utb.

Thomas P. Wihler

Mathematik für Naturwissenschaften: Lineare Algebra und mehrdimensionale Differentialrechnung

2. Auflage

utb 3636

Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn
Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau · Wien · Köln
Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto
facultas · Wien
Haupt Verlag · Bern
Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn
Mohr Siebeck · Tübingen
Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen
Psychiatrie Verlag · Köln
Ernst Reinhardt Verlag · München
transcript Verlag · Bielefeld
Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart
UVK Verlag · München
Waxmann · Münster · New York
wbv Publikation · Bielefeld
Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

Thomas P. Wihler

Mathematik für Naturwissenschaften: Lineare Algebra und mehrdimensionale Differentialrechnung

Haupt Verlag
Bern · Stuttgart · Wien

Thomas P. Wihler ist ordentlicher Professor für Mathematik am Mathematischen Institut der Universität Bern. Er schloss 1999 mit dem Diplom und 2003 mit dem Doktorat in Mathematik an der ETH Zürich ab. Nach Lehr- und Forschungsaufenthalten an der University of Minnesota (Minneapolis, USA) und an der McGill University (Montreal, Kanada) leitet er seit 2008 die Arbeitsgruppe « Angewandte und Numerische Mathematik » am Mathematischen Institut der Universität Bern.

Die Deutsche Bibliothek – CIP Einheitsaufnahme
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Satz: Thomas P. Wihler
Umschlagsbild: Olivia Z. Wihler

Printed in Germany

UTB-Band-Nr.: 3636
ISBN 978-3-8252-6139-9

Haupt Verlag AG, Falkenplatz 14, CH-3012 Bern
verlag@haupt.ch

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Bei der Behandlung von praktischen Anwendungen in den Naturwissenschaften, im Ingenieurwesen und weiteren Bereichen kann Mathematik als bedeutendes Werkzeug zur Verfügung stehen. So dient sie beispielsweise dazu, Vorgänge aus den entsprechenden Disziplinen in Form von geeigneten Modellen zu beschreiben oder solche fundiert zu untersuchen. Dabei erlauben mathematische Techniken neben der quantitativen Auswertung eines Modells auch die Beantwortung von zugehörigen qualitativen Fragen. Mathematische Aussagen können dann Vermutungen bekräftigen oder sogar neue Ergebnisse zutage bringen, die bislang unentdeckt geblieben waren.

Freilich sind dem mathematischen Modellierungsprozess auch Grenzen gesetzt, denn häufig weisen reale Anwendungen eine zu hohe Komplexität auf, um alle Zusammenhänge im Rahmen eines mathematischen Modells vollständig abbilden zu können. Ebenso kann es sehr anspruchsvoll oder sogar unmöglich sein, Daten in befriedigendem Umfang oder in genügender Genauigkeit zu beschaffen. Letztlich fehlt bei vielen Fragestellungen auch ein verständliches Prinzip von Ursache und Wirkung.

Das vorliegende Buch bleibt dem Anspruch fern, an die Grenzen des mathematisch Umsetzbaren zu gehen. Wir beschränken uns auf einen kleinen Einblick, wie Mathematik als wichtiges Hilfsmittel in den Naturwissenschaften wirksam zum Einsatz kommen kann. Dazu binden der Stoffinhalt und die Übungsaufgaben eine Vielzahl von Anwendungen aus verschiedenen Disziplinen ein. Auf abstrakte Herleitungen und rigorose mathematische Beweise sowie auf « Drillübungen » verzichten wir bewusst; im Vordergrund stehen die semantischen Aspekte der mathematischen Begriffe und Techniken. Aussagen und Formeln werden zumeist anhand von Beispielen intuitiv hergeleitet und erklärt.

Der Text ist im Rahmen einer einsemestrigen Mathematikvorlesung für Studierende der Naturwissenschaften an der Universität Bern entstanden. Er bietet eine *Einführung in die lineare Algebra und mehrdimensionale Differentialrechnung* für Anwender der Mathematik und beinhaltet als Schwerpunkte die Lösung von linearen Gleichungssystemen, eine Einführung in reelle Vektorräume und lineare Abbildungen, die Behandlung von orthogonalen Projektionen und der Methode der kleinsten Quadrate mit Bezug zu diskreter Fourier-Datenanalyse sowie einen Einblick in Eigenwertprobleme und deren Anwendungen. Ausserdem enthält diese **2. Auflage** eine Erweiterung mit Themen aus der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen, bei der einige der vorgestellten Techniken aus der linearen Algebra im Kontext der mehrdimensionalen Analysis zur Anwendung kommen. Neben den theoretischen Ausführungen wird an verschiedenen Stellen die numerische Behandlung von mathematischen Problemen anhand des freien Softwarepakets OCTAVE betrachtet.

Eine erfolgreiche Bearbeitung des Stoffinhalts setzt einen sicheren Umgang mit den Grundlagen der Vektorgeometrie sowie gute Fertigkeiten beim algebraischen Umformen von mathematischen Termen voraus. Der zweite Teil über Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen bedingt fortgeschrittene Kenntnisse über den Ableitungsbegriff und dessen Bedeutung für Funktionen in einer Variablen, wie dies im Band « *Mathematik für Naturwissenschaften: Analysis* » behandelt wird.

