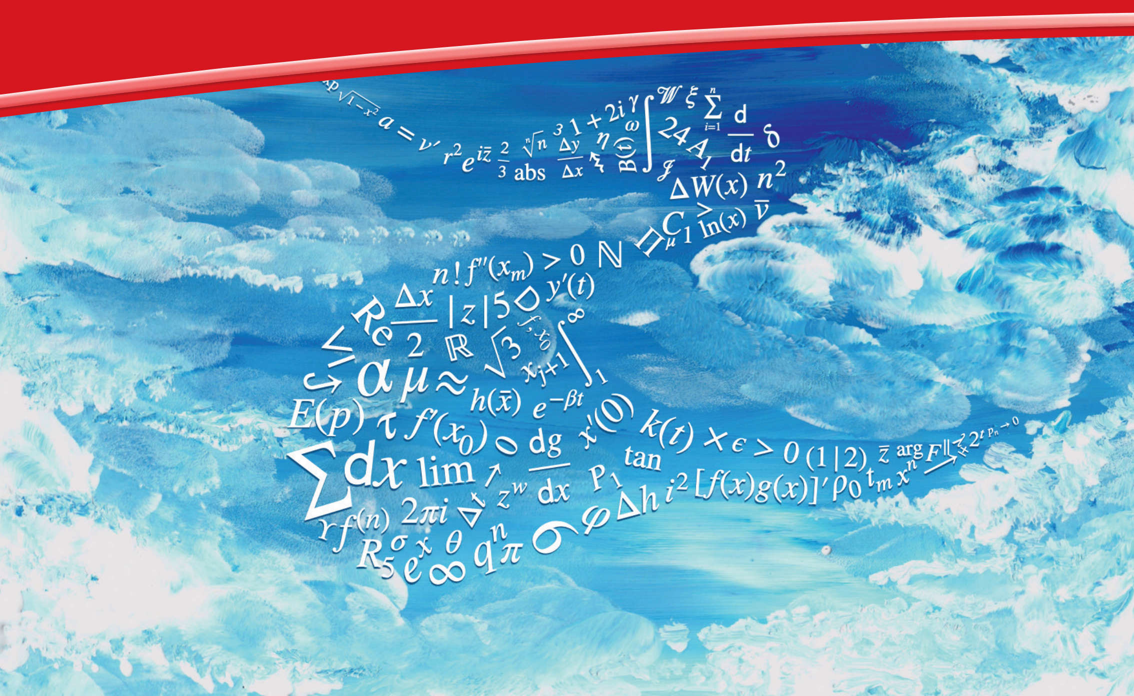
utb.

Thomas P. Wihler

Mathematik für Naturwissenschaften: Analysis

2. Auflage



utb 3635

Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn
Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau · Wien · Köln
Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto
facultas · Wien
Haupt Verlag · Bern
Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn
Mohr Siebeck · Tübingen
Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen
Psychiatrie Verlag · Köln
Ernst Reinhardt Verlag · München
transcript Verlag · Bielefeld
Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart
UVK Verlag · München
Waxmann · Münster · New York
wbv Publikation · Bielefeld
Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

Thomas P. Wihler

Mathematik für Naturwissenschaften: Analysis

Haupt Verlag
Bern · Stuttgart · Wien

Thomas P. Wihler ist ordentlicher Professor für Mathematik am Mathematischen Institut der Universität Bern (Schweiz). Er schloss 1999 mit dem Diplom und 2003 mit dem Doktorat in Mathematik an der ETH Zürich ab. Nach Lehr- und Forschungsaufenthalten an der University of Minnesota (Minneapolis, USA) und an der McGill University (Montreal, Kanada) leitet er seit 2008 die Arbeitsgruppe « Angewandte und Numerische Mathematik » am Mathematischen Institut der Universität Bern.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Satz: Thomas P. Wihler
Umschlagsbild: Sophie J. Wihler

Printed in Germany

UTB-Band-Nr.: 3635
ISBN 978-3-8252-6080-4

Haupt Verlag AG, Falkenplatz 14, CH-3012 Bern
verlag@haupt.ch

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Bei der Behandlung von praktischen Anwendungen in den Naturwissenschaften, im Ingenieurwesen und weiteren Bereichen kann Mathematik als bedeutendes Werkzeug zur Verfügung stehen. So dient sie beispielsweise dazu, Vorgänge aus den entsprechenden Disziplinen in Form von geeigneten Modellen zu beschreiben oder solche fundiert zu untersuchen. Dabei erlauben mathematische Techniken neben der quantitativen Auswertung eines Modells auch die Beantwortung von zugehörigen qualitativen Fragen. Mathematische Aussagen können dann Vermutungen bekräftigen oder sogar neue Ergebnisse zutage bringen, die bislang unentdeckt geblieben waren.

Freilich sind dem mathematischen Modellierungsprozess auch Grenzen gesetzt, denn häufig weisen reale Anwendungen eine zu hohe Komplexität auf, um alle Zusammenhänge im Rahmen eines mathematischen Modells vollständig abbilden zu können. Ebenso kann es sehr anspruchsvoll oder sogar unmöglich sein, Daten in befriedigendem Umfang oder in genügender Genauigkeit zu beschaffen. Letztlich fehlt bei vielen Fragestellungen auch ein verständliches Prinzip von Ursache und Wirkung.

