Bezeichnungen	58
3.2 Einfach genial – Diophant löst Gleichungen mit großer Virtuosität	60
3.3 Wer war Diophant von Alexandria?	73
3.4 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Diophant außerdem?	74
3.5 Die Wiederentdeckung der Schriften Diophants	76
3.6 Literaturhinweise	79
4 Muhammed al-Khwarizmi – Vater der Algebra	81
4.1 Einfach genial: al-Khwarizmis Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen	83
4.1.1 Lösung des Aufgabentyps „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen“	83
4.1.2 Lösung des Aufgabentyps „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln“	86
4.1.3 Lösung des Aufgabentyps „Quadrate sind gleich Wurzeln und Zahlen“	90
4.2 Wer war al-Khwarizmi?	93
4.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Khwarizmi außerdem?	94
4.4 Literaturhinweise	95
5 Thabit ibn Qurra – genialer Übersetzer und kreativer Mathematiker	97
5.1 Einfach genial: Thabit ibn Qurras Methode der Flächenbestimmung bei einer Parabel	98
5.2 Wer war Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani?	106
5.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Thabit ibn Qurra außerdem?	107
5.3.1 Thabits Regel für <i>befreundete</i> Zahlen	108
5.3.2 Drei Beweise und eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras	114
5.3.3 Lösung des Kreisproblems	117
5.4 Literaturhinweise	118
6 Ali al-Hasan Ibn al-Haitham – Vater der Optik	119
6.1 Einfach genial: Ibn al-Haitham leitet eine Summenformel für Quadratzahlen her	120
6.2 Wer war Ibn al-Haitham?	123
6.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Haitham außerdem?	124
6.4 Literaturhinweise	128

7 Abu Arrayhan al-Biruni – Universalgelehrter aus Afghanistan	131
7.1 Einfach genial: Abu Arrayhan al-Biruni bestimmt den Erdradius	132
7.1.1 Bestimmung des Erdradius durch Eratosthenes	132
7.1.2 Messungen und Rechnungen zur Bestimmung einer Berghöhe	134
7.1.3 Messungen und Rechnungen zur Bestimmung des Erdradius	135
7.1.4 Ergebnis der Messungen und Berechnungen al-Birunis	137
7.2 Wer war al-Biruni?	138
7.3 Mit welchen Themen beschäftigte sich al-Biruni außerdem?	139
7.4 Literaturhinweise	142
8 Omar Khayyam – Mathematiker, Philosoph und Dichter	143
8.1 Einfach genial: Omar Khayyams geometrische Methode zur Lösung kubischer Gleichungen	144
8.1.1 Die 25 möglichen Typen von Gleichungen maximal 3. Grades	145
8.1.2 Lösungen der verschiedenen Gleichungstypen	147
8.2 Wer war Omar Khayyam?	154
8.3 Vierzeiler von Omar Khayyam	157
8.4 Literaturhinweise	159
9 Jamshid al-Kashi – letzter bedeutender Mathematiker des islamischen Mittelalters	161
9.1 Einfach genial: Jamshid al-Kashi bestimmt $\sin(1^\circ)$ auf 18 Stellen genau	163
9.2 Wer war al-Kashi?	166
9.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Kashi außerdem?	167
9.4 Literaturhinweise	172
10 Niccolò Tartaglia und Girolamo Cardano – wem gebührt die Ehre?	175
10.1 Einfach genial: Niccolò Tartaglia entwickelt ein Lösungsverfahren für eine kubische Gleichung	177
10.1.1 Lösung der speziellen Gleichung $x^3 + 6x = 20$	178
10.1.2 Lösung der allgemeinen Gleichung $x^3 + bx = c$	179
10.1.3 Lösung der anderen Gleichungstypen	180
10.2 Wer waren Girolamo Cardano und Niccolò Tartaglia?	182
10.2.1 Cardanos erste Lebensjahre	182
10.2.2 Tartaglias erste Lebensjahre	184
10.2.3 Cardano nimmt Kontakt zu Tartaglia auf	185
10.2.4 Das Ende der dramatischen Geschichte	186
10.3 Literaturhinweise	187

11 John Napier – Meister des Rechnens	189
11.1 Einfach genial: John Napier erfindet seine Logarithmen	190
11.1.1 Vordenker Michael Stifel	190
11.1.2 Napier's Logarithmen	192
11.1.3 Rechnen mit Napier's Logarithmen	194
11.1.4 Die dekadischen Logarithmen des Henry Briggs	196
11.1.5 Anwendung der Logarithmengesetze	200
11.2 Wer war John Napier?	202
11.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Napier außerdem?	203
11.3.1 Die Napier'schen Rechenstäbe	204
11.3.2 Der Napier'sche Schachbrett-Rechner	206
11.3.3 Die Napier'schen Regeln	208
11.4 Entwicklung besonderer Rechenmethoden um das Jahr 1600	209
11.4.1 Die Methode der Prosthaphaeresis	209
11.4.2 Jost Bürgis <i>Progress Tabulen</i>	211
11.4.3 Verbreitung der Logarithmenrechnung	212
11.5 Literaturhinweise	215
12 René Descartes – Begründer der Analytischen Geometrie	217
12.1 Einfach genial: René Descartes entdeckt eine Vorzeichenregel für Polynome	218
12.2 Wer war René Descartes?	222
12.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Descartes außerdem?	225
12.3.1 Das kartesische Blatt	225
12.3.2 Der Descartes'sche Vier-Kreise-Satz	226
12.3.3 Descartes' Lösung des Tangentenproblems	229
12.3.4 Descartes' geometrische Lösung einer quadratischen Gleichung vom Typ $x^2 + ax = b^2$	233
12.4 Zum Beweis der Vorzeichenregel von Descartes	233
12.5 Literaturhinweise	237
13 Pierre de Fermat – verkanntes Mathematikgenie aus der Provinz	239
13.1 Einfach genial: Pierre de Fermats Methode der Flächenbestimmung bei Potenzfunktionen	240
13.2 Wer war Pierre de Fermat?	243
13.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Fermat außerdem?	251
13.3.1 Formeln für Potenzsummen	251
13.3.2 Fermat'sche Spirale	253
13.3.3 Fermat-Punkt	254

