Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Peano

SACHBUCH

Springer

Mathematik – einfach genial!

Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Peano

2., erweiterte Auflage

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-71415-7 ISBN 978-3-662-71416-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-71416-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Einbandabbildung: nach Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort zur 1. Auflage

Wer sich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigt, mit den vielen Ideen, die im Laufe der Jahrhunderte entwickelt wurden, der kommt aus dem Staunen nicht heraus – da kann man nur feststellen: „Einfach genial!"

Und es gibt auch eine Reihe von genialen Ansätzen, die von der Nachwelt regelrecht vergessen wurden – die Universalgelehrten aus dem islamischen Kulturkreis etwa sind in Europa kaum noch bekannt, obwohl sie wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Mathematik geleistet haben.

In dem vorliegenden Buch werden einige dieser bemerkenswerten genialen Ideen dargestellt. Ausgewählt habe ich 18 Themen, die mithilfe zahlreicher farbiger Abbildungen anschaulich entwickelt und durch möglichst einfache Beispiele verdeutlicht werden. Manche der Ideen haben eine Vorgeschichte, auf die ich zunächst eingehe – so wird noch klarer, welcher Fortschritt durch diese Idee erreicht wurde.

Die Menschen hinter diesen Ideen haben in ihrer jeweiligen Zeit gelebt, und oft wurden ihre Schicksale von dramatischen historischen Veränderungen beeinflusst. Daher war es naheliegend, auch die Lebensgeschichten dieser Personen zu erzählen – so, wie ich es seit 2006 jeden Monat im *Mathematischen Monatskalender* versuche (Überblick auf *www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/*).

Die meisten hatten nicht nur eine einzige geniale Idee. Bei diesen finden Sie im jeweiligen Kapitel einen dritten Abschnitt, in dem beschrieben wird, mit welchen Themen sich diese Gelehrten auch noch beschäftigt haben. In manchen Fällen (Archimedes, Fermat, Euler, Lagrange) ist dies umfangreich und kann – insbesondere bei Leonhard Euler – nur andeuten, wie außergewöhnlich diese Mathematiker waren.

Die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches geben Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie in der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertroffen; daher wurden auch diese Quellen genannt. An etlichen Stellen ergaben sich Querverweise zu meinen ebenfalls im Springer-Verlag erschienenen Büchern *Mathematik ist schön*, *Mathematik ist wunderschön* und *Mathematik ist wunderwunderschön*. Außerdem enthalten die Literaturhinweise auch jeweils konkrete Angaben über die *Spektrum*-Kalenderblätter sowie ggf. auch über Beiträge im *MNU Journal*, wo ich einige der genialen Ideen (in Kurzfassung) beschrieben hatte.

Der gewählte Aufbau – und natürlich der vorgegebene Gesamtumfang des Buches – haben dazu geführt, dass es *nur* 18 geniale Ideen sind, die hier vorgestellt werden können. Mir war es sehr wichtig, über mehr zu berichten als nur über die einzelnen Ideen. Ich hoffe, es wird deutlich, wie spannend es sein kann, sich mit dem Schicksal der ausgewählten Personen zu beschäftigen, das oft durch besondere historische Ereignisse mitgeprägt wurde.

Die Auswahl der genialen Ideen mag willkürlich erscheinen. Keinesfalls erhebe ich den Anspruch, dass alle Epochen und alle Länder (Kulturen) *repräsentativ* vertreten sind. Die Resonanz auf dieses Buch wird zeigen, ob es eine weitere Gelegenheit geben wird, beispielsweise auch über geniale Ideen von Mathematiker*innen* und über indische und chinesische Mathematiker zu berichten. Weitere geniale Ideen wie beispielsweise der euklidische Algorithmus, diophantische Gleichungen, Faulhaber'sche Formeln usw. bieten sich an.

Die Kapitel dieses Buches sind weitgehend unabhängig voneinander lesbar – wo es sinnvoll ist, werden Bezüge zu anderen Kapiteln aufgezeigt.

Die Themen sind durchweg mit schulischem Vorwissen aus der Ober- oder Mittelstufe nachvollziehbar; in diesem Buch werden also keine mathematischen Theorien entwickelt, die deutlich über das an der Schule erreichbare Niveau hinausgehen. Daher empfiehlt sich das Buch für alle, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, und ist beispielsweise auch für Arbeitsgemeinschaften an Schulen und als Anregung für Facharbeiten geeignet.

Vorwort zur 2. Auflage

In der Zwischenzeit konnte ich in den beiden Büchern

- *Geschichten aus der Mathematik – Indien, China und das europäische Erwachen* (2023)
- *Verkannt, verfemt, vergessen – Geschichten aus der europäischen Mathematik der Neuzeit* (2024)

auf eine Reihe von weiteren genialen Ideen eingehen, dabei auch die besonderen Beiträge von indischen und chinesischen Mathematikern sowie von Mathematikerinnen berücksichtigen.

Ich bin dem Verlag dankbar, dass ich nunmehr für die vorliegende zweite Auflage des Buches die 18 genialen Ideen der ersten Auflage um drei weitere ergänzen kann. Die Kapitel des Buches sind unabhängig voneinander lesbar; daher ließ es sich aus technischen Gründen nicht vermeiden, dass geringfügige Dopplungen vorkommen.