Das vorliegende Buch bleibt dem Anspruch fern, an die Grenzen des mathematisch Umsetzbaren zu gehen. Wir beschränken uns – zusammen mit dem Band « *Mathematik für Naturwissenschaften: Lineare Algebra und mehrdimensionale Differentialrechnung* » – auf einen kleinen Einblick, wie Mathematik als wichtiges Hilfsmittel in den Naturwissenschaften wirksam zum Einsatz kommen kann. Dazu binden der Stoffinhalt und die Übungsaufgaben eine Vielzahl von Anwendungen aus verschiedenen Disziplinen ein. Auf abstrakte Herleitungen und rigorose mathematische Beweise sowie auf « Drillübungen » verzichten wir bewusst; im Vordergrund stehen die semantischen Aspekte der mathematischen Begriffe und Techniken. Aussagen und Formeln werden zumeist anhand von Beispielen intuitiv hergeleitet und erklärt.

Der Text ist im Rahmen einer einsemestrigen Mathematikvorlesung für Studierende der Naturwissenschaften an der Universität Bern entstanden. Er bietet eine *Einführung in die Analysis* für Anwender der Mathematik und beinhaltet als Schwerpunkte die univariate Differential- und Integralrechnung sowie den Umgang mit Differentialgleichungen. Dabei kommen auch elementare Modellierungstechniken zum Tragen. Neben den analytischen Ausführungen wird an verschiedenen Stellen die numerische Behandlung von mathematischen Problemen anhand des freien Softwarepakets OCTAVE betrachtet. Eine erfolgreiche Bearbeitung des Stoffinhalts setzt einen sicheren Umgang mit Funktionen in einer Variablen sowie gute Fertigkeiten beim algebraischen Umformen von mathematischen Termen voraus.

Diese **2. Auflage** erscheint mit einigen neuen Anwendungen und Übungen. Auf vielfachen Wunsch der Leserschaft enthält sie ausführliche Lösungen zu sämtlichen Aufgaben (Anhang B). Schliesslich wurde das Kapitel über komplexe Zahlen auf Anregung von Studierenden an den Schluss des Buches verschoben.

Ich bedanke mich bei Kollegen und Kolleginnen sowie Assistierenden und Studierenden, insbesondere bei Raphael Leu, für die vielerlei Kommentare, die zur Verbesserung des vorliegenden Textes beigetragen haben. Speziell erwähne ich Dr. Hans Rudolf Schneebeli, dem das Buch einige wichtige konzeptionelle Ideen und eine Vielzahl von spannenden Übungsaufgaben verdankt.

Bern, 2024 Thomas P. Wihler

Kapitel 1

Folgen und Reihen

1.1 Diskrete und kontinuierliche Modelle

Viele Prozesse in Anwendungen entwickeln sich, ausgehend von einer Anfangskonfiguration, in der Zeit. Wir illustrieren dies mit zwei Beispielen.

Beispiel 1.1

(a) Eine bestimmte Bakterienpopulation verdoppelt sich durch Zellteilung jede Stunde. Ausgehend von einem anfänglich einzigen Bakterium entstehen im Laufe der Stunden also $2, 4, 8, 16, \ldots$ Bakterien.

(b) Ein Gegenstand wird anfänglich auf eine gewisse Höhe gehoben. Er wird fallen gelassen und erfährt durch die Erdanziehung eine Beschleunigung. Seine Geschwindigkeit nimmt also mit der Zeit zu (bis er den Boden erreicht hat).

Um *zeitabhängige* Prozesse quantitativ zu beschreiben, kennen wir in der Mathematik ein wichtiges Werkzeug: *Funktionen.* Im gegebenen Zusammenhang ist eine Funktion eine Rechenvorschrift, welche jedem Zeitpunkt t einen gewissen Wert zuweist. Wir erklären dies anhand der obigen Beispiele.

(a) Wir bezeichnen mit $B(t)$ die Anzahl Bakterien, welche die Bakterienkultur nach t Stunden erreicht hat. Die stündliche Grösse der Population können wir in Form der Wertetabelle 1.1 darstellen. Alternativ verwenden wir die *Funktionsvorschrift*

$$B(t) = 2^t, \qquad t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

Stunden t	Anzahl Bakterien $B(t)$
$t=0$	$B(0)=1$
$t=1$	$B(1)=2$
$t=2$	$B(2)=4$
$t=3$	$B(3)=8$
$t=4$	$B(4)=16$
$t=5$	$B(5)=32$
$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 1.1: Zeitliche Entwicklung einer Bakterienkultur.

um diesen biologischen Prozess quantitativ zu beschreiben.

(b) Ein Gegenstand, der aus der Ruhe mit Erdbeschleunigung $g = 9.81\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt wird (ohne Luftwiderstand), hat nach einer Zeit t die Geschwindigkeit

$$v(t)=g\,t, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Hier ist die Geschwindigkeit v eine Funktion der Zeit t.

Die beiden hier besprochenen Modelle unterscheiden sich durch ein wesentliches Merkmal. Während bei Beispiel (a) die betrachteten Zeitpunkte $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zeitlich *getrennt* sind (die Anzahl Bakterien wird nur zu jeder vollen Stunde, nach *Abschluss* der Zellteilung, gezählt), hat die Geschwindigkeit in Beispiel (b) zu *jedem* beliebigen Zeitpunkt (bis zum Aufprall auf dem Boden) eine sinnvolle Bedeutung.

Zeitabhängige Modelle oder Funktionen, welche auf voneinander *getrennten* Zeitpunkten basieren, heissen **diskret**. Im Gegensatz dazu nennen wir Modelle oder Funktionen, die auf einer *ununterbrochenen* Zeitskala gründen, also auch eine Auswertung zu beliebigen Zeitpunkten zulassen, **kontinuierlich**.