13.3.4	Anwendung der Methode des unendlichen Abstiegs	255
13.3.5	Darstellung von Primzahlen als Summe von Quadratzahlen	256
13.3.6	Lösung der sog. Pell'schen Gleichung	259
13.3.7	Mersenne- und Fermat-Primzahlen	261
13.3.8	Kleiner Fermat'scher Satz	262
13.3.9	Fermat'scher Primzahltest	265
13.3.10	Faktorisierung großer Zahlen	266
13.3.11	Ein Beitrag Fermats zur Physik	268
13.4	Literaturhinweise	269
14	Blaise Pascal – tiefsinniger Theologe und Mathematiker	271
14.1	Einfach genial: Pascals Lösung des <i>Problème des partis</i>	272
14.1.1	Fermats kombinatorische Lösung	273
14.1.2	Pascals rekursive Methode	274
14.1.3	Pascals geniale Lösung mithilfe des <i>triangle arithmétique</i>	276
14.1.4	Die Lösungsversuche von Pacioli, Tartaglia und Cardano	281
14.2	Wer war Blaise Pascal?	282
14.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Pascal außerdem?	285
14.3.1	Weiterer Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	285
14.3.2	Summenformel für Potenzen natürlicher Zahlen und Ansätze zur Integralrechnung	287
14.3.3	Pascals Beiträge zur Physik	289
14.3.4	Pascals <i>Traité général de la Roulette</i>	290
14.4	Literaturhinweise	290
15	Abraham de Moivre – ein genialer Franzose im englischen Exil	293
15.1	Einfach genial: Abraham de Moivre entdeckt den Zusammenhang zwischen den Mehrfachwinkelsätzen und den komplexen Zahlen	295
15.1.1	Die Moivre'sche Formel	295
15.1.2	Anwendung der Moivre'schen Formel beim Ziehen einer n -ten Wurzel	297
15.1.3	Lösung einer kubischen Gleichung mithilfe eines Dreifachwinkelsatzes	298
15.1.4	Die Euler'sche Gleichung	300
15.1.5	Darstellung von n -ten Wurzeln in der Gauß'schen Zahlenebene	302
15.2	Wer war Abraham de Moivre?	304
15.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich de Moivre außerdem?	306
15.4	Literaturhinweise	311

16 Leonhard Euler – „unser aller Meister“	313
16.1 Einfach genial: Leonhard Euler löst das Basler Problem	314
16.2 Wer war Leonhard Euler?	324
16.3 Mit welchen Themen beschäftigte sich Leonhard Euler außerdem?	327
16.3.1 Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe und der Logarithmusfunktion	327
16.3.2 Die Euler'sche Gammafunktion	328
16.3.3 Beiträge Eulers zur Zahlentheorie	329
16.3.4 Eulers Lösung des Rencontre-Problems	334
16.3.5 Eulers Beiträge zur Kombinatorik	337
16.3.6 Der Euler'sche Polyedersatz	343
16.3.7 Euler begründet die Graphentheorie	344
16.4 Literaturhinweise	346
17 Joseph-Louis Lagrange – vielseitiger Mathematiker und Physiker	349
17.1 Einfach genial: Joseph-Louis Lagrange charakterisiert periodische Kettenbrüche	351
17.1.1 Endliche Kettenbrüche	351
17.1.2 Unendliche Kettenbrüche	358
17.2 Wer war Joseph-Louis Lagrange?	368
17.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Lagrange außerdem?	370
17.4 Ergänzung: Kettenbrüche bei Huygens, Brouncker und Wallis	374
17.5 Literaturhinweise	375
18 Jean Baptiste Joseph Fourier – von der Französischen Revolution zur Revolution der Wärmelehre	377
18.1 Einfach genial: Joseph Fourier approximiert periodische Funktionen mithilfe trigonometrischer Funktionen	379
18.1.1 Eigenschaften von Produkten trigonometrischer Funktionen	379
18.1.2 Der Fourier'sche Ansatz für eine Reihenentwicklung	382
18.1.3 Beispiele von Fourier-Reihen	383
18.2 Wer war Jean Baptiste Joseph Fourier?	387
18.3 Literaturhinweise	390
19 William Rowan Hamilton – ein unglückliches Genie aus Irland	391
19.1 Einfach genial: William Rowan Hamilton entdeckt die Quaternionen	394
19.1.1 Hamilton findet eine angemessene algebraische Struktur für die komplexen Zahlen	395
19.1.2 Hamilton entdeckt die Quaternionen	397
19.2 Wer war William Rowan Hamilton?	400
19.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Hamilton außerdem?	402
19.4 Literaturhinweise	403

20 Georg Cantor – Erforscher des Unendlichen	405
20.1 Einfach genial: Georg Cantor unterscheidet Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von unendlichen Mengen	406
20.1.1 Gleichmächtige unendliche Zahlenmengen	406
20.1.2 Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen	409
20.1.3 Mächtigkeit der Menge der algebraischen Zahlen	413
20.1.4 Die Überabzählbarkeit der Menge der transzendenten Zahlen	415
20.1.5 Die Cantor-Menge	417
20.2 Wer war Georg Cantor?	418
20.3 Eine Alternative zum ersten Cantor'schen Diagonalverfahren: Der Stern-Brocot-Baum	423
20.4 Literaturhinweise	427
21 Giuseppe Peano – vielseitiger Mathematiker und Logiker	429
21.1 Einfach genial: Peanos Entdeckung einer flächenfüllenden Kurve	430
21.2 Wer war Giuseppe Peano? <i>Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte er sich außerdem?</i>	435
21.3 Literaturhinweise	441
Allgemeine Literaturhinweise	443
Stichwortverzeichnis	445

Pythagoras von Samos – Sektenführer und Philosoph

1

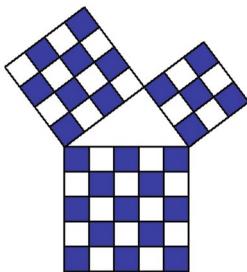
Die Zahl ist das Wesen aller Dinge. Das Universum ist auf der Macht der Zahlen aufgebaut.



Pythagoras von Samos (570–490 v.Chr.)

Beim Stichwort *Pythagoras* fällt den meisten natürlich die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ein und vermutlich auch der Zusammenhang mit einem rechtwinkligen Dreieck.