Da der italienische Mathematiker Giuseppe Peano nach Georg Cantor geboren wurde, wurde der Untertitel des vorliegenden Buches angepasst:

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Peano

Auch diesmal bedanke ich mich herzlich bei allen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung unterstützt haben:

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich auch diesmal wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei meinem Sohn Andreas, der auch die drei zusätzlichen Porträts der ausgewählten Mathematiker im Stile des *Urban Sketching* zeichnete (https://kunst-a-s.jimdoweb.com/), sowie
- bei Wilfried Herget, dessen hilfreiche Formulierungsvorschläge wesentlich zur besseren Lesbarkeit meiner Texte beigetragen haben,

und nicht zuletzt bei Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer-Verlag, die dieses Buch ermöglichten.

Inhaltsverzeichnis

Pythagoras von Samos – Sektenführer und Philosoph

1

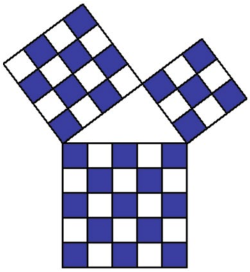
Die Zahl ist das Wesen aller Dinge. Das Universum ist auf der Macht der Zahlen aufgebaut.

Pythagoras von Samos (570–490 v.Chr.)

Beim Stichwort *Pythagoras* fällt den meisten natürlich die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ein und vermutlich auch der Zusammenhang mit einem rechtwinkligen Dreieck.

Nach Meinung der Postverwaltung Nicaraguas zählt diese Gleichung zu den *zehn Formeln, die das Antlitz der* Erde veränderten.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-71416-4_1



Die Aussage des *Satzes des Pythagoras* enthält aber etwas mehr als nur die bekannte Gleichung mit den Quadraten über den drei Seiten eines Dreiecks.

Satz

Satz des Pythagoras

- Wenn in einem Dreieck der Winkel γ ein rechter Winkel ist, dann gilt zwischen den Längen der Katheten *a, b* und der Hypotenuse *c* die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, d.h., die Quadrate über den beiden Katheten sind zusammen genauso groß wie das Quadrat über der Hypotenuse.

Es gilt aber auch die

Umkehrung des Satzes

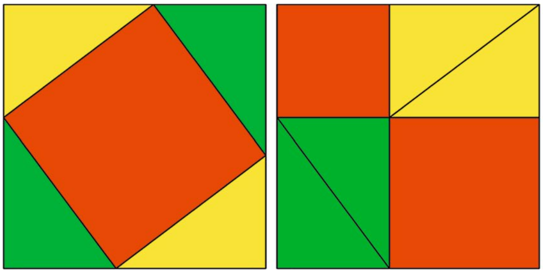
- Wenn für die Seitenlängen von *a, b, c* eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist der Winkel γ, welcher der Seite *c* gegenüberliegt, ein rechter Winkel. ◄

Dies sind wirklich bemerkenswerte Aussagen:

- Wenn die drei Streckenlängen die Gleichung erfüllen, dann ist eine Aussage über einen der Winkel in dem Dreieck möglich.
- Wenn in einem Dreieck ein rechter Winkel vorliegt, dann ist eine Aussage über die Streckenlängen möglich.

Der Satz wurde in Ägypten und Babylonien bereits viele Jahrhunderte *vor* Pythagoras angewandt. Und daher fragt man sich mit Recht, warum der Satz nach dem berühmten Griechen benannt ist, von dem einige Forscher sogar sagen, dass er gar kein Mathematiker war.

Zweifel sind daher auch angebracht, dass es tatsächlich Pythagoras selbst war, der den Satz (genauer: den ersten Teil des Satzes) anhand der folgenden beiden Abbildungen bewies. Das jedenfalls behauptete der griechische Mathematiker **Proclos** (412-485 n. Chr.), der viele Jahrhunderte nach Pythagoras lebte.



Ein solcher *Beweis ohne Worte* passt aber wunderbar zu den *genialen Ideen,* die in diesem Kapitel angesprochen werden.

Und diese beiden zum Beweis gehörenden Abbildungen belegen auch:

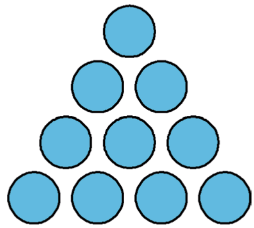
- Mathematische Einsichten lassen sich auch ohne Rechnung gewinnen!

1.1 Einfach genial: Pythagoreische Zahlenmuster

Bei Pythagoras und seinen Schülern, den Pythagoreern, hatte jede Zahl ihre eigene, mystische Persönlichkeit:

- Die Eins ist keine eigentliche Zahl, aber sie ist Ausgangspunkt aller Zahlen.
- Gerade Zahlen sind weiblich, ungerade sind männlich.
- Die Zahl 5 ist als Summe der beiden kleinsten echten Zahlen, nämlich der kleinsten geraden und der kleinsten ungeraden Zahl, Symbol für die Ehe.
- Die Zahl 6 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler: $6 = 1 + 2 + 3$; die Pythagoreer bezeichneten sie als *vollkommene* Zahl (vgl. hierzu auch Kap. 3, 13 und 16).

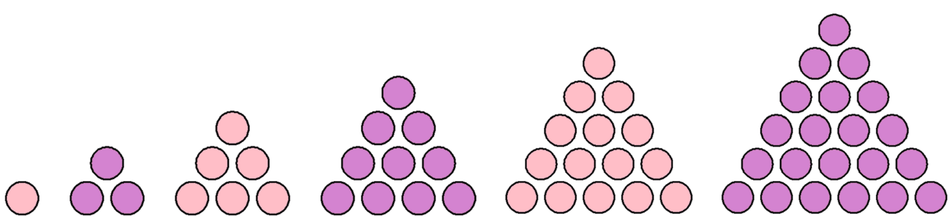
- Die Zahl 10 gilt als heilige Zahl; sie ist Summe der ersten vier Zahlen und Basis unseres Zahlensystems. Außerdem lässt sie sich in Form eines wunderbar symmetrischen gleichseitigen Dreiecks darstellen (**Tetraktys** = Vierheit).