Nebst der Erweiterung auf die mehrdimensionale Differentialrechnung erscheint diese 2. Auflage mit einigen neuen Anwendungen und Übungen. Auf vielfachen Wunsch der Leserschaft enthält sie ausführliche Lösungen zu sämtlichen Aufgaben (Anhang B).

Ich bedanke mich bei Kollegen und Kolleginnen sowie Assistierenden und Studierenden, insbesondere bei Raphael Leu, für die vielerlei Kommentare, die zur Verbesserung des vorliegenden Textes beigetragen haben. Speziell erwähne ich Dr. Hans Rudolf Schneebeli, dem das Buch einige wichtige konzeptionelle Ideen und eine Vielzahl von spannenden Übungsaufgaben verdankt.

Bern, 2024 Thomas P. Wihler

Teil I

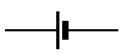
Lineare Algebra

Kapitel 1

Lineare Gleichungssysteme

1.1 Gaußsches Eliminationsverfahren

Einfache elektrische Stromkreise enthalten typischerweise zwei verschiedene Komponenten: Stromquellen (z. B. Batterien) und Widerstände (z. B. Lichtkörper). Diese beiden Elemente werden symbolisch durch

 bzw. 

dargestellt. Stromquellen erzeugen Strom, Widerstände dämpfen die Stromstärke; ein Beispiel eines Stromkreises mit zwei Teilkreisen sehen wir in Abbildung 1.1.

Als physikalische Grundlage für Berechnungen an Stromkreisen dienen die Gesetze von Kirchhoff und Ohm. Für jeden Knotenpunkt in einem Stromkreis besagt das *1. Kirchhoffsche Gesetz*, dass dort die Summen der zu- und abfliessenden Ströme übereinstimmen. Ausserdem ist die Summe aller Spannungsunterschiede in einem geschlossenen (Teil-)Kreislauf gemäss des 2. Kirchhoffschen Gesetzes gleich null. Schliesslich gilt für den Spannungsabfall U (gemessen in Volt [V]), der durch einen Widerstand R (gemessen in Ohm [Ω]) erzeugt wird, für gewisse leitende Materialien das *Ohmsche Gesetz*:

$$U = R \cdot I\,; \tag{1.1}$$

hier steht I für die Stromstärke (gemessen in Ampère [A]).

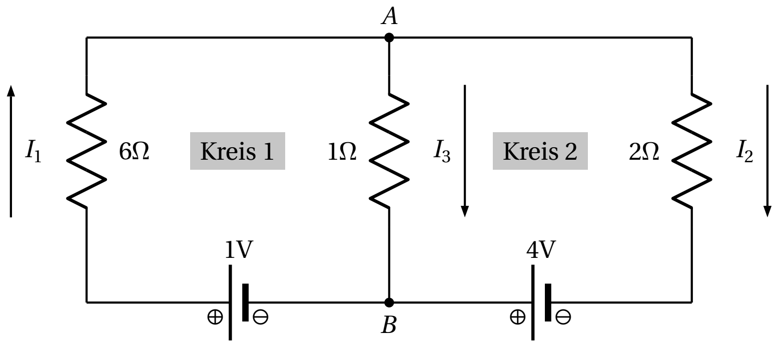


Abbildung 1.1: Beispiel eines elektrischen Stromkreises.

Für den Stromkreis in Abbildung 1.1 sind die drei Stromstärken I_1, I_2 und I_3 gesucht. Um diese Grössen zu bestimmen, stellen wir mithilfe der obigen Gesetzmässigkeiten zunächst drei geeignete Gleichungen auf.

(i) Wenn wir das 1. Kirchhoffsche Gesetz auf den Knotenpunkt A anwenden, so gilt $I_1 = I_2 + I_3$ oder äquivalent

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Für den Punkt B ergibt sich genau dieselbe Gleichung.

(ii) Bei den Stromstärken gilt es, die Richtung mittels passendem Vorzeichen zu berücksichtigen; die « positive » Richtung verläuft « von ⊕ zu ⊖ ». Die beiden Stromstärken I_1 und I_3 in Kreis 1 sind in diesem Sinn positiv gerichtet und erfahren aufgrund der zwei Widerstände gemäss Ohmschem Gesetz einen gesamten Spannungsverlust von $6I_1 + I_3$ Volt. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz entspricht dieser genau der Spannung, welche durch die Batterie erzeugt wird, nämlich 1 Volt:

$$6I_1 + I_3 = 1.$$

(iii) Analog wie in (ii) erhalten wir für Kreis 2 die Gleichung

$$2I_2 - I_3 = 4,$$

wobei der Vorzeichenwechsel bei I_3 davon zeugt, dass die festgelegte Pfeilrichtung für I_3 bezüglich der Batteriespannung von ⊖ nach ⊕ verläuft und deshalb negativ orientiert ist.