Nach Meinung der Postverwaltung Nicaraguas zählt diese Gleichung zu den *zehn Formeln, die das Antlitz der Erde veränderten*.



Die Aussage des *Satzes des Pythagoras* enthält aber etwas mehr als nur die bekannte Gleichung mit den Quadraten über den drei Seiten eines Dreiecks.

Satz

Satz des Pythagoras

- Wenn in einem Dreieck der Winkel γ ein rechter Winkel ist, dann gilt zwischen den Längen der Katheten a, b und der Hypotenuse c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, d.h., die Quadrate über den beiden Katheten sind zusammen genauso groß wie das Quadrat über der Hypotenuse.

Es gilt aber auch die

Umkehrung des Satzes

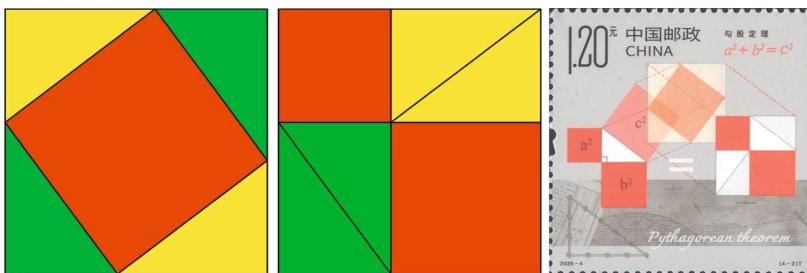
- Wenn für die Seitenlängen von a, b, c eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist der Winkel γ , welcher der Seite c gegenüberliegt, ein rechter Winkel. ◀

Dies sind wirklich bemerkenswerte Aussagen:

- Wenn die drei Streckenlängen die Gleichung erfüllen, dann ist eine Aussage über einen der Winkel in dem Dreieck möglich.
- Wenn in einem Dreieck ein rechter Winkel vorliegt, dann ist eine Aussage über die Streckenlängen möglich.

Der Satz wurde in Ägypten und Babylonien bereits viele Jahrhunderte *vor* Pythagoras angewandt. Und daher fragt man sich mit Recht, warum der Satz nach dem berühmten Griechen benannt ist, von dem einige Forscher sogar sagen, dass er gar kein Mathematiker war.

Zweifel sind daher auch angebracht, dass es tatsächlich Pythagoras selbst war, der den Satz (genauer: den ersten Teil des Satzes) anhand der folgenden beiden Abbildungen bewies. Das jedenfalls behauptete der griechische Mathematiker **Proclus** (412-485 n. Chr.), der viele Jahrhunderte nach Pythagoras lebte.



Ein solcher *Beweis ohne Worte* passt aber wunderbar zu den *genialen Ideen*, die in diesem Kapitel angesprochen werden.

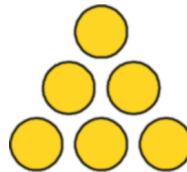
Und diese beiden zum Beweis gehörenden Abbildungen belegen auch:

- Mathematische Einsichten lassen sich auch ohne Rechnung gewinnen!

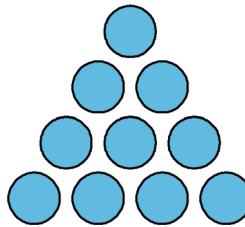
1.1 Einfach genial: Pythagoreische Zahlenmuster

Bei Pythagoras und seinen Schülern, den Pythagoreern, hatte jede Zahl ihre eigene, mystische Persönlichkeit:

- Die Eins ist keine eigentliche Zahl, aber sie ist Ausgangspunkt aller Zahlen.
- Gerade Zahlen sind weiblich, ungerade sind männlich.
- Die Zahl 5 ist als Summe der beiden kleinsten echten Zahlen, nämlich der kleinsten geraden und der kleinsten ungeraden Zahl, Symbol für die Ehe.
- Die Zahl 6 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler: $6 = 1 + 2 + 3$; die Pythagoreer bezeichneten sie als *vollkommene Zahl* (vgl. hierzu auch Kap. 3, 13 und 16).



- Die Zahl 10 gilt als heilige Zahl; sie ist Summe der ersten vier Zahlen und Basis unseres Zahlensystems. Außerdem lässt sie sich in Form eines wunderbar symmetrischen gleichseitigen Dreiecks darstellen (**Tetrakty**s = Vierheit).



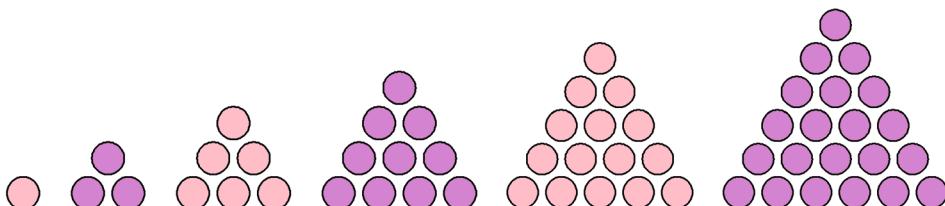
- Die Tetraktyis steht auch für die *Elemente* Feuer, Luft, Wasser und Erde sowie für die *Dimensionen* (1 = ein Punkt; 2 = Linie aus zwei Punkten; 3 = Fläche, definiert durch die drei Punkte eines gleichseitigen Dreiecks; 4 = Raum, definiert durch die vier Punkte eines regelmäßigen Tetraeders).
- Zehn ist auch die Anzahl der Objekte im Kosmos der Pythagoreer: Erde und Gegenerde (Antichthon), Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und die Fixsternsphäre.
- Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 der Tetraktyis spielen in der musikalischen Harmonik eine entscheidende Rolle: Wenn man die Länge einer Saite von ihrer ursprünglichen Länge auf die Hälfte verkürzt, also im Verhältnis 2:1 verändert, dann liegt der neue Ton um eine Oktave höher, bei Verkürzung im Verhältnis 3:2 bzw. 4:3 um eine Quinte bzw. Quarte.
- Die Zahl 17 gilt als Unglückszahl, die zu meiden ist; denn sie liegt zwischen den Zahlen 16 und 18. Diese beiden Zahlen sind besondere Zahlen; es sind nämlich die einzigen natürlichen Zahlen, die sowohl für den Flächeninhalt als auch für den Umfang einer Figur stehen können:

$16 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$ für ein Quadrat der Seitenlänge 4 und

$18 = 3 \times 6 = 3 + 6 + 3 + 6$ für ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 6.

