DELTA PUBLICACIONES

EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

Emilio Gómez Déniz (Coord.)

Nancy Dávila • Pablo Dorta • Mª Martel • Juan M. Hernández

Ejercicios resueltos de Matemáticas empresariales

Los autores

Emilio Gómez Déniz es Catedrático de Universidad y miembro del Instituto de Turismo y Desarrollo Económico Sostenible (TIDES). En investigación trabaja en teoría y aplicaciones con distribuciones de probabilidad en diversos campos entre los que destacan estadística actuarial, turismo y desigualdad. Editor Asociado de revistas de investigación internacionales y revisor de Mathematical Reviews.

Nancy Dávila Cárdenes es Profesora Titular de Universidad y miembro del Instituto de Turismo y Desarrollo Económico Sostenible (TIDES). Entre sus líneas de investigación se encuentran la estadística aplicada a diferentes campos como la educación, el deporte y el turismo, así como a otros problemas de índole social.

Pablo Dorta González es Catedrático de Universidad y miembro del Instituto de Turismo y Desarrollo Económico Sostenible (TIDES). Su línea de Investigación actual es la aplicación de métodos cuantitativos en el estudio de diversos fenómenos socioeconómicos, con especial énfasis en la evaluación de la Ciencia.

María Martel Escobar es Profesora Titular de Universidad y miembro del Instituto de Turismo y Desarrollo Económico Sostenible (TIDES). Sus líneas de investigación preferentes son los métodos bayesianos aplicados, con especial énfasis en la auditoría de cuentas y aplicaciones en salud.

Juan M. Hernández Guerra es Profesor Titular de Universidad y miembro del Instituto de Turismo y Desarrollo Económico Sostenible (TIDES). Su línea de investigación actual es la aplicación de métodos de redes complejas en el estudio de diversos fenómenos socioeconómicos, con especial énfasis en el Turismo, Pesca y Acuicultura.

Todos los autores pertenecen al Departamento de Métodos Cuantitativos de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (España).

Ejercicios resueltos de
Matemáticas empresariales

COORDINADOR

Emilio Gómez Déniz

AUTORES

Emilio Gómez Déniz
Nancy Dávila Cárdenes
Pablo Dorta González
María Martel Escobar
Juan M. Hernández Guerra

DELTA
PUBLICACIONES

FICHA DE CATALOGACIÓN BIBLIOGRÁFICA

Título: Manual básico de Matemáticas empresariales
Coordinador: Emilio Gómez Déniz
Autores: Emilio Gómez Déniz, Nancy Dávila Cárdenes, Pablo Dorta González,
María Martel Escobar y Juan M. Hernández Guerra
ISBN: 978-84-17526-86-3
Edición: Primera
Año de edición: 2021
Páginas: 252
Formato: 17×24 cm
Área: Universidad
Materia(s): PBW - Matemáticas aplicadas
PBKA - Cálculo
Encuadernación: Rústica

Editor: Fernando M. García Tomé
Diseño de cubierta: Outdesign, Publishing Services
Preimpresión: Outdesign, Publishing Services
Impresión: Print House

Depósito Legal M-24630-2021

Impreso en España (UE) / Printed in Spain (EU)

(0920-15)

www.deltapublicaciones.com

PRÓLOGO

Tras la incorporación al Espacio Europeo de Educación Superior y el diseño de los nuevo grados en el marco del proceso de Bolonia hace ya más de diez años, las titulaciones en las Facultades de Economía y Empresa fueron rediseñadas para adaptarse a este nuevo marco en el que básicamente tuvieron que ajustar los contenidos de las asignaturas para buscar que los estudiantes alcanzaran unas competencias básicas y nucleares definidas en los mismos, así como para poder dar entrada en el grado a las prácticas en empresas y los trabajos de fin de título.

En este contexto, nos tuvimos que plantear qué contenidos mínimos debería un estudiante del grado en Administración y Dirección de Empresas estudiar para alcanzar las competencias establecidas en el título. Sobre esa idea desarrollamos este manual de ejercicios y problemas de Matemáticas Empresariales.