Aus den quantitativen Zusammenhängen in (i) – (iii) ergibt sich das folgende *System von drei linearen Gleichungen*:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(I)} & I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ \text{(II)} & 6I_1 & & & + & I_3 & = & 1 \\ \text{(III)} & & & 2I_2 & - & I_3 & = & 4 \end{array} \tag{1.2}$$

Um nach den unbekannten Grössen I_1, I_2 und I_3 auflösen zu können, bringen wir das lineare Gleichungssystem zunächst in eine einfachere Form. Dazu beachten wir die zwei folgenden mathematischen Grundsätze:

(P1) Beidseitiges Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl (ungleich 0) lässt den Informationsgehalt der Gleichung und damit die Lösung des Systems unverändert.

(P2) Durch Addieren oder Subtrahieren einer Gleichung zu resp. von einer anderen Gleichung innerhalb desselben Systems bleibt die Lösung ebenfalls gleich.

Wir wenden diese beiden Prinzipien auf das System (1.2) an. Die erste Gleichung (I) lassen wir unverändert stehen. Die zweite Gleichung (II) modifizieren wir so, dass die Unbekannte I_1 eliminiert werden kann. Dazu multiplizieren wir zunächst die erste Gleichung mit dem Faktor 6 (nach Prinzip (P1)) und subtrahieren sie dann von der zweiten Gleichung (gemäss Prinzip (P2)):

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(II)}: & 6I_1 & & & + & I_3 & = & 1 & \\ 6\cdot\text{(I)}: & 6I_1 & - & 6I_2 & - & 6I_3 & = & 0 & \ominus \\ \hline \text{(II)} - 6\cdot\text{(I)}: & & + & 6I_2 & + & 7I_3 & = & 1 & \end{array}$$

Hier ist auf der linken Seite besonders zu beachten, dass beim Subtrahieren von negativen Zahlen in der zweiten Gleichung de facto eine Addition durchgeführt wird:

$$6I_1 + I_3 - (6I_1 - 6I_2 - 6I_3) = \cancel{6I_1} + I_3 - \cancel{6I_1} + 6I_2 + 6I_3 = 6I_2 + 7I_3.$$

Das System (1.2) hat jetzt die neue Form

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(I)} & I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ \text{(II)} & & & 6I_2 & + & 7I_3 & = & 1 \\ \text{(III)} & & & 2I_2 & - & I_3 & = & 4 \end{array}$$

Wie gewünscht ist die Unbekannte I_1 aus der zweiten Gleichung verschwunden, wobei die Lösung des Gleichungssystems trotz dieser Manipulationen erhalten geblieben ist. Im nächsten Schritt lassen wir beide Gleichungen (I) und (II) unverändert und formen lediglich noch die dritte Gleichung (III) um, indem wir dort die Unbekannte I_2 eliminieren. Mithilfe der Prinzipien (P1) und (P2) mulitplizieren wir die zweite Gleichung mit dem Faktor $1/3$ und subtrahieren sie anschliessend von der dritten Gleichung:

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\text{(III)}: & 2I_2 & - & I_3 & = & 4 & \\
1/3\cdot\text{(II)}: & 2I_2 & + & 7/3\,I_3 & = & 1/3 & \ominus \\
\hline
\text{(III)} - 1/3\cdot\text{(II)}: & & - & 10/3\,I_3 & = & 11/3 &
\end{array}$$

Es resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\
\text{(II)} & & & 6I_2 & + & 7I_3 & = & 1 \\
\text{(III)} & & & & - & 10/3\,I_3 & = & 11/3
\end{array} \tag{1.3}$$

Nach dem obigen Transformationsprozess erfüllt das System (1.3) die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Lösung des Gleichungssystems ist unverändert geblieben.

(ii) Die Gleichung (III) enthält nur noch die Unbekannte I_3 und kann direkt aufgelöst werden: $I_3 = -11/10 = -1.1$.

(iii) Die Gleichung (II) enthält nur noch die Unbekannten I_2 und I_3. Nachdem der Wert von I_3 aus (ii) bekannt ist, erhalten wir durch Einsetzen, dass

$$6I_2 + 7\cdot(-11/10) = 1$$

und daraus $I_2 = 29/20 = 1.45$.

Schliesslich können wir die berechneten Werte von I_2 und I_3 in Gleichung (I) in (1.3) einsetzen:

$$I_1 - 29/20 - (-11/10) = 0.$$

Dies führt zur Lösung $I_1 = 7/20 = 0.35$.

Die hier vorgestellte Technik zur Lösung von linearen Gleichungssystemen heisst **Gaußsches Eliminationsverfahren**. Hierbei wird die Lösung gefunden, indem « von oben nach unten » aus den Gleichungen schrittweise einzelne Unbekannte eliminiert werden. Dies führt schliesslich zu einer « Stufenform », bei welcher die letzte Gleichung nur noch *eine* Unbekannte und jede weitere Gleichung jeweils eine zusätzliche Lösungsvariable enthält. Das Auflösen nach den einzelnen Unbekannten wird dann durch ein *Rückwärtseinsetzen* «von unten nach oben» her realisiert.