1.1.1 Dreieckszahlen

Nicht nur die beiden Zahlen 6 und 10 lassen sich mithilfe von bunten Steinen in Form eines gleichseitigen Dreiecks darstellen, vgl. folgende Abb.



Diese so darstellbaren natürlichen Zahlen werden als **Dreieckszahlen** bezeichnet. Es handelt sich um eine Zahlenfolge mit den Elementen 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

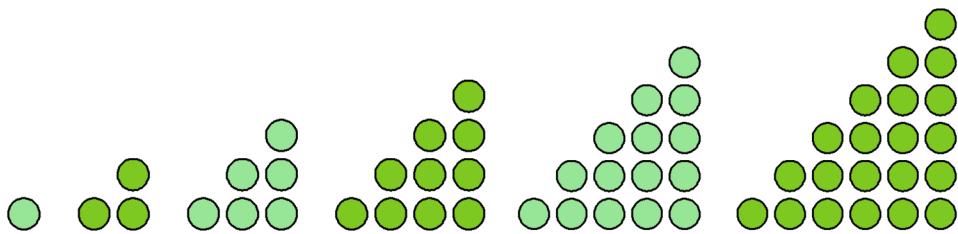
Im Verzeichnis der Folgen mit ganzzahligen Elementen (OEIS = Online Encyclopedia of Integer Sequences) trägt diese Folge der *Triangular Numbers* die Nummer A000217.

Die n -te Dreieckszahl $\Delta(n)$ ist definiert als die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$\Delta(1) = 1; \Delta(2) = 1 + 2 = 3; \Delta(3) = 1 + 2 + 3 = 6; \Delta(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

$$\Delta(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^5 k = 15; \quad \Delta(6) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{k=1}^6 k = 21; \dots$$

Die Dreieckszahlen können auch in der Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks veranschaulicht werden:

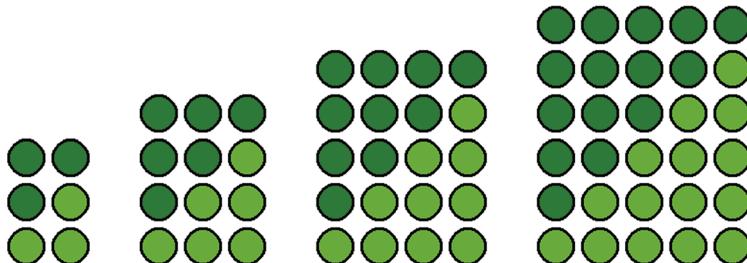


Wählt man diese Form der Darstellung, dann werden unmittelbar zwei Gesetzmäßigkeiten deutlich:

- Durch Verdopplung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks erhält man ein Rechteck mit der gleichen Breite wie das Dreieck und mit einer Höhe, die um 1 größer ist als die Breite:

$$2 \cdot \Delta(2) = 2 \cdot 3; 2 \cdot \Delta(3) = 3 \cdot 4; 2 \cdot \Delta(4) = 4 \cdot 5; 2 \cdot \Delta(5) = 5 \cdot 6$$

Es gilt also allgemein: $2 \cdot \Delta(n) = n \cdot (n + 1)$



Formel

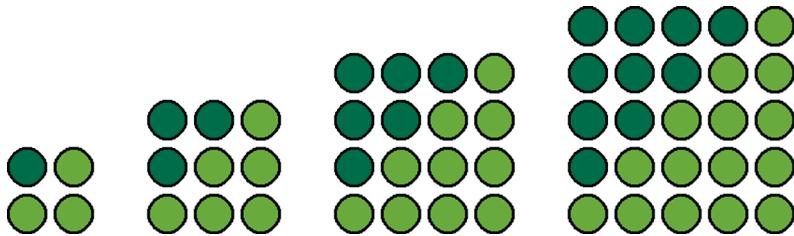
Summe der ersten n natürlichen Zahlen

Für die n -te Dreieckszahl $\Delta(n)$, also für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, gilt:

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$



Eine alternative Möglichkeit, diese Formel herzuleiten, ergibt sich aus der folgenden Abbildungssequenz, bei der jeweils zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen-Muster sich zu einem Quadrat ergänzen:



$$\Delta(1) + \Delta(2) = 2^2; \Delta(2) + \Delta(3) = 3^2; \Delta(3) + \Delta(4) = 4^2; \Delta(4) + \Delta(5) = 5^2.$$

Es gilt also allgemein für $n \geq 2 : \Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$, in Worten:

- Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ergibt eine Quadratzahl.

Da sich die beiden aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen $\Delta(n-1)$ und $\Delta(n)$ nur um die natürliche Zahl n unterscheiden, nämlich $\Delta(n) = \Delta(n-1) + n$, ergibt sich hieraus

$$\Delta(n-1) + \Delta(n) = [\Delta(n) - n] + \Delta(n) = n^2, \text{ also}$$

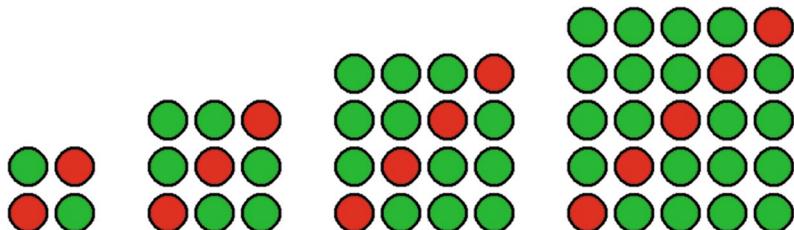
$$2 \cdot \Delta(n) = n^2 + n \text{ und somit ebenfalls } \Delta(n) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).$$

Aus der folgenden Sequenz ergibt sich

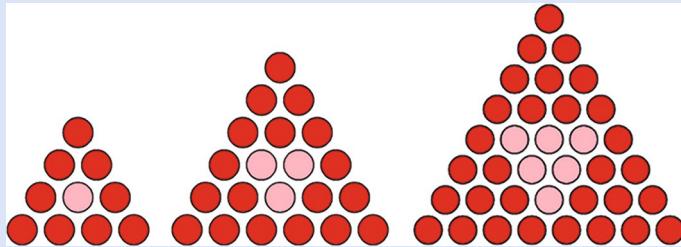
$$2 \cdot \Delta(1) + 2 = 2^2; 2 \cdot \Delta(2) + 3 = 3^2; 2 \cdot \Delta(3) + 4 = 4^2; 2 \cdot \Delta(4) + 5 = 5^2,$$

also allgemein $2 \cdot \Delta(n) + (n+1) = (n+1)^2$.