- Die Tetraktys steht auch für die *Elemente* Feuer, Luft, Wasser und Erde sowie für die *Dimensionen* (1 = ein Punkt; 2 = Linie aus zwei Punkten; 3 = Fläche, definiert durch die drei Punkte eines gleichseitigen Dreiecks; 4 = Raum, definiert durch die vier Punkte eines regelmäßigen Tetraeders).
- Zehn ist auch die Anzahl der Objekte im Kosmos der Pythagoreer: Erde und Gegenerde (Antichthon), Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und die Fixsternsphäre.
- Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 der Tetraktys spielen in der musikalischen Harmonik eine entscheidende Rolle: Wenn man die Länge einer Saite von ihrer ursprünglichen Länge auf die Hälfte verkürzt, also im Verhältnis 2:1 verändert, dann liegt der neue Ton um eine Oktave höher, bei Verkürzung im Verhältnis 3:2 bzw. 4:3 um eine Quinte bzw. Quarte.
- Die Zahl 17 gilt als Unglückszahl, die zu meiden ist; denn sie liegt zwischen den Zahlen 16 und 18. Diese beiden Zahlen sind besondere Zahlen; es sind nämlich die einzigen natürlichen Zahlen, die sowohl für den Flächeninhalt als auch für den Umfang einer Figur stehen können:
  $16 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$ für ein Quadrat der Seitenlänge 4 und
  $18 = 3 \times 6 = 3 + 6 + 3 + 6$ für ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 6.

1.1.1 Dreieckszahlen

Nicht nur die beiden Zahlen 6 und 10 lassen sich mithilfe von bunten Steinen in Form eines gleichseitigen Dreiecks darstellen, vgl. folgende Abb.



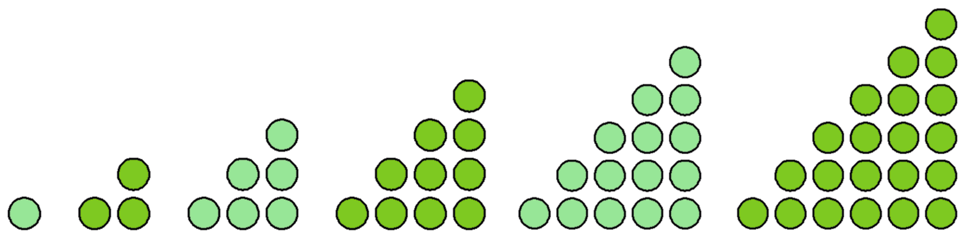
Diese so darstellbaren natürlichen Zahlen werden als **Dreieckszahlen** bezeichnet. Es handelt sich um eine Zahlenfolge mit den Elementen 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

Im Verzeichnis der Folgen mit ganzzahligen Elementen (OEIS = Online Encyclopedia of Integer Sequences) trägt diese Folge der *Triangular Numbers* die Nummer A000217.

Die n-te Dreieckszahl $\Delta(n)$ ist definiert als die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$\Delta(1)=1;\ \Delta(2)=1+2=3;\ \Delta(3)=1+2+3=6;\ \Delta(4)=1+2+3+4=10;$$
$$\Delta(5)=1+2+3+4+5=\sum_{k=1}^{5}k=15;\quad \Delta(6)=1+2+3+4+5+6=\sum_{k=1}^{6}k=21;\ldots$$

Die Dreieckszahlen können auch in der Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks veranschaulicht werden:

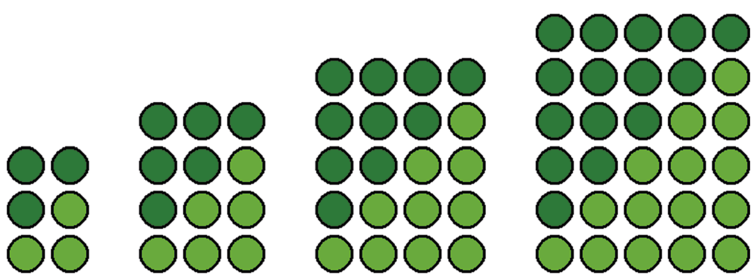


Wählt man diese Form der Darstellung, dann werden unmittelbar zwei Gesetzmäßigkeiten deutlich:

- Durch Verdopplung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks erhält man ein Rechteck mit der gleichen Breite wie das Dreieck und mit einer Höhe, die um 1 größer ist als die Breite:

$$2\cdot\Delta(2)=2\cdot 3;\ 2\cdot\Delta(3)=3\cdot 4;\ 2\cdot\Delta(4)=4\cdot 5;\ 2\cdot\Delta(5)=5\cdot 6$$

Es gilt also allgemein: $2\cdot\Delta(n)=n\cdot(n+1)$



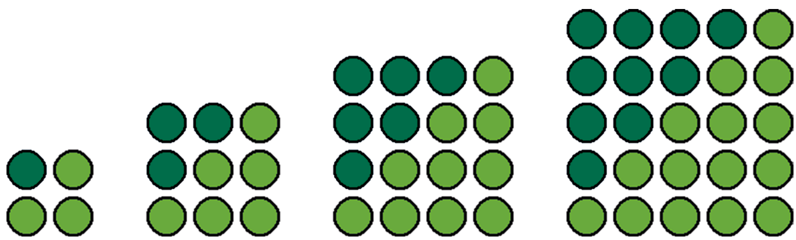
Formel

Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen
Für die *n*-te Dreieckszahl $\Delta(n)$, also für die Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen, gilt:

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

◄

Eine alternative Möglichkeit, diese Formel herzuleiten, ergibt sich aus der folgenden Abbildungssequenz, bei der jeweils zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen-Muster sich zu einem Quadrat ergänzen:



$$\Delta(1)+\Delta(2)=2^2;\Delta(2)+\Delta(3)=3^2\;\; \Delta(3)+\Delta(4)=4^2;\Delta(4)+\Delta(5)=5^2.$$

Es gilt also allgemein für $n \geq 2 : \Delta(n-1)+\Delta(n)=n^2$, in Worten:

- Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ergibt eine Quadratzahl.

Da sich die beiden aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen $\Delta(n-1)$ und $\Delta(n)$ nur um die natürliche Zahl *n* unterscheiden, nämlich $\Delta(n)=\Delta(n-1)+n$, ergibt sich hieraus

$\Delta(n-1)+\Delta(n)=\left[\Delta(n)-n\right]+\Delta(n)=n^2$, also

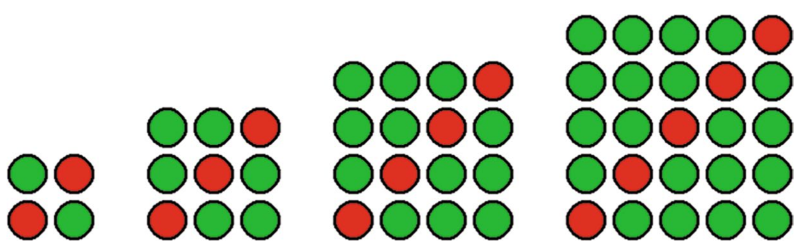
$2 \cdot \Delta(n)=n^2+n$ und somit ebenfalls $\Delta(n)=\frac{1}{2} \cdot \left(n^2+n\right)=\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$.

Aus der folgenden Sequenz ergibt sich

$$2 \cdot \Delta(1)+2=2^2;\;\; 2 \cdot \Delta(2)+3=3^2;\;\; 2 \cdot \Delta(3)+4=4^2;\;\; 2 \cdot \Delta(4)+5=5^2,$$

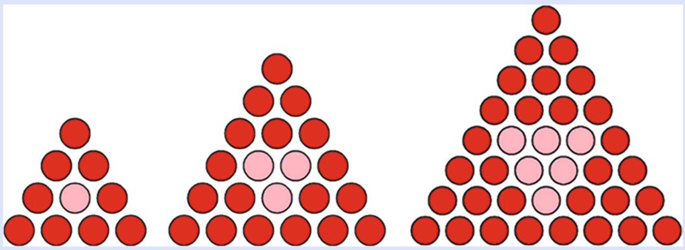
also allgemein $2 \cdot \Delta(n)+(n+1)=(n+1)^2$.

Hieraus folgt: $2 \cdot \Delta(n)=(n+1)^2-(n+1)$ und weiter $2 \cdot \Delta(n)=n^2+n$, vgl. Abb.



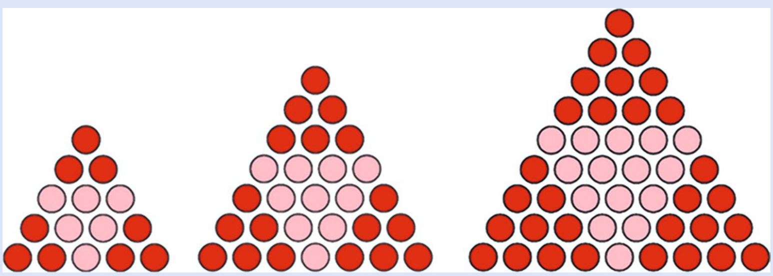
Durch unterschiedliche Färbungen von Teilfiguren lassen sich mithilfe der beiden Darstellungsformen weitere Gesetzmäßigkeiten für Dreieckszahlen entdecken, vgl. die folgenden Beispiele. Ob die Pythagoreer diese Zusammenhänge auch entdeckt haben, ist nicht bekannt, es erscheint aber durchaus möglich.

Beispiel 1



$\Delta(4) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(1)$; $\Delta(6) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(2)$; $\Delta(8) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(3)$.

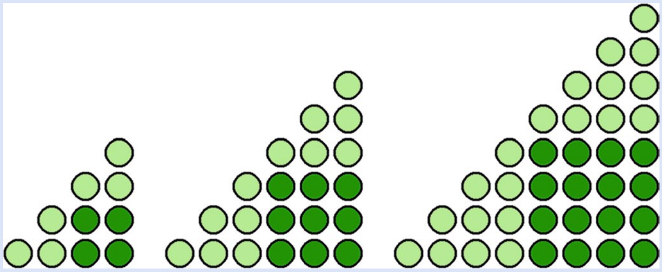
- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1)$.



$\Delta(5) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(3)$; $\Delta(7) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(4)$; $\Delta(9) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(5)$.
Die Beziehung gilt auch für $n = 3$: $\Delta(3) = 6 = 3 \cdot \Delta(1) + \Delta(2)$.

- Für ungerade Zahlen $2n+1$ gilt also allgemein:
  $\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1)$.