Este texto es fruto de la experiencia de un grupo de docentes que hemos venido impartiendo la asignatura de Matemáticas Empresariales, en todas las variantes que esta asignatura ha tenido en cuanto a sus contenidos conforme se ha ido adaptando a las diferentes reformas de los planes de estudio.

Fundamentalmente está constituído por ejercicios y problemas de Cálculo aplicados a las Ciencias Económicas y Empresariales que pueden resultar útiles para el estudio en aquéllas titulaciones de Administración y Dirección de Empresas así como en las dobles titulaciones de Grado en Administración y Dirección de Empresas y Grado en Derecho y Grado en Administración y Dirección de Empresas y Grado en Turismo.

Cada capítulo comienza con una breve introducción teórica e incluye numerosos ejemplos resueltos, tanto de problemas de desarrollo como de ejercicios tipo test, incorporando también problemas propuestos y cuestiones tipo test no resueltos pero cuyas soluciones se pueden encontrar al final del texto.

Sabemos que muchos estudiantes al llegar a la Facultad de Economía, Empresa y Turismo no disponen de los conocimientos básicos que se requieren para superar las asignaturas más cuantitativas, como Matemáticas, Estadística y Econometría. En ningún caso se pretende que se conviertan en matemáticos sino que sepan utilizar las matemáticas para dar respuesta a muchos problemas que se plantean en el ámbito económico y que identifiquen las matemáticas que hay detrás de muchos conceptos en este ámbito.

Basándonos en estas ideas se ha desarrollado este texto, que se estructura en cuatro capítulos. El primero centrado en el estudio de funciones reales de una variable. En muchos casos, se supone que los estudiantes deben tener adquiridos estos conocimientos desde la formación preuniversitaria. Sin embargo, la experiencia y las diferentes opciones de acceso evidencian que es aconsejable dedicar un poco de tiempo a reforzar el estudio de las funciones elementales, como puede ser la función lineal para plantear problemas de equilibrio económico o la función exponencial para entender los problemas de capitalización, el estudio de las derivadas como fundamento del análisis económico marginal, el cálculo integral para aplicarlo al cálculo del excedente del consumidor y productor o el cálculo de las funciones de densidad de probabilidad en Estadística.

Los capítulos 2 y 3 están dedicados a una introducción al estudio de las funciones de varias variables, básicamente funciones de dos variables. En el capítulo 2 se presentan ejercicios básicos que resultan fundamentales para ser aplicadas en el capítulo 3 a la optimización sin restricciones y con restricciones de igualdad. Acabamos en el capítulo 4 con una introducción a la programación lineal, que se emplea fundamentalmente en la resolución de problemas de planificación y gestión.

Este manual pretende ser una ayuda para el desarrollo del trabajo autónomo de los estudiantes, con más relevancia, si cabe, en estos tiempos marcados por las nuevos modelos de docencia sobrevenidos por los efectos de la pandemia provocada por el COVID-19. De forma que la intención es que sirva como material de referencia y que ayude a afrontar con éxito las asignaturas más cuantitativas en los estudios de Economía y Empresa.

La confección de este texto se ha llevado a cabo utilizando el compilador LaTeX con el apoyo de numerosos paquetes de este compilador que aparecen descritos en Borbón y Mora (2013). Además, todos los gráficos que aparecen en el manual han sido desarrollados utilizando el programa Wolfram Mathematica (`Mathematica`® `v.12.0`).

ÍNDICE GENERAL

1 FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

En este capítulo se muestran y se proponen ejercicios y problemas de algunos conceptos básicos relacionados con las funciones reales de variable real, como son el dominio, operaciones que se pueden realizar con las mismas, la derivada y la integración, ilustrándose la situación, en muchas ocasiones, con las gráficas correspondientes.