Hieraus folgt: $2 \cdot \Delta(n) = (n+1)^2 - (n+1)$ und weiter $2 \cdot \Delta(n) = n^2 + n$, vgl. Abb.

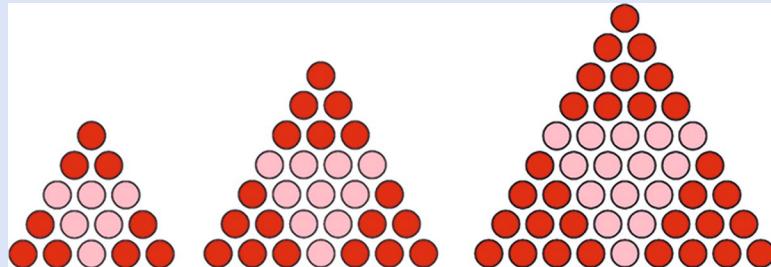


Durch unterschiedliche Färbungen von Teilfiguren lassen sich mithilfe der beiden Darstellungsformen weitere Gesetzmäßigkeiten für Dreieckszahlen entdecken, vgl. die folgenden Beispiele. Ob die Pythagoreer diese Zusammenhänge auch entdeckt haben, ist nicht bekannt, es erscheint aber durchaus möglich.

Beispiel 1


$$\Delta(4) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(1); \quad \Delta(6) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(2); \quad \Delta(8) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(3).$$

- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1)$.

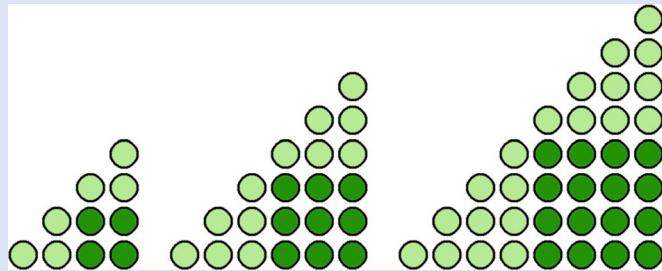


$$\Delta(5) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(3); \quad \Delta(7) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(4); \quad \Delta(9) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(5).$$

Die Beziehung gilt auch für $n = 3$: $\Delta(3) = 6 = 3 \cdot \Delta(1) + \Delta(2)$.

- Für ungerade Zahlen $2n+1$ gilt also allgemein:

$$\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1).$$

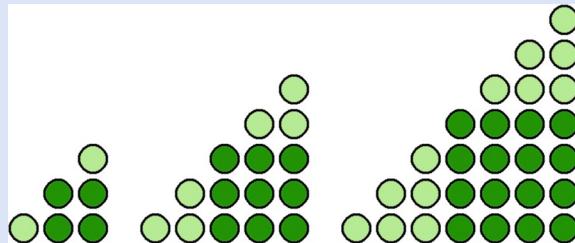
Beispiel 2

$$\Delta(4) = 2 \cdot \Delta(2) + 2^2; \Delta(6) = 2 \cdot \Delta(3) + 3^2; \Delta(8) = 2 \cdot \Delta(4) + 4^2.$$

- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 2 \cdot \Delta(n) + n^2$

Wegen $\Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$ folgt hieraus:

$$\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1), \text{ vgl. Beispiel 1.}$$

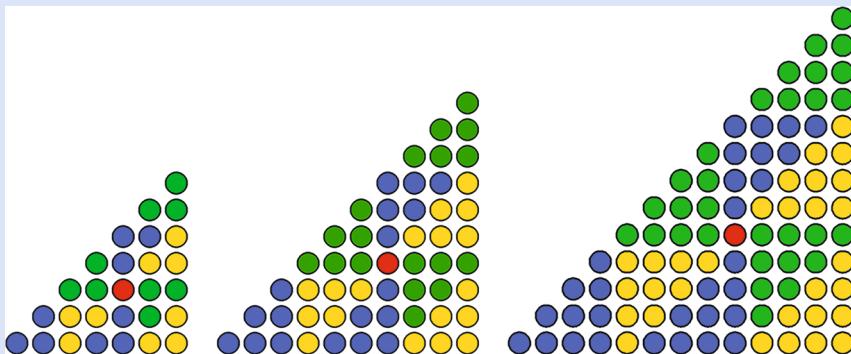


$$\Delta(3) = 2 \cdot \Delta(1) + 2^2; \Delta(5) = 2 \cdot \Delta(2) + 3^2; \Delta(7) = 2 \cdot \Delta(3) + 4^2.$$

- Für ungerade Zahlen $2n+1$ gilt also allgemein: $\Delta(2n+1) = 2 \cdot \Delta(n) + (n+1)^2$

Wegen $\Delta(n) + \Delta(n+1) = (n+1)^2$ folgt hieraus:

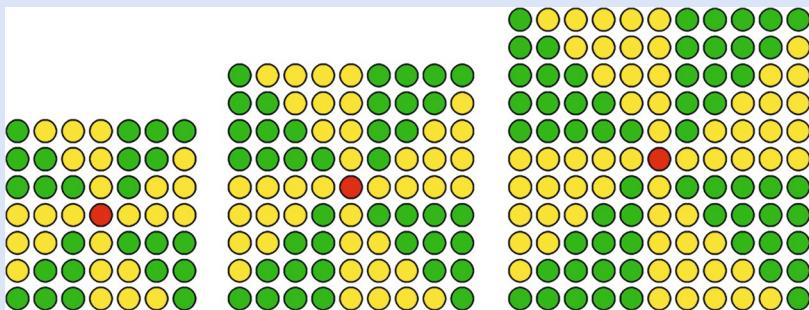
$$\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1), \text{ vgl. Beispiel 1.}$$

Beispiel 3

$$\Delta(7) = 9 \cdot \Delta(2) + 1; \Delta(10) = 9 \cdot \Delta(3) + 1; \Delta(10) = 9 \cdot \Delta(4) + 1.$$

- Für natürliche Zahlen vom Typ $3n+1$, also für Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, gilt allgemein: $\Delta(3n+1) = 9 \cdot \Delta(n) + 1$

Die Beziehung gilt auch für $n=1$: $\Delta(4) = 10 = 9 \cdot \Delta(1) + 1$.