Modelle stehen nicht immer im Zusammenhang mit *zeitlichen* Abläufen. Etwas abstrakter können wir diskrete Modelle als mathematische Beschreibung von Prozessen verstehen, welche auf getrennten Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aufbauen. Ein typisches Beispiel für solche getrennten Werte sind die *natürlichen Zahlen* (mit bzw. ohne Null)

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

oder eine Teilmenge daraus, wie zum Beispiel die (nicht endliche) Menge aller geraden Zahlen $\{1, 3, 5, \ldots, \}$ oder die (endliche) Menge $\{7, 8, 9, \ldots, 15\}$.

Anwendung 1.3 (Gesetz von Dolbear)
Der amerikanische Wissenschaftler Amos E. Dolbear hat beobachtet, dass bei gewissen Grillenarten ein direkter Zusammenhang zwischen der Freilufttemperatur und der Anzahl Zirplaute pro Minute besteht. Genauer lässt sich die Temperatur $T(n)$ näherungsweise als eine lineare Funktion der Anzahl Zirplaute n (pro Minute gezählt) beschreiben. Dieses mathematische Modell ist als *Gesetz von Dolbear* bekannt. Für die Feldgrille lautet es beispielsweise

$$T(n) = \frac{n}{7} + \frac{40}{9}, \tag{1.4}$$

wobei die Temperatur in Grad Celcius [°C] angegeben wird. Bei einer Temperatur von 20°C werden Feldgrillen also rund $n = 109$ Mal pro Minute zirpen, denn es gilt

$$T(109) = \frac{109}{7} + \frac{40}{9} \approx 20.$$

Die obige Anwendung widerspiegelt eine typische Situation beim mathematischen Modellieren von realen Prozessen: Obwohl die Formel (1.4) formal für jeden beliebigen Wert von n berechenbar ist (sogar für nicht-ganze oder negative Zahlen), kann sie natürlich in der Realität nur innerhalb eines beschränkten Bereichs gültig sein, denn Feldgrillen werden weder bei −20°C noch bei +70°C zirpen. Realistisch ist eher eine Temperaturspanne von 5°C bis 30°C, was etwa einem diskreten Gültigkeitsbereich von $n = 4, 5, \ldots, 180$ Zirplauten pro Minute entspricht.

Genauso wie beim Beispiel des diskreten Modells (1.4) sind auch kontinuierliche Modelle häufig auf einer theoretisch zulässigen Grundmenge definiert, welche über einen in der Praxis sinnvollen Bereich hinausgeht. Zum Beispiel ist die Geschwindigkeitsformel (1.2) aus mathematischer Sicht für alle Zeiten t in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auswertbar, jedoch ist im Zusammenhang mit der physikalischen Anwendung nur ein beschränktes Zeitintervall $0 \leqslant t \leqslant T$ sinnvoll, wo $T > 0$ den Zeitpunkt markiert, bei welchem der fallende Gegenstand den Boden erreicht und das Gesetz (1.2) offensichtlich nicht mehr gilt.

Die Menge der Eingabewerte, für welche eine Funktion ausgewertet wird, nennen wir **Definitionsbereich**. Der Definitionsbereich einer Funktion kann entweder die Menge aller Zahlen sein, für welche ein Ausgabewert bestimmbar ist, oder auch eine sinnvolle Teilmenge, welche sich beispielsweise aus einer praktischen Anwendung ergibt.

Bemerkung 1.5 Gemäss der obigen Festlegung besteht der Definitionsbereich von Funktionen, die ohne Bezug zu einer Anwendung gegeben sind, aus allen Zahlen, für welche sich die entsprechende Funktionsvorschrift auswerten lässt. Zum Beispiel gehören zum Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

die hier ohne Zusammenhang mit einer praktischen Anwendung angegeben ist, alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ausser $x = 0$, denn hierfür wäre die Division bei der Funktionsauswertung $f(0) = 1/0$ *nicht definiert*. Ähnlich verhält es sich bei der Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$, die sich formal für sämtliche nicht-negativen reellen Zahlen $x \geqslant 0$ evaluieren lässt, jedoch für alle negativen Werte von x undefiniert ist.

1.2 Folgen

Die Funktion $B(t)$ aus Beispiel 1.1 (a), welche die zeitliche Entwicklung einer Bakterienkultur beschreibt, lässt sich an den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ auswerten. Dies entspricht den Funktionswerten

$$B(0) = 1, \quad B(1) = 2, \quad B(2) = 4, \quad B(3) = 8, \quad B(4) = 16, \quad B(5) = 32, \quad \ldots$$

Wir verwenden dafür die Kurznotation

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = 4, \quad B_3 = 8, \quad B_4 = 16, \quad B_5 = 32, \quad \ldots$$

und schreiben allgemein

$$B_n = 2^n \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Eine Zahlenfolge, welche sich als Funktionswerte einer diskreten, auf dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$) basierenden Funktion ergibt, heisst **Folge**.

Allgemein definieren wir:

Für eine Funktion f, die auf den natürlichen Zahlen definiert ist, nennen wir die entsprechenden Funktionswerte

$$f(0), \quad f(1), \quad f(2), \quad f(3), \quad \ldots,$$

auch geschrieben als

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad \ldots,$$

eine **Folge**. Die einzelnen (Funktions-)Werte heissen **Glieder** der Folge.