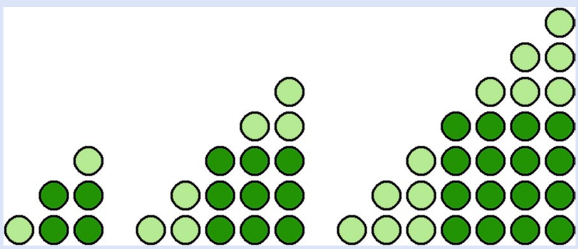
Beispiel 2



$\Delta(4) = 2 \cdot \Delta(2) + 2^2$; $\Delta(6) = 2 \cdot \Delta(3) + 3^2$; $\Delta(8) = 2 \cdot \Delta(4) + 4^2$.

- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 2 \cdot \Delta(n) + n^2$

Wegen $\Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$ folgt hieraus:
$\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1)$, vgl. Beispiel 1.

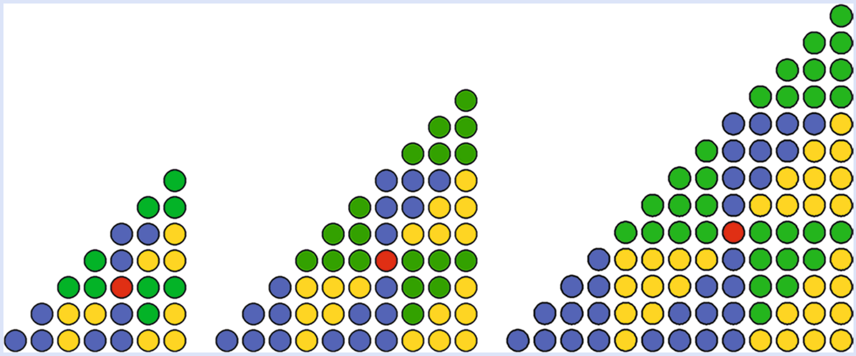


$\Delta(3) = 2 \cdot \Delta(1) + 2^2$; $\Delta(5) = 2 \cdot \Delta(2) + 3^2$; $\Delta(7) = 2 \cdot \Delta(3) + 4^2$.

- Für ungerade Zahlen $2n+1$ gilt also allgemein: $\Delta(2n+1) = 2 \cdot \Delta(n) + (n+1)^2$

Wegen $\Delta(n) + \Delta(n+1) = (n+1)^2$ folgt hieraus:
$\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1)$, vgl. Beispiel 1.

Beispiel 3

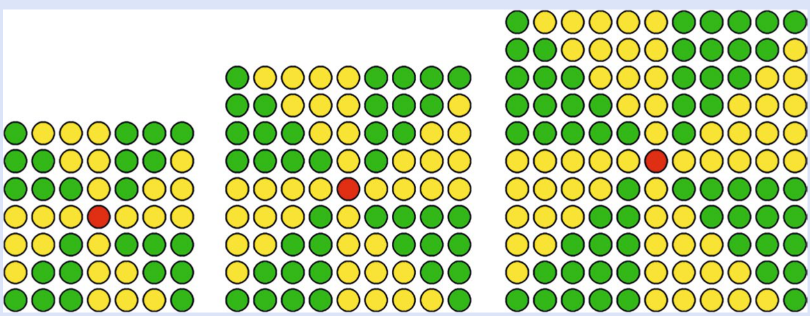


$\Delta(7)=9\cdot\Delta(2)+1$; $\Delta(10)=9\cdot\Delta(3)+1$; $\Delta(10)=9\cdot\Delta(4)+1$.

- Für natürliche Zahlen vom Typ $3n+1$, also für Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, gilt allgemein: $\Delta(3n+1)=9\cdot\Delta(n)+1$

Die Beziehung gilt auch für $n=1$: $\Delta(4)=10=9\cdot\Delta(1)+1$.

Beispiel 4



$8\cdot\Delta(3)+1=7^2$; $8\cdot\Delta(4)+1=9^2$; $8\cdot\Delta(5)+1=11^2$.

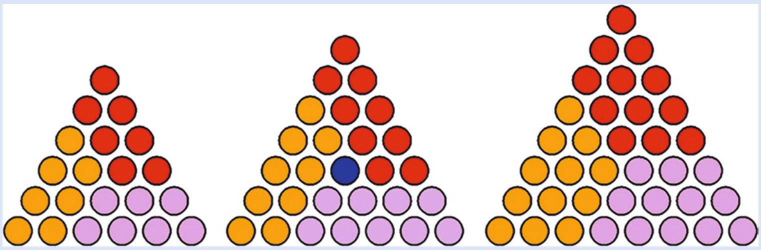
- Allgemein gilt: $8\cdot\Delta(n)+1=(2n+1)^2$.

Die Beziehung gilt auch für $n=1$: $8\cdot\Delta(1)+1=3^2$ sowie für $n=2$: $8\cdot\Delta(2)+1=5^2$.

Auf diese Formel machte der griechische Mathematiker **Diophant** (vgl. Kap. 3) aufmerksam; vielleicht wurde sie aber bereits vorher entdeckt.