Wir illustrieren das Gauß-Verfahren und Rückwärtseinsetzen anhand einiger weiterer Beispiele.

Beispiel 1.4 Über drei chemischen Stoffe, deren Moleküle alle aus Kohlenstoff «C», Wasserstoff «H» sowie Sauerstoff «O» zusammengesetzt sind, liegen einige Informationen vor:

Stoff	chemische Formel	Masse (in Atomeinheiten [u])
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	60
Benzoesäure	$C_7H_6O_2$	122
Rohrzucker	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342

Gesucht sind die Massen der einzelnen Atome C, H und O. Aus den chemischen Formeln und den Molekülmassen erhalten wir ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llrcrcrcr} \text{Essigsäure:} & \text{(I)} & 2\,C & + & 4\,H & + & 2\,O & = & 60 \\ \text{Benzoesäure:} & \text{(II)} & 7\,C & + & 6\,H & + & 2\,O & = & 122 \\ \text{Rohrzucker:} & \text{(III)} & 12\,C & + & 22\,H & + & 11\,O & = & 342 \end{array} \tag{1.5}$$

Zur einfacheren Darstellung verwenden wir die Kurzschreibweise

$$\begin{array}{r} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 60 \\ 7 & 6 & 2 & 122 \\ 12 & 22 & 11 & 342 \end{array}\right). \tag{1.6}$$

Hier beschränken wir uns darauf, die Koeffizienten der unbekannten Variablen C, H und O sowie die Zahlen auf der rechten Seite der drei linearen Gleichungen in (1.5) als Einträge eines «Datencontainers» zu notieren. In der Sprache der linearen Algebra heisst ein solcher Block von Zahlen **Matrix**. Im aktuellen Fall hat die Matrix drei Zeilen und vier Spalten; wir sprechen dann von einer 3×4-Matrix.

Zwecks Auflösung des linearen Gleichungssystems (1.5) wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren an:

1. *Elimination der ersten Unbekannten* C *in den Gleichungen* (II) *und* (III)*:* Wie zuvor lassen wir die erste Gleichung (d. h. die erste Zeile der Matrix (1.6)) unverändert. In einem *ersten* Schritt entfernen wir die Unbekannte C mithilfe der *ersten* Gleichung aus den Gleichungen (II) und (III). Konkret subtrahieren wir $^7/_2$-mal die erste Gleichung von der zweiten Gleichung:

$$\begin{array}{r} \text{(II)}: \\ {}^7/_2\cdot\text{(I)}: \\ \text{(II)}-{}^7/_2\cdot\text{(I)}: \end{array} \quad \begin{array}{ccc|cc} 7 & 6 & 2 & 122 & \\ 7 & 14 & 7 & 210 & \ominus \\ \hline 0 & -8 & -5 & -88 & \end{array}$$

Ähnlich arbeiten wir in der dritten Gleichung und subtrahieren erneut die *erste* Gleichung, jetzt 6-mal, von der dritten Gleichung:

$$\begin{array}{r} \text{(III)}: \\ 6\cdot\text{(I)}: \\ \text{(III)}-6\cdot\text{(I)}: \end{array} \quad \begin{array}{ccc|cc} 12 & 22 & 11 & 342 & \\ 12 & 24 & 12 & 360 & \ominus \\ \hline 0 & -2 & -1 & -18 & \end{array}$$

Das ursprüngliche lineare Gleichungssystem (1.5) wurde nun so transformiert, dass die Unbekannte C aus der zweiten und dritten Gleichung verschwunden ist; die entsprechenden Koeffizienten in der ersten Spalte der Matrix sind 0:

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 60 \\ \colorbox{lightgray}{7} & 6 & 2 & 122 \\ \colorbox{lightgray}{12} & 22 & 11 & 342 \end{array}\right)}_{\text{ursprüngliches System}} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \text{(II)}-{}^7/_2\cdot\text{(I)} \\ \text{(III)}-6\cdot\text{(I)} \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 60 \\ 0 & -8 & -5 & -88 \\ 0 & -2 & -1 & -18 \end{array}\right)}_{\text{transformiertes System}}.$$

Um potenzielle Vorzeichenfehler zu vermeiden, dürfen wir gemäss Prinzip (P1) die zweite und dritte Zeile mit dem Faktor −1 durchmultiplizieren, ohne dadurch die Lösung des linearen Gleichungssystems zu verändern[*]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 60 \\ 0 & 8 & 5 & 88 \\ 0 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right). \tag{1.7}$$

2. *Elimination der zweiten Unbekannten* H *in Gleichung* (III)*:* Um das lineare Gleichungssystem weiter in Richtung « Stufenform » zu transformieren, zielen

[*] Achtung! Die Prinzipien (P1) und (P2) lassen sich nur auf (ganze) Zeilen anwenden, nicht aber auf die vertikalen Spalten in der Matrix.