Beispiel 1.7 Es soll eine (unendlich lange) Nachricht, bestehend aus einer 0-1-Zeichenkette, elektronisch übermittelt werden. Diese könnte beispielsweise wie folgt aussehen:

$$0011011100011101011 10111\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein einzelnes Zeichen richtig übermittelt wird, beträgt im gegebenen Netzwerk 90%. Das erste Zeichen wird also mit Wahrscheinlichkeit

$$p(1) = p_1 = 90\% = 0.9 = \frac{9}{10}$$

korrekt übertragen. Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl das erste als auch das zweite Zeichen richtig versandt werden, beträgt gemäss der Produktregel für Wahrscheinlichkeiten:

$$p(2) = p_2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0.81.$$

Analog werden die ersten drei Zeichen korrekt verschickt mit Wahrscheinlichkeit

$$p(3) = p_3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0.729.$$

Ganz allgemein beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten n Zeichen richtig übermittelt werden

$$p(n) = p_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n. \tag{1.8}$$

Die Wahrscheinlichkeit p kann hier als eine Funktion gesehen werden, welche auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert ist; die einzelnen (Funktions-)Werte $p_1, p_2, \dots$ bilden die Glieder einer Folge. Bei $n = 37$ Zeichen erhalten wir beispielsweise

$$p_{37} = p(37) = \left(\frac{9}{10}\right)^{37} \approx 0.020276;$$

also liegt die Wahrscheinlichkeit für die korrekte Übertragung aller 37 Zeichen nur gerade bei etwa 2%.

Beispiel 1.9 Im obigen Beispiel 1.7 lassen sich die einzelnen Glieder der Folge p_n mittels der Formel (1.8) unabhängig voneinander berechnen; wir sprechen von einer *expliziten Darstellung* der Folgeglieder. Folgen können jedoch auch *rekursiv* definiert sein, was bedeutet, dass jedes Glied in Abhängigkeit eines oder mehrerer vorheriger Folgeglieder definiert wird. Als Beispiel betrachten wir ein einfaches Modell für die Anzahl der Ringe r_n eines Baumstamms nach n Jahren. Jedes Jahr kommt ein neuer Ring dazu. Folglich gilt:

$$r_n = r_{n-1} + 1 \tag{1.10}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$. Die Folge wird gestartet mit dem Wert $r_0 = 0$ für $n = 0$. Es ist in diesem Beispiel einfach möglich, eine explizite Darstellungsformel herzuleiten. Mithilfe der Rekursionsformel (1.10) erhalten wir

$$r_n = \underbrace{r_{n-1}}_{=r_{n-2}+1} + 1 = \underbrace{r_{n-2}}_{=r_{n-3}+1} + 2 = \underbrace{r_{n-3}}_{=r_{n-4}+1} + 3 = r_{n-4} + 4.$$

Setzen wir diesen Prozess fort, so resultiert die explizite Formel $r_n = r_0 + n = n$. Nach n Jahren hat der Baumstamm also $r_n = n$ Ringe gebildet, wie erwartet.

1.3 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

Die im Titel genannten Begriffe « Konvergenz » und « Grenzwerte » sind grundlegend in der Analysis. Sie eröffnen – grob gesagt – die Möglichkeit, einer Grenzsituation beliebig nahezukommen und den entsprechenden Vorgang mathematisch zu beschreiben. Tatsächlich werden wir in den folgenden Kapiteln erkennen, dass viele Konstruktionen und Modellierungsprozesse in der Analysis auf Grenzsituationen beruhen.

Betrachten wir beispielsweise die Folge aus Beispiel 1.7, so stellen wir fest, dass ihre Glieder p_n mit zunehmendem Wert von n immer kleiner werden. Um mathematisch zu beschreiben, dass n *beliebig gross* wird, verwenden wir die Notation

$$n \to \infty$$

und sagen: « n *strebt* gegen unendlich ». Hier verwenden wir das formale Unendlichzeichen « ∞ », um auszudrücken, dass n *nicht endlich* bleibt. Weiter schreiben wir

$$p_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \qquad \text{oder kürzer} \qquad p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{1.11}$$

um mit Symbolen festzuhalten, was wir in Worten wie folgt formulieren: « Die Folgeglieder p_n streben (oder tendieren) gegen den Wert 0, wenn n beliebig gross wird. » Der Wert 0 heisst in diesem Zusammenhang **Grenzwert** der Folge (lat.: *limes*). Wir verwenden die folgende Notation, um dasselbe wie in (1.11) auszudrücken:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0.$$

In Worten sagen wir: « Für n gegen unendlich ist der Grenzwert der Folge p_n gleich null. »

Beispiel 1.12 Für die Folge der Baumringe r_n aus Beispiel 1.9 können wir einen *Wachstumsfaktor* (nach n Jahren) durch den Wert

$$a_n = \frac{r_{n+1}}{r_n}$$

definieren. Eine Umformung ergibt

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

In diesem Ausdruck wird der Term $1/n$ für wachsendes n immer kleiner, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0. \tag{1.13}$$

Es folgt, dass die Folge a_n der Wachstumsfaktoren für beliebig grosse n gegen den Wert 1 strebt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Der Grenzwert der Folge a_n ist also 1.

Nähert sich eine Folge a_n für beliebig grosse Werte von n einer *festen* (endlichen) Zahl $\overline{a}$ an, so sagen wir, dass die Folge gegen $\overline{a}$ **konvergiert**. Der Wert $\overline{a}$ heisst dann **Grenzwert** der Folge, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{a}.$$

Bemerkung 1.14 Mathematisch formal bedeutet die obige Definition, dass sich für jede beliebig kleine Toleranz $\epsilon > 0$ eine (möglicherweise grosse, aber endliche) natürliche Zahl N finden lässt (die von ϵ abhängt), sodass der Abstand zwischen dem Grenzwert $\overline{a}$ und allen Folgegliedern $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ immer kleiner als ϵ bleibt.