El concepto de función como un objeto matemático independiente, susceptible de ser estudiado por sí solo, no apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables, debiéndose a Leibniz los términos de variable y función. La primera vez que aparece la notación $f(x)$ fue en el siglo XVIII por los matemáticos A.C. Clairaut y Leonhard Euler.

El concepto de función es uno de los más importantes de las matemáticas, cuya aplicación es evidente en todas aquellas disciplinas que necesitan las matemáticas como herramienta de trabajo. Una función es una relación entre dos o más magnitudes que expresa cómo una cantidad depende de otra. Por ejemplo, en Economía, el consumo, C, depende de la renta, Y, que se expresa mediante la expresión $C = f(Y)$. Otros ejemplos de funciones en este escenario lo constituyen la función de oferta (indica la cantidad total que los fabricantes están dispuestos a producir a un precio determinado), la función de demanda (indica la cantidad que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio determinado), la función de utilidad (expresa el grado de satisfacción de un consumidor al consumir un bien), etc.

1.1 Breve resumen teórico

Funciones elementales

Polinómica grados 0 ó 1:

Expresión: $f(x) = ax + b$.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : (-b/a, 0), \ a \neq 0, \\ \\ \overline{OY} : (0, b). \end{cases}$
- Características: $\begin{cases} a \text{ es la pendiente de la recta.} \\ \quad a < 0, \ \text{decreciente.} \\ \quad a = 0, \ \text{constante.} \\ \quad a > 0, \ \text{creciente.} \\ b \text{ es la ordenada en el origen.} \end{cases}$
- Gráficas: Son rectas (algunas se muestran en la figura 1.1).

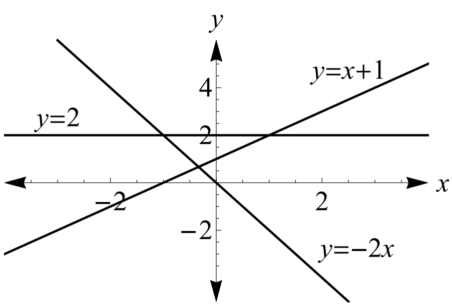

Figura 1.1
Rectas

- Límites y continuidad:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, según signo de $a \neq 0$.

- Continua en su dominio.

Polinómica grado 2:

Expresión: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$

- Dominio: $\mathbb{R}$.

- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : (\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0), \\ \text{(puede no haber punto de corte, uno (tangencia) o dos)}. \\ \\ \overline{OY} : (0, c). \end{cases}$

- Características: $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \text{ es el eje de simetría.} \\ a < 0, \text{ cóncava } (\bigcap), \text{con máximo en } \; x = -\dfrac{b}{2a}. \\ \\ a > 0, \text{ convexa } (\bigcup), \text{con mínimo en } \; x = -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$

- Gráficas: Son parábolas (se muestran algunas en la figura 1.2).

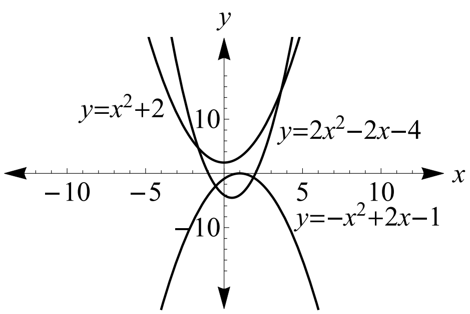

Figura 1.2
Parábolas

- Límites y continuidad:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, según signo de a.

- Continua en su dominio.

Polinómica grado n:

Expresión: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : (x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0), \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \text{ soluciones reales de } f(x) = 0), \\ \\ \overline{OY} : (0, a_0). \end{cases}$
- Características: Con las soluciones reales es posible determinar el signo de $f(x)$.
- Gráficas: En la figura 1.3 se muestran dos funciones polinómicas de grado 3 y 4.