wir darauf ab, die Variable H mithilfe der *zweiten* Gleichung aus der dritten Gleichung von (1.7) zu eliminieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 60 \\ 0 & 8 & 5 & 88 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 18 \end{array}\right).$$

Dies geschieht durch Subtrahieren von $1/4$-mal der zweiten Gleichung von der dritten:

$$\begin{array}{r|ccc|cc} \text{(III)}: & 0 & 2 & 1 & 18 & \\ 1/4 \cdot \text{(II)}: & 0 & 2 & 5/4 & 22 & \ominus \\ \hline \text{(III)} - 1/4 \cdot \text{(II)}: & 0 & 0 & -1/4 & -4 & \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem erscheint jetzt in der Darstellung

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{(III)} - 1/4 \cdot \text{(II)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 60 \\ 0 & 8 & 5 & 88 \\ 0 & 0 & -1/4 & -4 \end{array}\right).$$

Dank des Gaußschen Eliminationsverfahrens haben wir (1.5) umgewandelt in die Stufenform

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{(I)} & 2\,\mathrm{C} & + & 4\,\mathrm{H} & + & 2\,\mathrm{O} & = & 60 \\ \text{(II)} & & & 8\,\mathrm{H} & + & 5\,\mathrm{O} & = & 88 \\ \text{(III)} & & & & & 1/4\,\mathrm{O} & = & -4 \end{array} \tag{1.8}$$

3. *Rückwärtseinsetzen:* Aus Gleichung (III) in (1.8) erhalten wir die atomare Masse von Sauerstoff als 16 u. Weiter liefert einsetzen in (II), dass

$$8\,\mathrm{H} + 5 \cdot 16 = 88$$

und daraus 1 u für das Wasserstoffatom. Schliesslich führt (I) zu

$$2\,\mathrm{C} + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 = 60,$$

woraus wir auf 12 u für die atomare Masse von Kohlenstoff schliessen.

Das Transformieren von linearen Gleichungssystemen in eine Stufenform lässt sich nicht immer so ausführen, wie es in den obigen Beispielen vorgeführt wurde. Das folgende theoretische Beispiel illustriert eine mögliche Problemsituation.

Beispiel 1.9 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{(I)} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ \text{(II)} & 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 11 \\ \text{(III)} & x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an wie bisher:

1. Gleichung (I) bleibt unverändert; aus den Gleichungen (II) und (III) eliminieren wir zunächst die Variable x_1 mithilfe der *ersten* Gleichung:

$$\begin{array}{r} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \text{(I)} \\ \text{(II)} - 3 \cdot \text{(I)} \\ \text{(III)} - 1 \cdot \text{(I)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right).$$

2. Der vorherigen Prozedur folgend würden wir nun gerne im nächsten Schritt die Variable x_2 aus Gleichung (III) entfernen. Bislang geschah dies durch Subtrahieren eines Vielfachen der *zweiten* Gleichung von der dritten. Da die Variable x_2 in Gleichung (II) jedoch gar nicht auftritt (was durch den Koeffizienten 0 an der zweiten Stelle deutlich wird), lässt sich diese Absicht hier nicht umsetzen. Allerdings ist das Problem einfach lösbar, wenn wir die zweite und dritte Gleichung vertauschen; dies lässt die Lösung des linearen Gleichungssystems natürlich unverändert:

$$\begin{array}{r} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \\ \text{(II)} \longleftrightarrow \text{(III)} \\ \text{(III)} \longleftrightarrow \text{(II)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right).$$

   Nun hat das lineare Gleichungssystem die gewünschte Stufenform wie zuvor.

3. *Rückwärtseinsetzen:* Aus der dritten Zeile lesen wir $-7x_3 = -7$, woraus sich $x_3 = 1$ ergibt. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $1 \cdot x_2 - 6 = -4$, und daraus $x_2 = 2$. Schliesslich erhalten wir aus der ersten Gleichung, dass $x_1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$, was zur Lösung $x_1 = 2$ führt.

Durch Einsetzen der gefundenen Lösungswerte

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 1$$

in das ursprüngliche Gleichungssystem kann *überprüft* werden (sogenannte «Einsetzprobe»), dass die Lösung tatsächlich korrekt bestimmt worden ist.

Die obige schematische Vorgehensweise lässt sich allgemein beschreiben:

Algorithmus 1.10 (Gaußsches Eliminationsverfahren) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{1.11}$$

Oder kompakter in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Hier verwenden wir die Notation « a_{ij} », um anhand eines Zeilenindexes i und eines Spaltenindexes j den Koeffizienten (Vorfaktor) der unbekannten Variablen x_j in der i-ten Gleichung zu identifizieren. Die Zahlen b_i sind die Zahlen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen im linearen Gleichungssystem (1.11). Das Gauß-Verfahren zur Lösung von (1.11) ist dann durch die folgende schrittweise Prozedur definiert:

- *Schritt 1 (falls $a_{11} \neq 0$):* Die erste Gleichung bleibt unverändert stehen. Aus den restlichen Gleichungen wird jeweils die Unbekannte x_1 eliminiert. Dies geschieht durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen der *ersten* Gleichung von der jeweiligen Gleichung. Das lineare Gleichungssystem hat danach die folgende Form:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{array}\right). \tag{1.12}$$

  Hier sind « $\star$ » irgendwelche Zahlen, die sich aus den Manipulationen in den einzelnen Zeilen ergeben.