Anwendung 1.15 (Salzgehalt in Wasser)
In einem grossen, fast leeren Tank befinden sich anfänglich 5 Liter Wasser, in denen 300 g Salz aufgelöst sind. Pro Minute laufen 2 Liter Wasser in den Tank und werden 70 g Salz eingerührt. Nach n Minuten befinden sich demnach $W_n = 5+2n$ Liter Wasser und $S_n = 300+70n$ Gramm Salz im Tank. Der Salzgehalt (in Gramm pro Liter) nach n Minuten wird durch die Folge

$$a_n = \frac{S_n}{W_n} = \frac{300+70n}{5+2n}$$

beschrieben. Um zu bestimmen, ob sich der Salzgehalt längerfristig stabilisiert, berechnen wir den Grenzwert der Folge a_n für $n \to \infty$. Dazu empfiehlt es sich, sowohl im Nenner als auch im Zähler des obigen Bruchs den Faktor n auszuklammern und zu kürzen, was zu

$$a_n = \frac{(300/n+70)n}{(5/n+2)n} = \frac{300/n+70}{5/n+2}$$

führt. Für $n \to \infty$ gilt ähnlich wie in (1.13), dass $300/n \to 0$ und $5/n \to 0$. Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{70}{2} = 35,$$

d. h. nach längerer Zeit nähert sich der Salzgehalt im Tank immer mehr dem festen Wert von 35 Gramm pro Liter an, was etwa der Salzkonzentration im Atlantik entspricht.

Beispiel 1.16 Eine wichtige Folge, die verschiedentlich vorkommt, ist definiert durch

$$a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}, \qquad n \geqslant 1,$$

d. h. die Folgeglieder sind gegeben als

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt[3]{3}, \quad \dots$$

Die Grenzwertbestimmung ist hier etwas aufwendiger. Zunächst definieren wir eine « Hilfsfolge »:

$$b_n = n^{1/2n} - 1, \qquad n \geqslant 1.$$

Hierbei beachten wir mithilfe der bekannten Potenzgesetze, dass

$$n^{1/2n} = \left(n^{1/2}\right)^{1/n} = \left(\sqrt{n}\right)^{1/n} \qquad \text{sowie} \qquad n^{1/2n} = \left(n^{1/n}\right)^{1/2} = \sqrt{n^{1/n}}. \tag{1.17}$$

Es gilt dann

$$1 + b_n = n^{1/2n} = \left(\sqrt{n}\right)^{1/n} \geqslant 1.$$

Insbesondere fällt auf, dass daraus $b_n \geqslant 0$ folgt. Potenzieren der Identiät

$$\left(\sqrt{n}\right)^{1/n} = 1 + b_n$$

mit dem Exponenten n ergibt

$$\sqrt{n} = (1+b_n)^n = (1+b_n)(1+b_n)^{n-1} = (1+b_n)^{n-1} + b_n \underbrace{(1+b_n)^{n-1}}_{\geqslant 1}$$

und daher

$$\sqrt{n} \geqslant (1+b_n)^{n-1} + b_n.$$

In ähnlicher Weise sehen wir weiter, dass

$$\sqrt{n} \geqslant (1+b_n)^{n-1} + b_n = (1+b_n)(1+b_n)^{n-2} + b_n = (1+b_n)^{n-2} + b_n \underbrace{(1+b_n)^{n-2}}_{\geqslant 1} + b_n$$

$$\geqslant (1+b_n)^{n-2} + 2b_n$$

sowie in der Fortsetzung

$$\sqrt{n} \geqslant (1+b_n)^{n-3} + 3b_n.$$

Führen wir diesen Prozess n-mal durch, so erhalten wir schliesslich

$$\sqrt{n} \geqslant \underbrace{(1+b_n)^0}_{=1} + n b_n \geqslant n b_n.$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch n und verwenden $b_n \geqslant 0$, dann resultiert

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant b_n \geqslant 0.$$

Dies zeigt, dass die Glieder der Hilfsfolge b_n zwischen den Werten 0 und $1/\sqrt{n}$ «eingeklemmt» sind. Für wachsendes n wird dieser Bereich wegen des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$ beliebig klein, sodass

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

folgen muss. Mit der Definition von b_n und mittels (1.17) ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^{1/n}} - 1\right) = 0$$

und deshalb $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Bemerkung 1.18 Es ist eine allgemein gültige Tatsache, dass exponentiell wachsende Folgen, wie wir sie beispielsweise zuvor bei der Bakterienkultur kennengelernt haben, sämtliche Formen von potenziellem Wachstum dominieren. Wir illustrieren dies anhand der exponentiellen Folge $B_n = 2^n$ aus (1.6) sowie einer potenziell wachsenden Folge der Form $P_n = n^r$; hier ist r eine feste positive Zahl. Zum Beispiel erhalten wir für $r = 2$ die quadratisch wachsende Folge

$$P_0 = 0^2 = 0, \quad P_1 = 1^2 = 1, \quad P_2 = 2^2 = 4, \quad P_3 = 3^2 = 9, \quad P_4 = 4^2 = 16, \quad \ldots$$

Für $n = 5$ gilt $B_5 = 2^5 = 32$ und $P_5 = 5^2 = 25$, d. h., die exponentielle Folge B_n «überholt» die Folge P_n ab $n \geqslant 5$. Dieses Verhalten lässt sich mithilfe der Beobachtung aus Beispiel 1.16 allgemein erklären. Dazu schreiben wir

