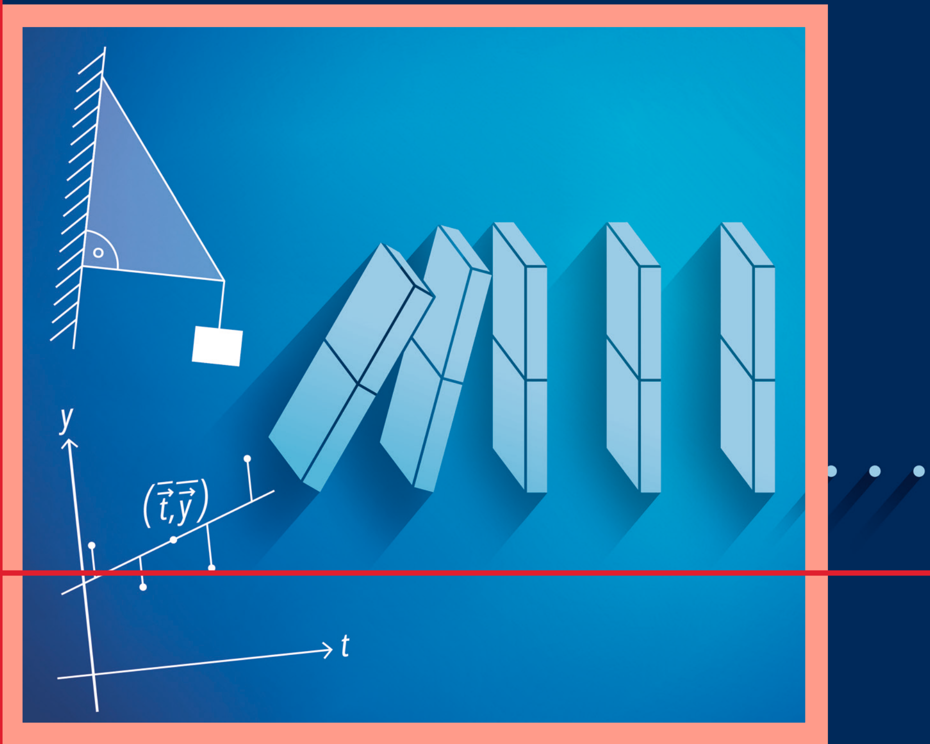
Markus Schmidt-Gröttrup
Thomas Risse

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Mathe – kann ich

Band 3: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra



HANSER

Schmidt-Gröttrup / Risse

Mathe - kann ich

Markus Schmidt-Gröttrup
Thomas Risse

Mathe – kann ich

Band 3: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

HANSER

Über die Autoren:
Dr. Markus Schmidt-Gröttrup, Hochschule Osnabrück
Dr. Thomas Risse, Hochschule Bremen

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-48228-9
E-Book-ISBN: 978-3-446-48229-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © Thomas Risse, Markus Schmidt-Gröttrup
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mit dem vorliegenden dritten Band setzen wir die Reihe *Mathe - kann ich* mit Vertiefungen von Themen der ersten beiden Bände und der Behandlung neuer Themen fort. Den Kapiteln auch dieses Bandes liegt die bewährte Struktur aus Einleitung, Lernziel-Liste, Aufgaben und Lösungen zugrunde.

Zu den Themen dieses Buches gehört Einfaches und Grundlegendes wie Wahrheitstabellen, Geometrie von Geraden und Ebenen, Vektoren und lineare Gleichungssysteme. Die meisten weitergehenden Themen knüpfen direkt an Schulstoff an, wie Rekursion an Folgen oder Kegelschnitte an Parabeln. Fachlich geht es um diskrete Mathematik (Kapitel 31-34), analytische Geometrie (Kapitel 35-36) und lineare Algebra (Kapitel 37-42). Der Kapitel-Zuschnitt entspricht der Gliederung von Core Level 1 des SEFI-Curriculums Alpers (2014), weitere Kapitel zur Statistik hätten den Rahmen dieses Buches gesprengt.

B. Alpers. *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education*. European Society for Engineering Education (SEFI), 3. Auflage, 2014. URL `http://sefi.htw-aalen.de`

Mit den drei Bänden haben Studierende in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen alles zur Hand, was sie an Angewandter Mathematik für ihr Grundstudium benötigen.