- *Schritt 2:* Die erste und zweite Gleichung werden unverändert aus (1.12) übernommen. Aus den restlichen Gleichungen wird jeweils die Unbekannte x_2 eliminiert. Ähnlich wie zuvor resultiert dies durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen der *zweiten* Gleichung von der jeweiligen Gleichung. Das lineare Gleichungssystem erscheint dann als

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \end{array}\right).$$

- *Schritt 3:* Falls das Gleichungssystem mehr als 3 Gleichungen und Unbekannte hat, wird analog weiterverfahren. Die erste, zweite und dritte Gleichung bleibt unverändert. Aus den restlichen Gleichungen wird jeweils die Unbekannte x_3 durch Subtraktion eines passenden Vielfachen der *dritten* Gleichung eliminiert:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \end{array}\right).$$

- *Weitere Eliminationsschritte:* Nach demselben Prinzip werden die Manipulationen im linearen Gleichungssystem fortgesetzt. Dabei gilt ganz allgemein:

  - Im *ersten Schritt* werden alle Gleichungen (ausser der ersten) mithilfe der *ersten* Gleichung bearbeitet, um die Variable x_1 zu eliminieren.
  - Im *zweiten Schritt* werden alle Gleichungen (ausser der ersten und zweiten) mithilfe der *zweiten* Gleichung behandelt, um die Variable x_2 zu eliminieren.
  - Im *dritten Schritt* werden alle Gleichungen (ausser der ersten, zweiten und dritten) mithilfe der *dritten* Gleichung umgeformt, um die Variable x_3 zu eliminieren.
  - …

Unter Umständen ist es nötig, in den einzelnen Schritten geeignete *Zeilenvertauschungen* vorzunehmen. Schlussendlich wird das transformierte System die folgende Struktur aufweisen:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \end{array}\right). \tag{1.13}$$

Diese (umgekehrte) Stufenform wird auch als **Rechtsobere-Dreiecksform** oder kürzer als **Dreiecksform** bezeichnet.

- *Auflösen durch Rückwärtseinsetzen:* Ausgehend von der Rechtsoberen-Dreiecksform (1.13) kann das lineare Gleichungssystem nun « von unten her » aufgelöst werden. In der Tat lässt sich die letzte Gleichung direkt nach x_n auflösen. Einsetzen dieses Lösungswertes in die zweitletzte Gleichung ermöglicht dann die Bestimmung von x_{n-1} etc.

Zur rechnerischen Illustration betrachten wir ein weiteres theoretisches Beispiel.

Beispiel 1.14 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform mit vier Gleichungen und vier Unbekannten $x_1, \dots, x_4$:

$$\begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \\ (\mathrm{IV}) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Der erste Eintrag in der ersten Gleichung ist null ($a_{11} = 0$), weshalb Schritt 1 im Gauß-Verfahren nicht realisiert angewendet werden kann. Wir vertauschen deshalb die erste und zweite Zeile:

$$\begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \\ (\mathrm{IV}) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

- *Schritt 1:* Die erste Gleichung bleibt unverändert, ebenso die zweite (weil sie bereits die gewünschte Null im ersten Eintrag hat). Aus der dritten und vierten Gleichung eliminieren wir die Unbekannte x_1 mithilfe der *ersten* Gleichung:

$$
\begin{array}{r|rrrr|rl}
\text{(III)}: & 2 & -4 & -2 & 1 & 3 & \\
2\cdot\text{(I)}: & 2 & -6 & 0 & 2 & 4 & \ominus \\
\hline
\text{(III)} - 2\cdot\text{(I)}: & 0 & 2 & -2 & -1 & -1 &
\end{array}
$$

Analog, ebenfalls unter Verwendung der *ersten* Gleichung, erhalten wir:

$$
\begin{array}{r|rrrr|rl}
\text{(IV)}: & -2 & 6 & 2 & 0 & -2 & \\
2\cdot\text{(I)}: & 2 & -6 & 0 & 2 & 4 & \oplus \\
\hline
\text{(III)} + 2\cdot\text{(I)}: & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 &
\end{array}
$$

Es resultiert die Darstellung

$$
\begin{array}{r}
\text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(IV)}
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 2 & -2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 2
\end{array}\right).
$$

- *Schritt 2:* Die erste und zweite Gleichung bleibt unverändert; auch die vierte Gleichung hat bereits die gewünschte Form. Somit reicht es, die Unbekannte x_2 aus der dritten Gleichung mithilfe der *zweiten* Gleichung zu eliminieren, was direkt durch Addition geschieht:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \text{(III)} + \text{(II)} \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 2
\end{array}\right).
$$