Beispiel 5
Die *Differenz* von Dreieckszahlen kann man durch symmetrische Trapeze veranschaulichen. Die drei abgebildeten Figuren zeigen die Beziehungen

$$3\cdot\left[\Delta(4)-\Delta(2)\right]=\Delta(6);\ 3\cdot\left[\Delta(5)-\Delta(3)\right]+1=\Delta(7);\ 3\cdot\left[\Delta(5)-\Delta(2)\right]=\Delta(8)$$



Allgemein gilt:

$$3\cdot\left[\Delta(2n)-\Delta(n)\right]=\Delta(3n),\ 3\cdot\left[\Delta(2n+1)-\Delta(n+1)\right]+1=\Delta(3n+1)\text{ und}$$
$$3\cdot\left[\Delta(2n+1)-\Delta(n)\right]=\Delta(3n+2).$$

1.1.2 Summe der ersten *n* ungeraden natürlichen Zahlen

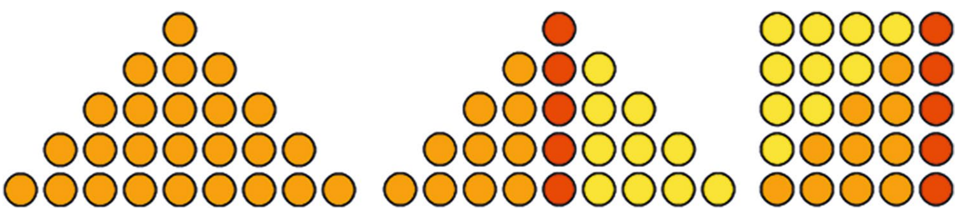
Bildet man fortlaufend die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen, so erhält man die Zahlenfolge

$$1=1^2;1+3=2^2;1+3+5=3^2;1+3+5+7=4^2;1+3+5+7+9=5^2\ \ldots$$

also die Folge der Quadratzahlen.

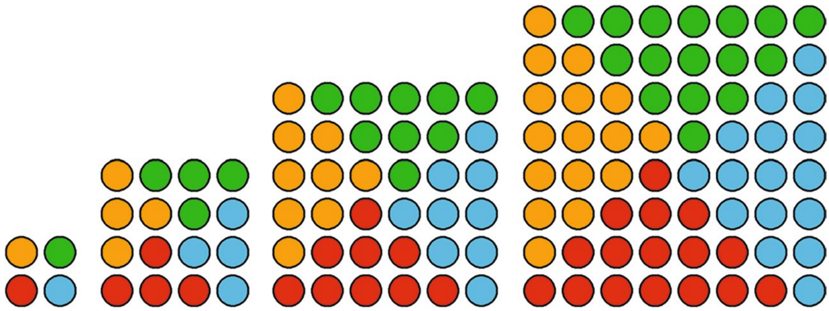
Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen kann man durch *symmetrische* Dreiecke veranschaulichen, vgl. die folgende Abb.links.

Durch Umlegen der Steine kann man leicht zeigen, dass sich als Summe der ersten n ungeraden Zahlen tatsächlich stets eine Quadratzahl ergibt, vgl. die Abbildungen in der Mitte und rechts.



Eine alternative Mglichkeit, um nachzuweisen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ergibt, kann man den folgenden Abbildungen entnehmen.

Hier ist:
$4 \cdot 1 = 2^2$; $4 \cdot (1+3) = 4^2$; $4 \cdot (1+3+5) = 6^2$; $4 \cdot (1+3+5+7) = 8^2$.



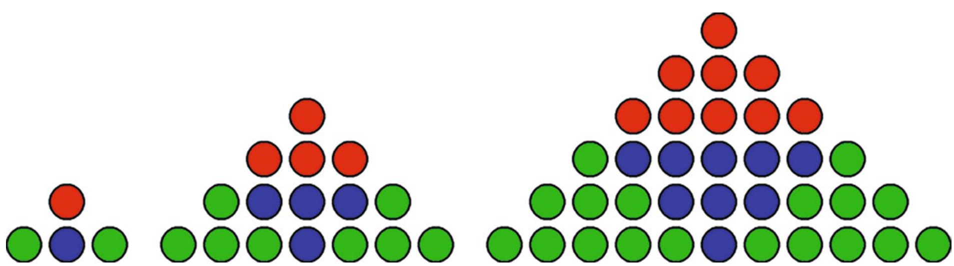
Allgemein gilt also $4 \cdot \left[\, 1+3+5+\ldots+(2n-1) \,\right] = (2n)^2 = 4n^2$ und daher
$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

Wenn die Anzahl der waagerechten Reihen in dieser symmetrischen Figur *gerade* ist, kann man ein besonderes Muster bilden:

Die symmetrische Figur kann in vier zueinander kongruente Teilfiguren unterteilt werden.

- Die erste 2-zeilige Figur links setzt sich aus vier einzelnen Steinen zusammen, also $1+3 = 4 \cdot 1$;
- die zweite 4-zeilige Figur enthält viermal die erste (2-zeilige) Figur, also $(1+3)+(5+7) = 4 \cdot (1+3)$;
- die dritte 6-zeilige Figur enthält viermal die 3-zeilige Figur, also $(1+3+5)+(7+9+11) = 4 \cdot (1+3+5)$;

usw.