Kann-Listen

Kann-Listen enthalten konkrete Lernziele, formuliert als Feststellung der Art „Ich kann das in Frage stehende Problem lösen“. Kann-Listen strukturieren die Lernziele und ordnen ihnen Aufgaben zu - ein an Schulen vielfach verwendetes Hilfsmittel zur Organisation des eigenen Lernens. Wir haben hier die Lernziele aus dem SEFI-Curriculum übernommen und an einigen Stellen ergänzt.

Studierende haben immer wieder bestätigt, dass sie mit den Kann-Listen ihren individuellen Fortschritt dokumentieren und damit die eigene Motivation stärken. Mit unserer Reihe *Mathe - kann ich* zielen wir auch darauf ab, dieses wirksame Hilfsmittel zur Lernorganisation an Hochschulen und Universitäten sowie im Selbststudium zu etablieren.

Zum Gebrauch

Die Einleitungen sollen kompakt und dennoch anschaulich, eigenständig und in sich abgeschlossen sein. Deswegen gibt es Doppelungen wie beispielsweise beim Vektorprodukt, das für die dreidimensionale Geometrie (Kapitel 36) ein unverzichtbares Werkzeug ist, im Aufbau des Curriculums aber erst bei der Anwendung von Vektoren (Kapitel 38) vorkommt.

Die Lernziele aus dem SEFI-Curriculum sind nicht immer wörtlich ins Deutsche übersetzt, sondern teils übertragen. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Operationalisierung der Lernziele, also zu entwickelnde Kenntnisse und Kompetenzen möglichst konkret zu benennen.

Die Aufgaben dienen dazu, Sicherheit im Umgang mit alten und neuen Begriffen zu gewinnen, Sachverhalte zu verifizieren, Beispiele und Gegenbeispiele zu finden, Probleme aus der Anwendung zu lösen, Beobachtungen zu verallgemeinern und Software einzusetzen. Jede Aufgabe ist mit einer Zeitangabe versehen, die bei Auswahl und Planung helfen soll. Diese Zeitangabe ist als grober Anhaltspunkt gedacht.

Zu jeder Aufgabe gibt es eine ausformulierte Lösung. Viele Lösungen sind länger als unbedingt nötig: einerseits wünschen Studierende ausführliche Lösungen, andererseits geben erst unterschiedliche Wege zum Ziel Sicherheit für die Richtigkeit einer Lösung und ermutigen, eigene oder generierte Lösungen kritisch zu bewerten.

Lernen durch Verknüpfen

Lernen ist einerseits Anknüpfen an Bekanntes und andererseits Verknüpfen von Einzelteilen zu etwas Neuem. Dazu machen Anmerkungen und Verweise auf andere Teile des Buches sowie auf Band 1 und Band 2 Zusammenhänge sichtbar.
An etlichen Stellen gehen wir über das SEFI-Curriculum hinaus, um den Stoff mit wichtigen Anwendungen zu verbinden. Ein Beispiel ist der Dijkstra-Algorithmus, der kürzeste Wege in Graphen bestimmt. Lernziele, die wir ergänzt haben, sind wie im vorigen Band mit Sternchen markiert, z.B. 296* *Ich kann die Potenzmenge bestimmen*.

Zeit für Mathematik

Der Student Ilhan Ingenc formulierte beim Kennenlernen: „Mathe ist wie meine Freundin. Ich liebe sie, brauche aber Zeit, um sie zu verstehen.“
Auch das Schreiben dieses Buches brauchte Zeit. Das positive Feedback unserer Studierenden zu den ersten beiden Bänden lässt die für diese Buchreihe aufgewendete Stunden sinnvoll erscheinen.
Unsere Bücher haben ihren Zweck erfüllt, wenn sie Ihnen, liebe Studierende, helfen den Einsatz ihrer Zeit mit Studienerfolg zu belohnen. Sollten Sie darüber hinaus entdecken, wie überaus vielseitig, nützlich und faszinierend Mathematik sein kann, ist es das Beste, was wir erreichen können.

Dank

Die fruchtbare Zusammenarbeit mit unseren Studierenden, ihr Engagement und ihre wertvollen Rückmeldungen haben uns außerordentlich motiviert. Zudem haben uns viele Kolleginnen und Kollegen immer wieder ermutigt. Das Lektoratsteam des Hanser-Verlages hat uns mit seiner eindeutigen Überzeugung von diesem Buchprojekt nachhaltig bestärkt. Für die hilfreiche Unterstützung bedanken wir uns herzlich bei Frau Silakova-Herzberg, Frau Kubiak, Frau Schafft und Herrn Katzenmayer.