Wenn wir die dritte und vierte Zeile vertauschen, dann hat das lineare Gleichungssystem die angestrebte Rechtsobere-Dreiecksform:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2
\end{array}\right).
$$

- *Rückwärtseinsetzen* führt zur Lösung:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(IV)} & -2x_4 = -2 & \Longrightarrow & x_4 = 1 \\
\text{(III)} & 2x_3 + 2\cdot 1 = 2 & \Longrightarrow & x_3 = 0 \\
\text{(II)} & -2x_2 + 2\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1 & \Longrightarrow & x_2 = 0 \\
\text{(I)} & x_1 - 3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2 & \Longrightarrow & x_1 = 1.
\end{array}$$

Hier endet das Gauß-Verfahren erfolgreich.

Bemerkung 1.15 Wie zuvor erwähnt, lassen sich lineare Gleichungssysteme in kompakter Form durch Matrizen darstellen:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\
3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 11 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2
\end{array}
\qquad \Leftrightarrow \qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Die Matrix, welche zu einem linearen Gleichungssystem gehört, besteht dabei aus zwei verschiedenen Teilen. Der linke Zahlenblock (bezeichnet mit einem Grossbuchstaben, z. B. « $\mathbf{A}$ ») enthält die Koeffizienten, welche vor den Unbekannten in den einzelnen Gleichungen stehen. Die rechte Zahlenkolonne ist ein Vektor (bezeichnet mit einem kleinen Buchstaben, z. B. « $\mathbf{b}$ »), der die Werte rechts der Gleichheitszeichen im linearen Gleichungssystem beinhaltet. Wir illustrieren dies anhand des obigen Beispiels 1.9:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Praktischerweise werden auch die unbekannten Variablen als Einträge eines Vektors dargestellt:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen heisst

- die Matrix $\mathbf{A}$ die **Koeffizientenmatrix**,

- der Vektor $\mathbf{b}$ der **Rechteseite-Vektor** und

- der Vektor $\mathbf{x}$ der **Unbekannten-** oder **Lösungsvektor**.

Die Matrix

$$\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\right) \tag{1.16}$$

nennen wir **erweiterte Matrix** des linearen Gleichungssystems.

1.2 Anwendungen

Lineare Gleichungssysteme gehören zu den häufigsten mathematischen Problemen, die es im breiten Spektrum von quantitativen Modellen in praktischen Anwendungen zu lösen gilt. Ein erstes Beispiel haben wir in Abschnitt 1.1 bei der Berechnung von einfachen Stromkreisen kennengelernt. Weitere angewandte Situationen, die auf Systeme von linearen Gleichungen führen, folgen in diesem Abschnitt.

1.2.1 Interpolation von Daten

Mathematische Modelle, die zur Beschreibung von praktischen Vorgängen verwendet werden, beinhalten häufig eine gewisse Anzahl von Parametern, die aufgrund von Messungen bestimmt werden müssen. Neben einer Vielzahl von statistischen Methoden ist die Technik der *Interpolation* von Bedeutung, in der die gemessenen Daten in einen Modellansatz eingesetzt und daraus Gleichungen für die Parameter hergeleitet werden.

Anwendung 1.17 (Temperaturumrechnung)
Für Temperaturangaben gibt es verschiedene Masseinheiten. Während die Celius-Skala [°C] international weit verbreitet ist, kommt mancherorts, zum Beispiel in den USA, auch die Einheit Fahrenheit [°F] vor. Zwischen den beiden Masseinheiten besteht ein linearer Zusammenhang in Form einer Funktion

$$F(C) = a + bC, \tag{1.18}$$

wo C und F für die Temperaturwerte in Grad Celcius resp. Fahrenheit stehen und a, b unbekannte Koeffizienten sind, die es zu bestimmen gilt. In einer sehr kalten Winternacht, wenn das Thermometer tief absinkt, stimmen die beiden Skalen beim Temperaturpunkt $-40\,°\mathrm{C} = -40\,°\mathrm{F}$ genau überein. Hingegen liegen die Temperaturangaben an einem angenehm warmen Sommertag, an dem eine Messung in Grad Celcius beispielsweise 25 °C beträgt, bei einem deutlich höheren Wert in Grad Fahrenheit von 77 °F.

Lösung. Durch Einsetzen der obigen Daten (für eine kalte Winternacht bzw. für einen warmen Sommertag) in die Beziehung (1.19) erhalten wir die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a - 40b &= -40 \\ a + 25b &= 77, \end{aligned}$$

welche wir in Form der erweiterten Matrix

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -40 & -40 \\ 1 & 25 & 77 \end{array}\right)$$

zusammenfassen. Die Unbekannten a und b können mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens in lediglich einem Schritt gefunden werden:

$$\begin{array}{c} \\ \text{(II)} - \text{(I)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -40 & -40 \\ 0 & 65 & 117 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen ergibt aus der zweiten Zeile die Lösung $b = {}^{117}/_{65} = 1.8$ sowie aus der ersten Zeile den Wert $a = -40 + 40b = -40 + 32 = 18$. Die Umrechnungsformel (1.18) ist dann durch

$$F(C) = 32 + 1.8C \tag{1.19}$$

gegeben.