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(n^{1/n}\right)^n$$

und dann

$$P_n = n^r = \left(\left(n^{1/n}\right)^n\right)^r = \left(n^{1/n}\right)^{rn} = \left(\left(n^{1/n}\right)^r\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^r\right)^n.$$

Wenn wir die n-te Wurzel ziehen, erhalten wir $\sqrt[n]{P_n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^r$. Gemäss Beispiel 1.16 gilt dann, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^r \to 1^r = 1,$$

d. h., der Ausdruck $\sqrt[n]{P_n}$ nähert sich für beliebig grosse n dem Wert 1 an. Wir dürfen deshalb annehmen, dass die grobe Ungleichung

$$\sqrt[n]{P_n} \leqslant \frac{3}{2}$$

gilt, wenn n gross genug wird. Daraus folgt nach beidseitigem Potenzieren mit n, dass

$$P_n \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad \text{wenn } n \text{ genügend gross ist,}$$

und daher

$$0 \leqslant \frac{P_n}{B_n} \leqslant \frac{(3/2)^n}{2^n} = \frac{3^n/2^n}{2^n} = \frac{3^n}{(2^n)^2} = \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Da $3/4 < 1$, beobachten wir das Grenzwertverhalten $(3/4)^n \to 0$ für $n \to \infty$ und schliessen daraus, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{B_n} = 0.$$

Wir erkennen, dass die Werte der Potenzfolge P_n für zunehmendes n vernachlässigbar klein gegenüber der Exponentialfolge B_n werden.

Bemerkung 1.19 Es gibt Folgen, die keinen Grenzwert haben.

(a) So sehen wir aus dem Beispiel der Bakterienkultur, dass die Folgenglieder $B_n = 2^n$ mit wachsendem n beliebig gross werden (sich also keiner endlichen Zahl annähern). Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \infty.$$

(b) Auch die Folge $g_n = (-1)^n$ mit den Gliedern

$$g_0 = 1, \quad g_1 = -1, \quad g_2 = 1, \quad g_3 = -1, \quad g_4 = 1, \quad g_5 = -1, \quad \ldots$$

strebt gegen keinen festen Wert. Solche Folgen, die keinen Grenzwert haben, nennen wir **divergent**.

Ferner können Folgen Grenzwerte haben, die zwar endlich sind, jedoch arithmetisch nicht exakt berechnet werden können. Das folgende Beispiel illustriert dieses Phänomen.

Beispiel 1.20 In 100 cm^3 einer Flüssigkeit befinden sich 100 Viren. Damit werden 100 Versuchstiere geimpft, indem jedem Tier 1 cm^3 der Flüssigkeit verabreicht wird. Wie viele Tiere werden durchschnittlich *nicht* infiziert (d. h., bleiben frei von einem Virus)?

Lösung. Es ist nützlich, die Fragestellung umzuformulieren: Wir « verteilen » 100 Viren zufällig auf 100 Tiere; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein *bestimmtes* (aber beliebiges) Tier – nennen wir es Tier X – keinen Virus bekommt? Wir verteilen den ersten Virus: Die Wahrscheinlichkeit, dass er in Tier X gerät, ist $1/100$ (denn es gibt 100 Tiere); somit wird Tier X beim Verteilen des ersten Virus mit Wahrscheinlichkeit $99/100$ nicht getroffen. Beim Verteilen des zweiten Virus beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass Tier X nicht infiziert wird, wiederum $99/100$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Tier X bei beiden Ereignissen ohne Virus bleibt, ergibt sich daher als

$$\frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^2.$$

Diese Verabreichung wird 100-mal durchgeführt, und bei jedem Versuch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tier X nicht durch einen Virus befallen wird, gegeben durch $99/100$. Also berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass Tier X nach 100 Versuchen immer noch nicht infiziert ist, als

$$p_{100} = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 0.366032 \approx 36.6\%. \tag{1.21}$$

Da die Wahrscheinlichkeit des Virenbefalls bei jedem Tier gleich ist, werden somit von 100 Tieren im Mittel 37 Tiere nicht infiziert.

Wir verallgemeinern nun die Aufgabe etwas, indem wir sie für eine beliebige Anzahl n von Tieren und Viren formulieren: n Viren werden auf n Versuchstiere verteilt. Wie viele Tiere werden durchschnittlich nicht befallen? Die Wahrscheinlichkeit, in einem einzelnen Versuch nicht infiziert zu werden, beträgt $1-1/n$ (denn es gibt n Tiere). Beim Verteilen von n Viren errechnet sich die Wahrscheinlichkeit p_n, frei von Viren zu bleiben, analog wie oben als

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Durch diese Formel ist eine Folge definiert. Es lässt sich zeigen, dass sie einen Grenzwert hat, d. h., für zunehmendes n nähert sich p_n immer mehr einer festen Zahl an. Der Grenzwert beträgt

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e} = e^{-1} = 0.367879\ldots, \tag{1.22}$$

wobei

$$e = 2.718281828459\ldots \tag{1.23}$$

die sogenannte *Euler-Zahl* (nach Leonhard Euler) ist. Die Zahlen e und e^{-1} sind nicht rational, d. h. sie haben keine endlichen oder periodischen Dezimaldarstellungen. In der Praxis sind sie daher nur näherungsweise berechenbar. Ganz allgemein gilt

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \tag{1.24}$$

für beliebige reelle Zahlen x. Für $x=-1$ erhalten wir die Identität (1.22), wobei wir bemerken, dass der Grenzwert e^{-1} bereits in den ersten zwei Nachkommastellen mit dem Wert p_{100} aus (1.21) übereinstimmt.