Man kann dies auch so beschreiben: Oberhalb einer gedachten horizontalen Mittellinie liegt ein Viertel aller Steine der Figur, unterhalb liegen drei Viertel.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} \ldots$$

Allgemein gilt also:

Regel

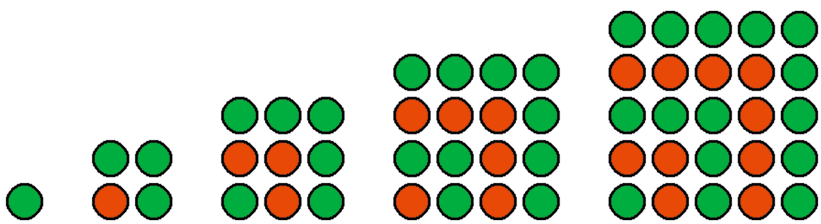
Eigenschaft der Summe der ersten 2*n* ungeraden natürlichen Zahlen
Betrachtet man die Summe der ersten $2n$ ungeraden natürlichen Zahlen, dann ist der Anteil der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ein-Drittel-mal so groß wie die Summe der nächsten n ungeraden natürlichen Zahlen. ◄

Diese Eigenschaft der Summe der ungeraden natürlichen Zahlen wurde von Galileo Galilei (1564–1642) dokumentiert; sie hätte aber durchaus bereits von den Pythagoreern entdeckt werden können.

1.1.3 Winkelhaken

Wie in Abschn. 1.1.1 zu sehen war, lassen sich Quadrate auf unterschiedliche Weise durch Dreiecksformen aus bunten Steinen auslegen.

Ein weiteres Muster entsteht durch das Legen von sog. **Gnomonen,** auch Winkelhaken genannt: Oberhalb und rechts von einem vorhandenen Quadrat wird noch eine zusätzliche Reihe von bunten Steinen hinzugefügt.



Die Anzahl der hinzukommenden Steine ist jeweils *ungerade.*

In den Beispielen der Abbildung gilt:

$$1 = 1^2;\ 1+3 = 2^2;\ 1+3+5 = 3^2;\ 1+3+5+7 = 4^2;\ 1+3+5+7+9 = 5^2.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Regel:

Formel

Summe der ersten *n* ungeraden natürlichen Zahlen
Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist eine Quadratzahl und es gilt:

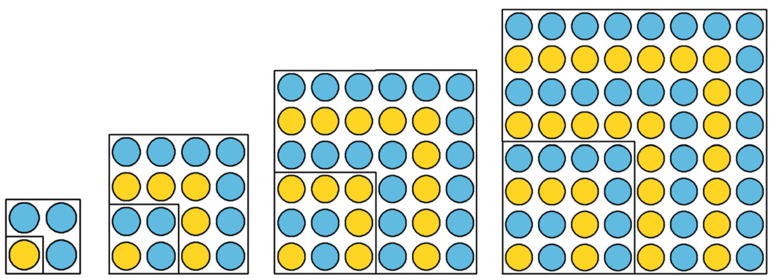
$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$ ◄

Analog könnte man auch *verlängerte* Winkelhaken betrachten, um eine Formel für die Summe der ersten n *geraden* natürlichen Zahlen aufzustellen:

$$2 = 1 \cdot 2; 2 + 4 = 2 \cdot 3; 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4; 2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5,$$

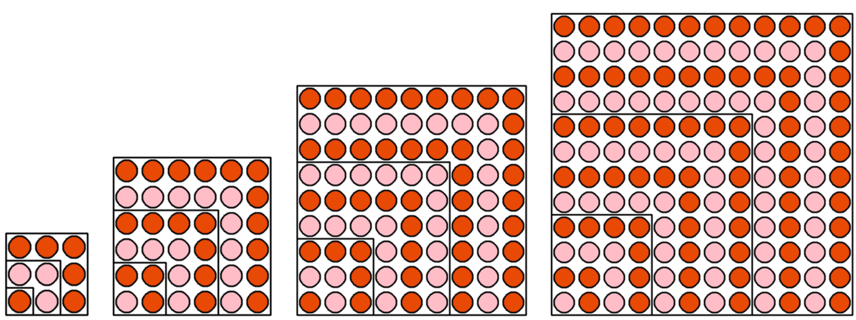
allgemein: $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = \sum_{k=1}^{n} (2k) = n \cdot (n+1)$; diese Formel folgt natürlich unmittelbar aus der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

An der Winkelhakenfigur lässt sich auch die in Abschn. 1.1.2 beschriebene Eigenschaft des 1-zu-3-Verhältnisses der Summe ungerader Zahlen ablesen.

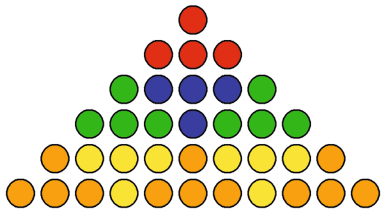


An der Darstellungsform mit Winkelhaken kann man außerdem entdecken, wie sich die o.a. Regel verallgemeinern lässt:

$$\begin{aligned} 1:3:5 &= (1+3):(5+7):(9+11) = (1+3+5):(7+9+11):(13+15+17) \\ &= (1+3+5+7):(9+11+13+15):(17+19+21+23) \end{aligned}$$



Hinweis: Diese Verallgemeinerung lässt sich auch an den in Abschn.1.1.2 betrachteten symmetrischen Dreiecken veranschaulichen, vgl. die folgende Abbildung.



1.1.4 Pythagoreische Zahlentripel

Zahlentripel $(a; b; c)$ aus natürlichen Zahlen *a, b, c* werden als **pythagoreische Zahlentripel** bezeichnet, wenn sie die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Bereits den Babyloniern war bekannt, dass man *alle* diese Zahlentripel $(a\,;b\,;c)$ mithilfe des Ansatzes $a = u^2 - v^2$, $b = 2 \cdot u \cdot v$ und $c = u^2 + v^2$ finden kann (wobei $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$).