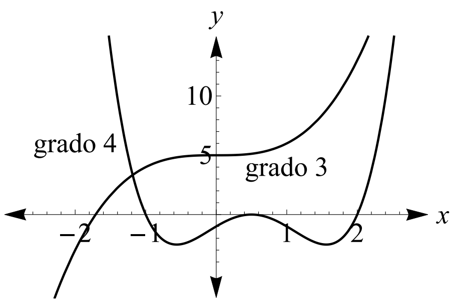

Figura 1.3
Funciones polinómicas

- Límites y continuidad:

  - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, según paridad y signo de a_n.

  - Continua en su dominio.

Racional:

Expresión: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x)$ polinomios (irreducibles).

- Dominio: $\mathbb{R} - \{k_i\}$, con: $Q(k_i) = 0$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : (x,0) \text{ con } P(x) = 0. \\ \overline{OY} : (0,y) \text{ con } P(0) = y. \end{cases}$
- Características: Debe simplificarse para que la fracción sea irreducible.
- Gráficas: Son hipérbolas (véase la figura 1.4).

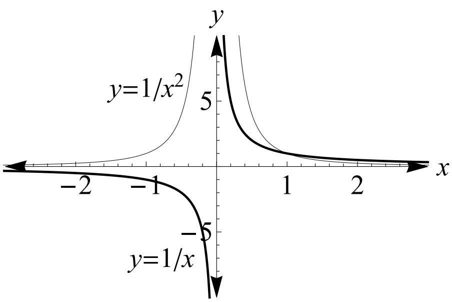

Figura 1.4
Hipérbolas, $y = 1/x$ en trazo grueso e $y = 1/x^2$ en trazo fino

- Límites y continuidad:
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \begin{cases} \pm\infty, & n > m, \\ a_n/b_n, & n = m, \\ 0, & n < m, \end{cases}$ siendo n y m los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.
  - $\lim\limits_{x \to k} f(x) = \pm\infty, \quad k : Q(k) = 0, x = k$ es asíntota vertical.
  - Continua en su dominio.

Potencial:

Expresión: $f(x) = x^r$, con: $r \in \mathbb{Z}$, polinómica o racional.

$$r \in \mathbb{Q}, \quad r = \frac{p}{q} \text{ (irreducible)}.$$
$$f(x) = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}.$$

- Dominio: Depende de los valores de p y q.
- Puntos de corte: $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$: $(0,0)$ (según dominio).
- Características: Dependen de los valores de p y q.
- Gráficas: En la figura 1.5 se muestran dos funciones potenciales.

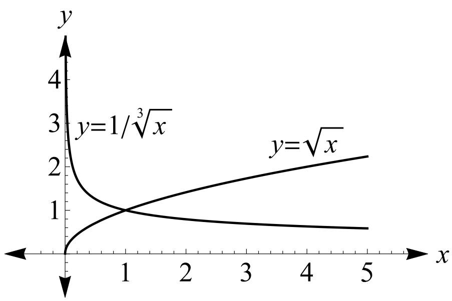

Figura 1.5
Función potencial

- Límites y continuidad:
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ o bien 0.
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (índice impar) o bien 0.
  - Posibilidad de casos con asíntota vertical.
  - Continua en su dominio.

Exponencial:

Expresión: $f(x) = a^x$ con $a > 0$.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \text{ no corta al eje horizontal.} \\ \\ \overline{OY} : (0,1). \end{cases}$
- Características: $\begin{cases} 0 < a < 1, \text{ decreciente.} \\ \\ a > 1 \text{ creciente.} \\ \\ \text{Gráfica en la parte positiva del eje } \overline{OY}. \end{cases}$
- Gráficas: Véase la figura 1.6 en la que se muestran dos funciones exponenciales.

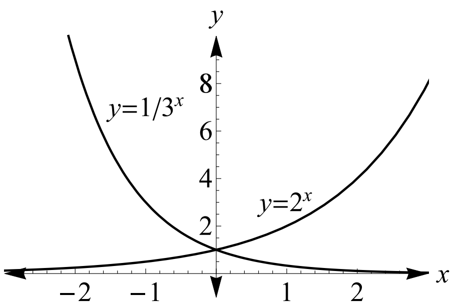

Figura 1.6
Función exponencial

- **Límites y continuidad**:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \text{ si } 0 < a < 1 \\ 0, \text{ si } a > 1. \end{cases}$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 < a < 1 \\ +\infty, \text{ si } a > 1. \end{cases}$

- $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Continua en su dominio.