Beispiel 4

$$8 \cdot \Delta(3) + 1 = 7^2; 8 \cdot \Delta(4) + 1 = 9^2; 8 \cdot \Delta(5) + 1 = 11^2.$$

- Allgemein gilt: $8 \cdot \Delta(n) + 1 = (2n+1)^2$.

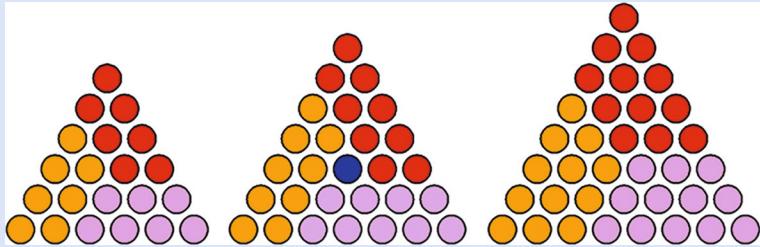
Die Beziehung gilt auch für $n=1$: $8 \cdot \Delta(1) + 1 = 3^2$ sowie für $n=2$: $8 \cdot \Delta(2) + 1 = 5^2$.

Auf diese Formel machte der griechische Mathematiker **Diophant** (vgl. Kap. 3) aufmerksam; vielleicht wurde sie aber bereits vorher entdeckt.

Beispiel 5

Die *Differenz* von Dreiekszahlen kann man durch symmetrische Trapeze veranschaulichen. Die drei abgebildeten Figuren zeigen die Beziehungen

$$3 \cdot [\Delta(4) - \Delta(2)] = \Delta(6); 3 \cdot [\Delta(5) - \Delta(3)] + 1 = \Delta(7); 3 \cdot [\Delta(5) - \Delta(2)] = \Delta(8)$$



Allgemein gilt:

$$3 \cdot [\Delta(2n) - \Delta(n)] = \Delta(3n), 3 \cdot [\Delta(2n+1) - \Delta(n+1)] + 1 = \Delta(3n+1) \text{ und} \\ 3 \cdot [\Delta(2n+1) - \Delta(n)] = \Delta(3n+2).$$

1.1.2 Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

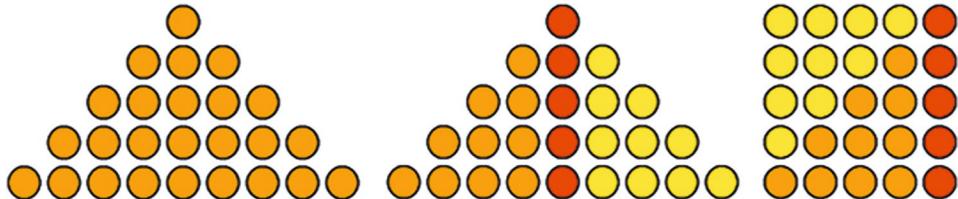
Bildet man fortlaufend die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen, so erhält man die Zahlenfolge

$$1 = 1^2; 1 + 3 = 2^2; 1 + 3 + 5 = 3^2; 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2; 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \dots$$

also die Folge der Quadratzahlen.

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen kann man durch *symmetrische* Dreiecke veranschaulichen, vgl. die folgende Abb.links.

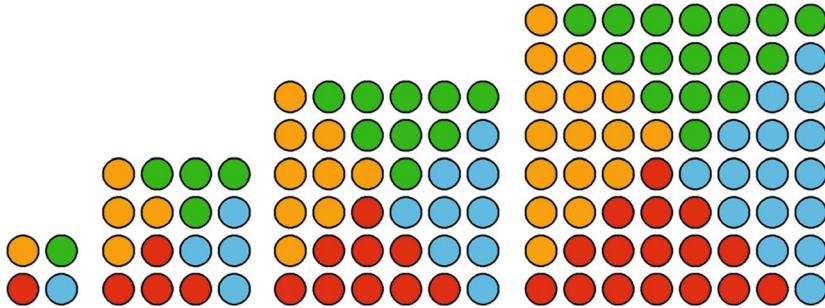
Durch Umlegen der Steine kann man leicht zeigen, dass sich als Summe der ersten n ungeraden Zahlen tatsächlich stets eine Quadratzahl ergibt, vgl. die Abbildungen in der Mitte und rechts.



Eine alternative Möglichkeit, um nachzuweisen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ergibt, kann man den folgenden Abbildungen entnehmen.

Hier ist:

$$4 \cdot 1 = 2^2; 4 \cdot (1+3) = 4^2; 4 \cdot (1+3+5) = 6^2; 4 \cdot (1+3+5+7) = 8^2.$$



Allgemein gilt also $4 \cdot [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)] = (2n)^2 = 4n^2$ und daher

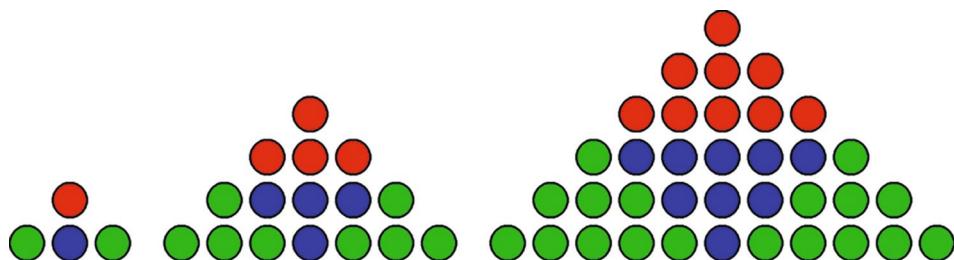
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Wenn die Anzahl der waagerechten Reihen in dieser symmetrischen Figur *gerade* ist, kann man ein besonderes Muster bilden:

Die symmetrische Figur kann in vier zueinander kongruente Teilfiguren unterteilt werden.