Anwendung 1.20 (CO$_2$-Konzentration in der Atmosphäre)
Eine bekannte Messreihe über die Kohlenstoffdioxid-Konzentration in der Atmosphäre, welche seit 1958 am Mauna Loa Observatorium in Hawai erhoben wird, deutet näherungsweise ein quadratisches Modell der Form

$$K(t) = a + b\,t + c\,t^2 \tag{1.21}$$

an, wobei t die Zeit seit 1960 und $K(t)$ die Konzentration (in [ppm]) bezeichnen; die drei Parameter a, b, c sind unbekannt und sollen aufgrund der folgenden Daten ermittelt werden:

Jahre nach 1960	10 (= 1970)	30 (= 1990)	50 (= 2010)
CO_2-Konzentration [ppm]	326	354	390

Lösung. Einsetzen der obigen Messdaten in das Modell (1.21) ergibt drei lineare Gleichungen für die unbekannten Werte a, b, c:

$$\begin{aligned} K(10) &= 326 \\ K(30) &= 354 \\ K(50) &= 390 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} a + 10b + 100c &= 326 \\ a + 30b + 900c &= 354 \\ a + 50b + 2500c &= 390 \end{aligned}$$

In Form der erweiterten Matrix schreiben wir

$$\begin{array}{r} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 100 & 326 \\ 1 & 30 & 900 & 354 \\ 1 & 50 & 2500 & 390 \end{array}\right).$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren führt im ersten Schritt zu

$$\begin{array}{r} \\ \text{(II)} - \text{(I)} \\ \text{(III)} - \text{(I)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 100 & 326 \\ 0 & 20 & 800 & 28 \\ 0 & 40 & 2400 & 64 \end{array}\right)$$

und im zweiten Schritt zu

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{(III)} - 2 \cdot \text{(II)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 100 & 326 \\ 0 & 20 & 800 & 28 \\ 0 & 0 & 800 & 8 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $c = 8/800 = 0.01$ und

$$20b + 800c = 28 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 1$$

sowie

$$a + 10b + 100c = 326 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 315.$$

Das Modell (1.21) lautet dann $K(t) = 315 + t + 0.01t^2$.

1.2.2 Mischungen und Konzentrationen

Anwendung 1.22 (Mischung von Flüssigkeiten)
Zwei Flüssigkeiten F_1 und F_2 enthalten 3% respektive 6% Alkohol. Es soll eine Mischung von 5 Litern hergestellt werden, die 5% Alkohol enthält.

Lösung. Wir bezeichnen die Anzahl Liter jeder Flüssigkeit im Gemisch mit ℓ_1 bzw. mit ℓ_2. Da die Gesamtmenge in der gesuchten Mischung 5 Liter beträgt, muss die Beziehung

$$\ell_1 + \ell_2 = 5$$

gelten. Weiter leiten wir eine Gleichung für die Alkoholanteile her, wobei wir Folgendes beachten:

(i) Die Menge Alkohol in ℓ_1 Litern der Flüssigkeit F_1 beträgt $0.03\ell_1$.

(ii) Die Menge Alkohol in ℓ_2 Litern der Flüssigkeit F_2 ist durch $0.06\ell_2$ gegeben.

(iii) Die Menge Alkohol in $\ell_1 + \ell_2$ Litern des Gemisches soll wunschgemäss gleich $0.05(\ell_1 + \ell_2)$ sein.

Vor und nach dem Mischen bleibt die Gesamtmenge des Alkohols unverändert:

$$0.03\ell_1 + 0.06\ell_2 = 0.05(\ell_1 + \ell_2).$$

Äquivalenterweise gilt nach einer Umformung:

$$-2\ell_1 + \ell_2 = 0.$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 &= 5 \\ -2\ell_1 + \ell_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Die gesuchten Anteile der Flüssigkeiten für die angestrebte Mischung resultiert als Lösung dieses linearen Gleichungssystems mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad (\text{II}) + 2\cdot(\text{I}) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert die Lösung

$$\ell_2 = {}^{10}/_3 \text{ Liter}, \qquad \ell_1 = {}^{5}/_3 \text{ Liter}. \tag{1.24}$$

Eine « Einsetzprobe » bestätigt, dass $\ell_1 + \ell_2 = {}^5/_3 + {}^{10}/_3 = 5$, d. h., die gesuchte Mischung hat ein Volumen von 5 Litern. Ausserdem finden wir

$$0.03\ell_1 + 0.06\ell_2 = 0.03 \cdot {}^5/_3 + 0.06 \cdot {}^{10}/_3 = 0.05 + 0.2 = 0.25;$$

der Wert von 0.25 Litern in einer Gesamtmenge von 5 Litern entspricht tatsächlich 5%.