Bremen, September 2024

Markus Schmidt-Gröttrup, Thomas Risse

31 Logik

31.1 Einleitung

Mathematischer Text unterliegt wie andere Sprachen den Regeln von Syntax und Semantik. Der regelgerechte Umgang mit beiden ist die Aufgabe der *Logik*. So verletzt ein Ausdruck wie $x^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$ die Syntax, weil der Term $x^2 - 1$ nicht äquivalent zur Gleichung $\sqrt{x} = 4$ sein kann. Der Ausdruck $\sqrt{x-4} = -1$ ist syntaktisch, aber nicht semantisch korrekt, da eine Quadratwurzel niemals negativ ist. Es wird zunächst geklärt, was in natürlicher Sprache Aussagen sind und wie sie in der Mathematik aussehen. Es geht dann um Verknüpfungen von Aussagen, Wahrheitstabellen und Quantoren, mit denen zusammengesetzte Aussagen formuliert werden. Wahrheitstabellen und Quantoren formalisieren Beweise und machen sie damit einfacher und besser überprüfbar. Mehr über Logik lesen Sie Kapitel 2 im Buch von Peter Hartmann[1].

[1] P. Hartmann. *Mathematik für Informatiker*. Springer Vieweg, 7. Auflage, 2019

31.1.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Aussagen sind der Gegenstand der Logik. Eine *Aussage* ist ein sprachlicher Ausdruck, von dem entschieden werden kann, ob er *wahr* oder *falsch* ist. Für Aussagen werden meist große Buchstaben als Bezeichner verwendet.

Beispiel. Diese vier Sätze sind Aussagen:
- ▷ A: „Alle Rosen sind rot“.
- ▷ B: „Die Zahl 13 ist eine Primzahl“.
- ▷ C: „2050 ist der Euro kein Zahlungsmittel mehr“.
- ▷ D: „Ich wünsche Dir Glück!“

A ist falsch, B wahr. C kann wahr oder falsch sein. Das ist noch unbekannt. Ist D eine wahre Aussage? Hoffentlich.

Beispiel. Hier liegen keine Aussagen vor:
- ▷ E: „Bringe mir morgen den iPod mit“.
- ▷ F: „Darf ich Summenzeichen einer Doppelsumme tauschen?“

> ▷ G: „Glückwunsch zum Bachelor!“
> E und G sind Ausrufesätze, F eine Frage.

Aussagen, die eine oder mehrere *Variablen* enthalten, werden *Aussageformen* genannt. Das Einsetzen eines Wertes in die Variable wird *Belegung* genannt. Mit einer Belegung wird aus einer Aussageform eine Aussage.

> **Beispiel.** Aussageformen
> - ▷ R(x): „Im Garten von x blühen rote Rosen“. Für x können Personen eingesetzt werden, z.B. Abdul, Beate oder Carolin. Je nach Belegung der Aussage ändert sich der Wahrheitswert. So kann R(Abdul) eine wahre, aber R(Beate) eine falsche Aussage sein.
> - ▷ P(x): „Die Zahl x ist eine Primzahl“. In die Aussageform P können sinnvollerweise natürliche Zahlen für x eingesetzt werden.
> - ▷ H(x,y): „Person x macht y den Hof“. H ist eine zweistellige Aussageform. Es müssen beide Variable belegt werden, um daraus eine Aussage zu machen.

Gleichungen und Ungleichungen sind als Beispiele für Aussageformen bekannt. Das Einsetzen eines Wertes in eine Gleichung ist die Belegung der Aussage, die über den *Wahrheitswert* entscheidet. Der Wahrheitswert einer Aussage ist entweder wahr oder falsch. Eine *Boolesche* Variable wird in der Programmierung gebraucht, um einen solchen Wahrheitswert zu repräsentieren. Die Abwandlung einer Aussage, die den Wahrheitswert in jedem Fall umkehrt, heißt die *Negation*. Die Negation einer Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet.

Der Begriff Boolesch bezieht sich auf den englischen Logiker George Boole (1815–1864).