- Die erste 2-zeilige Figur links setzt sich aus vier einzelnen Steinen zusammen, also $1+3=4 \cdot 1$;
- die zweite 4-zeilige Figur enthält viermal die erste (2-zeilige) Figur, also $(1+3)+(5+7)=4 \cdot (1+3)$;
- die dritte 6-zeilige Figur enthält viermal die 3-zeilige Figur, also $(1+3+5)+(7+9+11)=4 \cdot (1+3+5)$;

usw.



Man kann dies auch so beschreiben: Oberhalb einer gedachten horizontalen Mittellinie liegt ein Viertel aller Steine der Figur, unterhalb liegen drei Viertel.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} \dots$$

Allgemein gilt also:

Regel

Eigenschaft der Summe der ersten $2n$ ungeraden natürlichen Zahlen

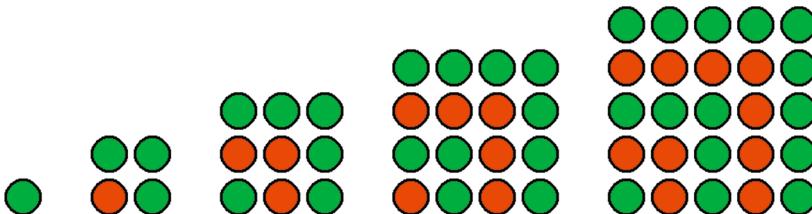
Betrachtet man die Summe der ersten $2n$ ungeraden natürlichen Zahlen, dann ist der Anteil der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ein-Drittel-mal so groß wie die Summe der nächsten n ungeraden natürlichen Zahlen. ◀

Diese Eigenschaft der Summe der ungeraden natürlichen Zahlen wurde von Galileo Galilei (1564–1642) dokumentiert; sie hätte aber durchaus bereits von den Pythagoreern entdeckt werden können.

1.1.3 Winkelhaken

Wie in Abschn. 1.1.1 zu sehen war, lassen sich Quadrate auf unterschiedliche Weise durch Dreiecksformen aus bunten Steinen auslegen.

Ein weiteres Muster entsteht durch das Legen von sog. **Gnomonen**, auch Winkelhaken genannt: Oberhalb und rechts von einem vorhandenen Quadrat wird noch eine zusätzliche Reihe von bunten Steinen hinzugefügt.



Die Anzahl der hinzukommenden Steine ist jeweils *ungerade*.

In den Beispielen der Abbildung gilt:

$$1 = 1^2; 1 + 3 = 2^2; 1 + 3 + 5 = 3^2; 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2; 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Regel:

Formel

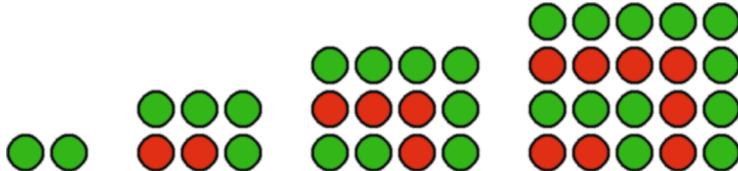
Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist eine Quadratzahl und es gilt:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \quad \blacktriangleleft$$

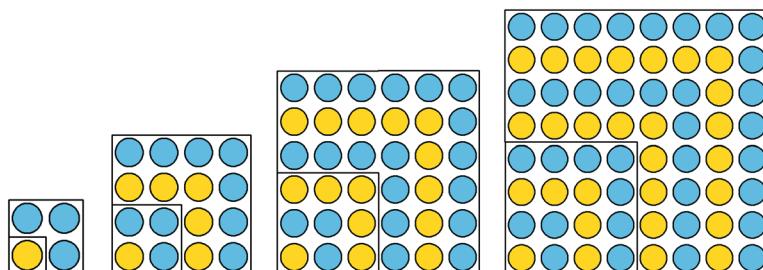
Analog könnte man auch *verlängerte Winkelhaken* betrachten, um eine Formel für die Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen aufzustellen:

$$2 = 1 \cdot 2; 2 + 4 = 2 \cdot 3; 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4; 2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5,$$



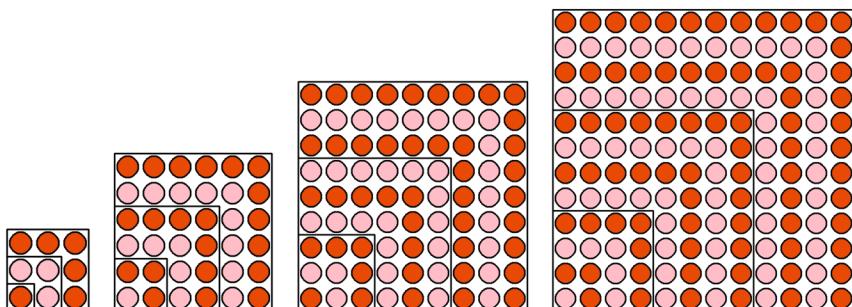
allgemein: $2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = \sum_{k=1}^n (2k) = n \cdot (n+1)$; diese Formel folgt natürlich unmittelbar aus der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

An der Winkelhakenfigur lässt sich auch die in Abschn. 1.1.2 beschriebene Eigenschaft des 1-zu-3-Verhältnisses der Summe ungerader Zahlen ablesen.

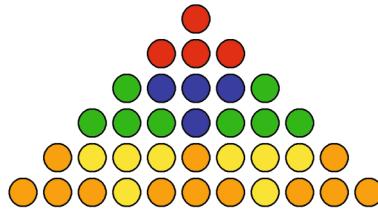


An der Darstellungsform mit Winkelhaken kann man außerdem entdecken, wie sich die o.a. Regel verallgemeinern lässt:

$$\begin{aligned} 1 : 3 : 5 &= (1+3) : (5+7) : (9+11) = (1+3+5) : (7+9+11) : (13+15+17) \\ &= (1+3+5+7) : (9+11+13+15) : (17+19+21+23) \end{aligned}$$



Hinweis: Diese Verallgemeinerung lässt sich auch an den in Abschn. 1.1.2 betrachteten symmetrischen Dreiecken veranschaulichen, vgl. die folgende Abbildung.