Exponencial natural:

Expresión: $f(x) = e^x$ con $e = 2.718281\ldots$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \text{ no corta.} \\ \\ \overline{OY} : (0,1). \end{cases}$
- Características: Gráfica en la parte positiva del eje $\overline{OY}$.
- Gráfica: En la figura 1.7 aparece representada la función exponencial natural.

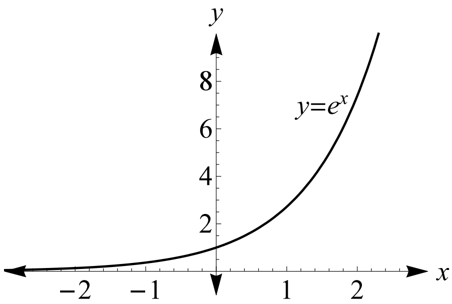

Figura 1.7
Función exponencial natural

- Límites y continuidad:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
  - $y = 0$ es asíntota horizontal.
  - Continua en su dominio.

Modelos exponenciales:

Expresión: $f(x) = Ce^{kx}$ con C, k constantes.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : f(x) > 0 \text{ ó } f(x) < 0 \text{ (según } C) \Longrightarrow \text{ no corta.} \\ \overline{OY} : (0, C). \end{cases}$
- Características: Gráfica según las constantes C y k.
- Gráficas: Véase la figura 1.8.

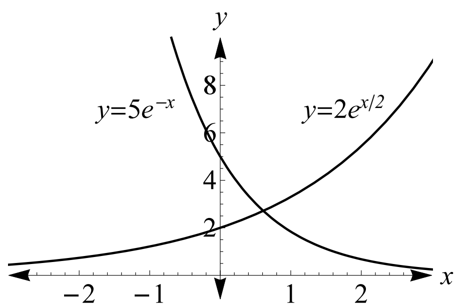

Figura 1.8
Función exponencial general

- Límites y continuidad:
  - Límites según las constantes C y k.
  - $y = 0$ es asíntota horizontal.
  - Continua en su dominio.

Logarítmica:

Expresión: $f(x) = \log_a x$, $a > 0$.

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y \Longrightarrow x > 0.$$

- Dominio: $\mathbb{R}^+$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : (1,0), \text{ pues } \log_a 1 = 0. \\ \overline{OY} : \text{ No corta pues } x > 0. \end{cases}$
- Características: $\begin{cases} \text{Gráfica a la derecha del eje } \overline{OX}. \\ \\ \text{Es la inversa de la exponencial, con gráficas} \\ \text{simétricas respecto a la recta } y = x. \end{cases}$
- Gráficas: En la figura 1.9 se muestra la representación gráfica de dos funciones logarítmicas.

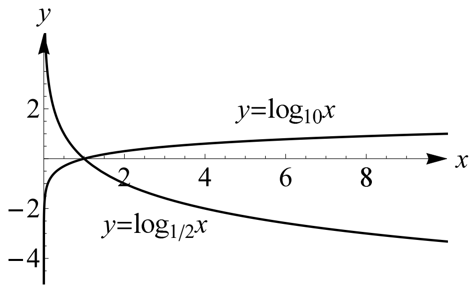

Figura 1.9
Función logarítmica

- Límite y continuidad:

  - $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty, \text{ si } 0 < a < 1. \\ -\infty, \text{ si } a > 1. \end{cases}$

    $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ si } 0 < a < 1. \\ +\infty,, \text{ si } a > 1. \\ x = 0 \text{ es asíntota vertical.} \end{cases}$

  - Continua en su dominio.