Die Funktion e^x in (1.24) ist die bekannte Exponentialfunktion, welche symbolisch auch mit « exp » bezeichnet wird, d. h.

$$\exp(x) = e^x.$$

Sie ist eine der bedeutendsten Funktionen in den Naturwissenschaften.

1.4 Reihen

Wenn wir die (unendlich vielen) Glieder einer Folge summieren, sprechen wir von einer Reihe.

1.4.1 Beispiele und Definition

Beispiel 1.25 Ein Patient muss jeden Abend um 20 Uhr eine Dosis d eines Medikaments einnehmen (beispielsweise $d = 10$ mg). Im Verlauf der nächsten 24 Stunden scheidet er $p = 30\%$ davon wieder aus. Wie gross ist die Menge M_n des Medikaments, die diese Person nach $n = 1,2,3,4,\ldots$ Tagen im Körper hat?

Lösung. Zu Beginn nimmt der Patient die Dosis d des Medikaments zu sich:

$$M_0 = d.$$

Nach einem Tag scheidet er $p = 30\%$ davon wieder aus, nimmt aber wiederum eine Dosis d zu sich:

$$M_1 = M_0 - 0.3M_0 + d = 0.7M_0 + d = 0.7d + d = d(1+0.7).$$

Dieser Vorgang wiederholt sich nach dem zweiten Tag,

$$M_2 = M_1 - 0.3M_1 + d = 0.7M_1 + d = 0.7d(1+0.7) + d = d\left(1+0.7+0.7^2\right),$$

und analog nach dem dritten Tag:

$$M_3 = M_2 - 0.3M_2 + d = d\left(1 + 0.7 + 0.7^2 + 0.7^3\right).$$

Ganz allgemein gilt für die Menge des Medikaments nach Ablauf von n Tagen:

$$M_n = d\left(1 + 0.7 + 0.7^2 + 0.7^3 + \ldots + 0.7^n\right).$$

Da $1 = 0.7^0$, erhalten wir unter Verwendung der Summennotation die Darstellung

$$M_n = d\sum_{j=0}^{n} 0.7^j.$$

Für eine allgemeine Ausscheidungsrate p (mit $0 < p < 1$) haben wir analog

$$M_n = d\sum_{j=0}^{n} q^j = d(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n), \tag{1.26}$$

wobei $q = 1 - p$. Wir bemerken, dass die Folge

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad \ldots$$

durch Addieren einzelner Summanden erzeugt wird, was durch die (rekursive) Beziehung

$$M_n = M_{n-1} + d\,q^n$$

beschrieben wird.

Eine Folge von Summen, die durch stetes Addieren neuer Terme entsteht, heisst eine **Teilsummenfolge**. Der Grenzwert einer solchen Folge, also die entsprechende « unendliche Summe », bezeichnen wir als **Reihe**. Im aktuellen Fall, wo wir jeweils einen Summanden der speziellen Form $d\,q^n$ addieren, nennen wir die Summe (1.26) eine **geometrische Summe**. Für alle reellen Zahlen $q \neq 1$ gilt die explizite Formel

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; \tag{1.27}$$

siehe Aufgabe 1.8. Wenn q strikt zwischen -1 und 1 liegt, also für

$$-1 < q < 1, \tag{1.28}$$

dann (und nur dann) beobachten wir, dass

$$q^{n+1} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

Wir verwenden hier auch die Schreibweise

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q} \tag{1.29}$$

und nennen diese unendliche Summe, welche sich als Grenzwert der geometrischen Summe (1.27) ergibt, eine **geometrische Reihe**.

Für die Teilsummenfolge M_n aus (1.26) bemerken wir zunächst, dass

$$0 < q = 1 - p < 1,$$

da wir $0 < p < 1$ angenommen hatten, woraus wir nun

$$\overline{M} = \lim_{n\to\infty} M_n = d \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{d}{1-q} = \frac{d}{p} \tag{1.30}$$

schliessen. Dies ist die langfristige Menge des Medikaments, welche sich im Körper des Patienten befindet. Bemerkenswert ist, dass die Reihe – trotz der unendlichen Anzahl von Summanden – endlich bleibt. Die Medikamentenmenge im Körper stabilisiert sich also bei einem Grenzwert $\overline{M} = d/p$.

Bemerkung 1.31 Die geometrische Reihe (1.29) beginnt mit dem Index $j = 0$. In manchen Anwendungen startet die Summation jedoch erst mit $j = 1$, d. h.:

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^j = q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Da $q^0 = 1$, erhalten wir dann die Formel

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^j = -1 + \sum_{j=0}^{\infty} q^j = -1 + \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q}. \tag{1.32}$$

Eine Folge $S_0, S_1, S_2, \ldots$ der Form

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j,$$

wobei die Summanden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Glieder einer gegebenen Folge sind, heisst **Teilsummenfolge**. Wir sagen, dass die Teilsummenfolge **konvergiert**, falls die Folge $S_0, S_1, S_2, \ldots$ einen (endlichen) Grenzwert $\overline{S}$ hat. Wir schreiben dann

$$\overline{S} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j;$$

diese unendliche Summe nennt man eine **konvergente Reihe**. Falls die Teilsummenfolge *nicht* konvergiert, sprechen wir von einer **divergenten Reihe**.

Im obigen Beispiel 1.25 lassen sich die Summanden in der geometrischen Summe (1.26) als $a_j = dq^j = d(1-p)^j$ schreiben und es gilt dann

$$M_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \qquad \text{und} \qquad \overline{M} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \frac{d}{p};$$

vgl. (1.30).