1.1.4 Pythagoreische Zahlentripel

Zahlentripel $(a; b; c)$ aus natürlichen Zahlen a, b, c werden als **pythagoreische Zahlentripel** bezeichnet, wenn sie die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Bereits den Babylonier war bekannt, dass man *alle* diese Zahlentripel $(a; b; c)$ mithilfe des Ansatzes $a = u^2 - v^2$, $b = 2 \cdot u \cdot v$ und $c = u^2 + v^2$ finden kann (wobei $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$).

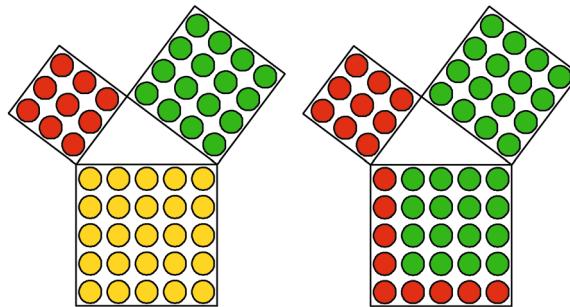
Zum Beweis vgl. beispielsweise *Mathematik ist schön*, Abschn. 2.7.4.

Die Tripel mit $u \leq 5$ können der folgenden Tabelle entnommen werden.

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2 \cdot u \cdot v$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41

Um solche Zahlentripel zu finden, kann man aber auch anschaulich vorgehen und geeignete Muster aus bunten Steinen verwenden. Die folgenden beiden Abbildungen verdeutlichen die zugrunde liegende Idee:

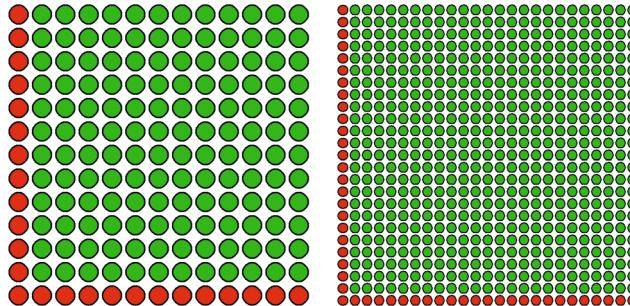
Damit die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, muss die Anzahl der rot gefärbten Steine sowohl eine Quadratzahl sein als auch durch einen Winkelhaken dargestellt werden können.



Und da die Winkelhaken aus einer ungeraden Anzahl von Steinen bestehen, kommen also nur die ungeraden Quadratzahlen infrage. Die kleinste ungerade Quadratzahl ist die Zahl 9; die Wurzel aus dieser Zahl bestimmt die Seitenlänge des kleineren Kathetenquadrats in der o.a. Pythagoras-Figur.

Die nächstgrößere ungerade Quadratzahl ist 25: Ein Winkelhaken aus 25 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 12, d.h., die Zahlen 5, 12 und 13 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. links.

Dann folgt die ungerade Quadratzahl 49: Ein Winkelhaken aus 49 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 24, d.h., die Zahlen 7, 24 und 25 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. rechts.



Auf diese Weise findet man *unendlich viele* pythagoreische Zahlentripel, die alle die Eigenschaft haben, dass sich die Länge der größeren Kathete von der Länge der Hypotenuse um 1 LE unterscheidet, da nur *ein* Winkelhaken um das größere Kathetenquadrat gelegt ist:

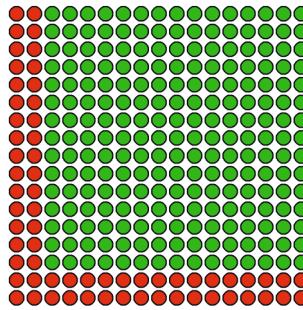
$$(3; 4; 5); (5; 12; 13); (7; 24; 25); (9; 40; 41); (11; 60; 61) \text{ usw.}$$

- Allgemein ergibt sich: Die Zahlen $(2n+1; 2n \cdot (n+1); 2n \cdot (n+1)+1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 1 LE.

Hinweis: Die Terme für die Seitenlängen b und $c = b + 1$ ergeben sich aus folgender Rechnung: Aus $(2n+1)^2 + b^2 = (b+1)^2$ ergibt sich $(2n+1)^2 = 2b+1$, also $2b = 4n^2 + 4n$ und somit $b = 2n^2 + 2n = 2n \cdot (n+1)$.

In der o.a. Tabelle mit Pythagoras-Tripeln kommen aber auch Zahlentripel vor, die nicht mithilfe nur *eines* Winkelhakens dargestellt werden können.

Beim Tripel $(8; 15; 17)$ unterscheiden sich die Seitenlängen von b und c um 2. Daher werden für die Darstellung *zwei* Winkelhaken (aus $31+33=64=8^2$ Steinen) benötigt, vgl. die folgende Abbildung.



- Allgemein kann man zeigen: Die Zahlen $(2n; n^2 - 1; n^2 + 1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 2 LE.

Im Prinzip kann man mithilfe angelegter Winkelhaken alle möglichen pythagoreischen Zahlentripel ermitteln. Bei dieser Vorgehensweise entdeckt man allerdings nicht bei jeder möglichen Figur ein neues Tripel.

Setzt man beispielsweise $n = 2$ in die allgemeine Form $(2n; n^2 - 1; n^2 + 1)$ ein, so ergibt sich das Tripel $(4; 3; 5)$.

Beim Einsetzen von $n = 3$ erhält man $(6; 8; 10)$ das ist das Doppelte des bekannten Tripels $(3; 4; 5)$.

Man kann beweisen, dass durch Hinzufügen von *drei* Winkelhaken kein einziges Tripel hinzukommt, das nicht bereits durch das Anhängen von einem oder zwei Winkelhaken entdeckt wurde.

Übrigens: Das in der Tabelle oben enthaltene pythagoreische Tripel $(20; 21; 29)$ kann mithilfe eines Quadrats der Seitenlänge 21 und *acht* Winkelhaken mit $43+45+47+49+51+53+55+57=400=20^2$ Steinen veranschaulicht werden.