Logaritmo neperiano:

Expresión: $f(x) = \log_e x = Lx = \ln x$.

$$y = \ln x \Longleftrightarrow x = e^y \Longrightarrow x > 0.$$

Se verifica, $e^{\ln x} = x$; $\ln e^x = x$.

- Dominio: $\mathbb{R}^+$.
- Puntos de corte: $\begin{cases} \overline{OX} : (1,0), \text{ pues } \ln 1 = 0. \\ \overline{OY} : \text{ No corta pues } x > 0. \end{cases}$
- Características: $\begin{cases} \text{Es la inversa de la exponencial, con gráficas} \\ \text{simétricas respecto a la recta } y = x. \\ \\ \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \\ \ln x^n = n \ln x \end{cases}$
- Gráfica: La función logaritmo neperiano aparece representada en la figura 1.10.

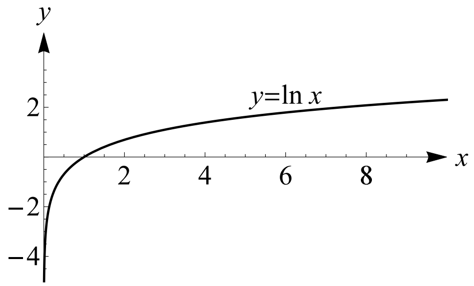

Figura 1.10
Función logaritmo neperiano

- Límites y continuidad:
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
  - $x = 0$ es asíntota vertical.
  - Continua en su dominio.

Reglas de cálculo de derivadas

Operación	**Derivada**
Suma $y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
Producto por escalar $y = c \cdot f(x)$	$y' = c \cdot f'(x)$
Producto $y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente $y = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Derivadas de funciones elementales y compuestas

Tipo	**Derivada**
Potencial $y = f(x) = x^n$	$y' = f'(x) = nx^{n-1}$
Potencial compuesta $y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Logaritmo neperiano $y = f(x) = \ln x$	$y' = f'(x) = \frac{1}{x}$
Logaritmo compuesto $y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
Exponencial natural $y = f(x) = e^x$	$y' = f'(x) = e^x$
Exponencial natural compuesta $y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Exponencial general $y = f(x) = a^x$	$y' = f'(x) = a^x \cdot \ln a$
Exponencial general compuesta $y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$

Estudio local de funciones

$a)$ Signo de $f'(x)$:

- Si $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente.
- Si $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente.
- Si $f'(x) = 0 \Longrightarrow x^*$, puntos críticos (posibles máximos o mínimos).

b) Signo de $f''(x)$:

- Si $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa (forma de $\cup$).
- Si $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava (forma de $\cap$).
- Si $f''(x) = 0 \Longrightarrow$ posible punto de inflexión.

c) Clasificación de puntos críticos, x^* con $f'(x^*) = 0$:

- Si en x^* hay un cambio de decreciente a creciente (o al revés) $\Longrightarrow$ mínimo local (máximo local).
- Si $f''(x^*) > 0 \Longrightarrow$ mínimo local.
- Si $f''(x^*) < 0 \Longrightarrow$ máximo local.
- Si $f'(x^*) = 0 \Longrightarrow$ criterio general, se estudia el orden y el signo de la primera derivada no nula:
  - orden par y positiva (negativa) $\Longrightarrow$ mínimo local (máximo local).
  - orden impar $\Longrightarrow$ punto de inflexión.

Integrales inmediatas y compuestas

Tipo	**Integral**
Potencial	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \; n \neq -1$
Potencial compuesta	$\int f(x)^n f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k, n \neq -1 \quad (*)$
Logaritmo neperiano	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + k$
Logaritmo compuesto	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln f(x) + k \quad (*)$
Exponencial natural	$\int e^x \, dx = e^x + k$
Exponencial natural compuesta	$\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + k \quad (*)$
Exponencial general	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
Exponencial general compuesta	$\int a^{f(x)} f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k \quad (*)$

$(*)$ Basta hacer el cambio $\left\{ \begin{array}{r} t = f(x) \\ dt = f'(x)dx \end{array} \right.$