1.4.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Nebst der Berechnung des Zahlenwerts einer unendlichen Summe stellt sich oftmals zunächst die Frage, ob eine gegebene Reihe (also der Grenzwert der entsprechenden Teilsummenfolge) überhaupt existiert.

Beispiel 1.33 Wir betrachten die Reihe

$$\overline{S} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots \tag{1.34}$$

Der Ausdruck « $n!$ » heisst **Fakultät von** n; er ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, d. h.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n, \tag{1.35}$$

wobei wir im Fall $n = 0$ die Konvention $0! = 1$ festlegen. Konvergiert die Reihe (1.34)?

Lösung. Wir betrachten die Teilsummenfolge

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

und beobachten, dass

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2^0}, \qquad \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \leqslant \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \leqslant \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}.$$

Ganz allgemein gilt

$$\frac{1}{j!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots j} \leqslant \frac{1}{2^{j-1}} \qquad \text{für jedes } j \geqslant 1 \tag{1.36}$$

und deshalb folgt für die entsprechenden Summen die Ungleichung

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = \frac{1}{1!} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}}. \tag{1.37}$$

Wir bemerken, dass die Summe auf der rechten Seite geometrisch ist und mithilfe der Formel (1.27) berechnet werden kann. Dazu verschieben wir zunächst den Summationsindex j um 1:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=0}^{n-1} (1/2)^j = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 2\,(1-(1/2)^n).$$

Wir schliessen, dass $S_n \leqslant 1 + 2\,(1-(1/2)^n)$. Da diese Ungleichung für alle $n \geqslant 0$ gilt, erhalten wir im Grenzfall $n \to \infty$, dass

$$\overline{S} = \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} (1 + 2\,(1-(1/2)^n)) = 3,$$

da $(1/2)^n \to 0$ für $n \to \infty$.

Wir fassen zusammen: Indem wir in (1.36) jeden einzelnen Summanden aus der Reihe (1.34) durch eine grössere Zahl begrenzen konnten, ist es uns gelungen zu zeigen, dass die Reihe $\overline{S}$ endlich ist; hier haben wir die entscheidende Beobachtung genutzt, dass die « dominierende » Summe in (1.37) berechenbar ist und für $n \to \infty$ endlich bleibt. Da ausserdem jeder Summand in der unendlichen Summe $\overline{S}$ positiv ist, lässt sich schliessen, dass die Reihe $\overline{S}$ konvergiert. Übrigens gilt die Identität

$$\overline{S} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = e, \tag{1.38}$$

wobei e die Euler-Zahl aus (1.23) ist.

Das obige Beispiel basiert auf dem Ansatz, die zu untersuchende Reihe durch eine andere, *konvergente* Reihe zu dominieren und daraus die Konvergenz der ersteren zu folgern.

Gegeben sei eine Teilsummenfolge

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j,$$

wobei wir voraussetzen, dass alle Summanden $a_0, a_1, a_2, \dots$ *nicht negativ* sind. Ferner sei eine Folge $b_0, b_1, b_2, \dots$ gegeben, für die $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$ für alle natürlichen Zahlen j gilt und von deren unendlicher Summe bekannt ist, dass sie konvergiert, d. h.

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \qquad \text{ist endlich.} \tag{1.39}$$

Dann können wir schliessen: Die Teilsummenfolge S_n konvergiert ebenfalls und es gilt

$$0 \leqslant \overline{S} = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$$

Die Summe (1.39) heisst **Majorante** der Summe $\overline{S}$.

Beispiel 1.40 Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{3^j}$?

Lösung. Wir beobachten zunächst, dass $j \leqslant 2^j$ für alle natürlichen Zahlen j gilt und folgern daraus die Ungleichungen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{3^j} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{3^j} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{2/3}{1-2/3} = 2,$$

vgl. (1.32) mit $q = 2/3$. Wir erhalten hier als Majorante eine geometrische Reihe, die konvergiert. Da die einzelnen Summanden der ursprünglichen Reihe alle nicht negativ sind, konvergiert auch diese.

In der Praxis kommen auch Reihen vor, deren einzelne Summanden wechselnde Vorzeichen haben. Hier ist *Vorsicht geboten*, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.41 Für die Teilsummenfolge

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n$$
$$= 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots + (-1)^n$$

gilt

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = 0, \quad \ldots$$

Ähnlich wie in Bemerkung 1.19 (b) wechselt der Wert von S_n unaufhörlich zwischen 1 und 0 und konvergiert daher nicht, wenn $n \to \infty$. Die Reihe ist divergent.

Das folgende Kriterium, welches dazu dient, die Konvergenz einer Reihe rasch *ausschliessen* zu können, ist in Beispielen wie dem obigen nützlich.

Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ gilt zwingend, dass ihre Summanden gegen null konvergieren, d. h. $a_j \to 0$ für $j \to \infty$. Dementsprechend sind Reihen, deren Summanden diese Eigenschaft nicht erfüllen, immer divergent.

Diese Aussage ist im Allgemeinen *nicht umkehrbar*, denn es gibt auch Reihen, deren Summanden gegen null streben, und die trotzdem divergent sind. Wir illustrieren dies anhand des folgenden Beispiels.

Beispiel 1.42 Die sogenannte *harmonische Reihe*, gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots,$$

ist ein bekanntes Beispiel einer divergenten unendlichen Summe. Um dies zu begründen, beobachten wir die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geqslant 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \geqslant 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$