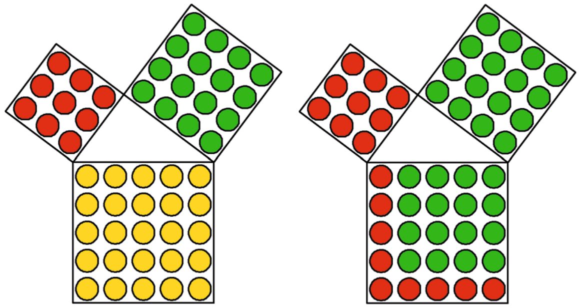
Zum Beweis vgl. beispielsweise *Mathematik ist schön,* Abschn.2.7.4.

Die Tripel mit $u \leq 5$ können der folgenden Tabelle entnommen werden.

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2 \cdot u \cdot v$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41

Um solche Zahlentripel zu finden, kann man aber auch anschaulich vorgehen und geeignete Muster aus bunten Steinen verwenden. Die folgenden beiden Abbildungen verdeutlichen die zugrunde liegende Idee:

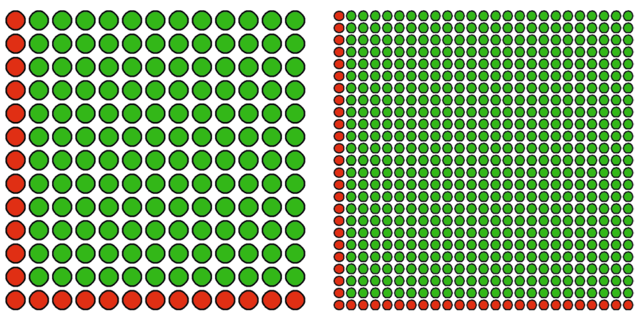
Damit die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, muss die Anzahl der rot gefärbten Steine sowohl eine Quadratzahl sein als auch durch einen Winkelhaken dargestellt werden können.



Und da die Winkelhaken aus einer ungeraden Anzahl von Steinen bestehen, kommen also nur die ungeraden Quadratzahlen infrage. Die kleinste ungerade Quadratzahl ist die Zahl 9; die Wurzel aus dieser Zahl bestimmt die Seitenlänge des kleineren Kathetenquadrats in der o.a. Pythagoras-Figur.

Die nächstgrößere ungerade Quadratzahl ist 25: Ein Winkelhaken aus 25 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 12, d.h., die Zahlen 5, 12 und 13 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. links.

Dann folgt die ungerade Quadratzahl 49: Ein Winkelhaken aus 49 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 24, d.h., die Zahlen 7, 24 und 25 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. rechts.



Auf diese Weise findet man *unendlich viele* pythagoreische Zahlentripel, die alle die Eigenschaft haben, dass sich die Länge der größeren Kathete von der Länge der Hypotenuse um 1 LE unterscheidet, da nur *ein* Winkelhaken um das größere Kathetenquadrat gelegt ist:

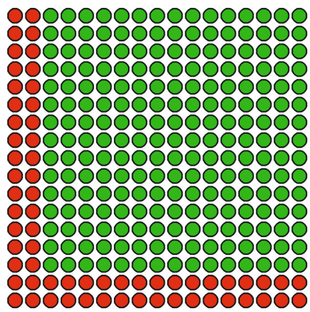
$(3; 4; 5)$; $(5; 12; 13)$; $(7; 24; 25)$; $(9; 40; 41)$; $(11; 60; 61)$ usw.

- Allgemein ergibt sich: Die Zahlen $\left(2n+1;\ 2n\cdot(n+1);\ 2n\cdot(n+1)+1\right)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 1 LE.

Hinweis: Die Terme für die Seitenlängen b und $c = b + 1$ ergeben sich aus folgender Rechnung: Aus $(2n+1)^2 + b^2 = (b+1)^2$ ergibt sich $(2n+1)^2 = 2b+1$, also $2b = 4n^2 + 4n$ und somit $b = 2n^2 + 2n = 2n \cdot (n+1)$.

In der o.a. Tabelle mit Pythagoras-Tripeln kommen aber auch Zahlentripel vor, die nicht mithilfe nur *eines* Winkelhakens dargestellt werden können.

Beim Tripel $(8; 15; 17)$ unterscheiden sich die Seitenlängen von b und c um 2. Daher werden für die Darstellung *zwei* Winkelhaken (aus $31 + 33 = 64 = 8^2$ Steinen) benötigt, vgl. die folgende Abbildung.



- Allgemein kann man zeigen: Die Zahlen $(2n;\ n^2 - 1; n^2 + 1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 2 LE.

Im Prinzip kann man mithilfe angelegter Winkelhaken alle möglichen pythagoreischen Zahlentripel ermitteln. Bei dieser Vorgehensweise entdeckt man allerdings nicht bei jeder möglichen Figur ein neues Tripel.

Setzt man beispielsweise $n = 2$ in die allgemeine Form $(2n;\ n^2 - 1; n^2 + 1)$ ein, so ergibt sich das Tripel $(4; 3; 5)$.

Beim Einsetzen von $n = 3$ erhält man $(6; 8; 10)$ das ist das Doppelte des bekannten Tripels $(3; 4; 5)$.

Man kann beweisen, dass durch Hinzufügen von *drei* Winkelhaken kein einziges Tripel hinzukommt, das nicht bereits durch das Anhängen von einem oder zwei Winkelhaken entdeckt wurde.

Übrigens: Das in der Tabelle oben enthaltene pythagoreische Tripel $(20; 21; 29)$ kann mithilfe eines Quadrats der Seitenlänge 21 und *acht* Winkelhaken mit $43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 = 400 = 20^2$ Steinen veranschaulicht werden.