> **Beispiel.** Gegensätze sind nicht dasselbe wie die Negation.
> - ▷ O: „Anna räumte ihren Tisch an allen Tagen auf“. (Ordentlich)
> - ▷ U: „Anna räumte ihren Tisch an keinem Tag auf“. (Unordentlich)
>
> U steht im Gegensatz zu O, ist aber nicht ihre Negation $\neg O$. Die Aussage $\neg O$ besagt „Anna räumte ihren Tisch nicht an allen Tagen auf“, ist also von U deutlich zu unterscheiden. Die Aussage $\neg U$ besagt „Anna räumte ihren Tisch an mindestens einem Tag auf“.

31.1.2 Verknüpfungen

Tabelle 31.1: Verknüpfungen in Präzedenzfolge

Zeichen	Name	Sprich
$\neg A$	Negation	nicht A
$A \wedge B$	Konjunktion	A und B
$A \vee B$	Disjunktion	A oder B
$A \Rightarrow B$	Implikation	wenn A dann B
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	A genau dann wenn B

In Tabelle 31.1 sind die fünf wichtigsten Verknüpfungen für ein bzw. zwei Aussagen zusammengestellt. Die Negation ist oben bereits besprochen. Die *Konjunktion* oder *Und-Verknüpfung* ist sprachlich unmissverständlich. $A \wedge B$ ist nur wahr, wenn sowohl A also auch B gilt.

Die *Disjunktion* bzw. *Oder-Verknüpfung* bezeichnet ein einschließendes „oder“, es können beide Aussagen wahr sein. Das umgangssprachlich oft ausschließende „oder“ im Sinne von „entweder ... oder“ ist eine andere logische Operation. $A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Die *Implikation* $A \Rightarrow B$ ist der Schluss von A auf B. Wenn A wahr ist, muss B auch wahr sein. Ist A dagegen falsch, ist für B nichts festgelegt. Im Alltag wird oft eine andere Schlussweise genutzt: Aus A folgt B, nun stellen sich heraus, dass B stimmt, vermutlich wird auch A richtig sein. Dies gilt nicht für die Implikation.

> **Beispiel.** Schlussumkehr bei der Implikation ist nicht möglich.
> Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $x = \pi \Rightarrow x > 3$ wahr,
> dagegen ist die Umkehrung $x > 3 \Rightarrow x = \pi$ falsch.

Bei der *Aequivalenz@Äquivalenz* ist der Schluss in beide Richtungen möglich. Es ist somit $A \Leftrightarrow B$ genau dann, wenn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, also die Wahrheitswerte von A und B gleich sind. Wenn logische Ausdrücke nur im Bezug auf ihren Wahrheitswert untersucht werden, wird oft einfach das Gleichheitszeichen geschrieben, z.B. $A \wedge B = B \wedge A$ oder $A \vee B = B \vee A$.

Die *Präzedenz* der logischen Operationen, also die Rangfolge, die ihre Ausführungsreihenfolge bestimmt, wird oft gemäß Tabelle 31.1 definiert. Danach ist der Ausdruck $A \Leftrightarrow B \Rightarrow \neg C \vee D \wedge E$ gleichbedeutend zu $A \Leftrightarrow (B \Rightarrow ((\neg C) \vee (D \wedge E)))$.

31.1.3 Wahrheitstabellen

Wahrheitstabellen stellen logische Kombinationen dar. Die Wahrheitswerte wahr und falsch werden durch 1 und 0 codiert. Die Codierung mit w und f oder t (true) und f (false) ist ebenso üblich. In der Tabelle müssen alle möglichen Kombinationen aufgeführt werden. Bei zwei Aussagen sind es vier Möglichkeiten. Tabelle 31.2 zeigt die Wahrheitstabelle für die oben definierten Verknüpfungen.

Tabelle 31.2: Wahrheitstabelle für fünf Verknüpfungen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Logische Regeln lassen sich durch Wahrheitstabellen beweisen. In Tabelle 31.3 wird die Äquivalenz $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B \vee \neg A$ gezeigt. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich daraus, dass die beiden letzten Spalten identische Wahrheitswerte haben. Mitunter wird eine Spalte mit der Gesamtaussage ergänzt. In dieser steht immer 1 als Wahrheitswert. Eine Aussage, die immer wahr ist, heißt *Tautologie*. Eine logische Aussage ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass sie eine Tautologie ist. Bei einem *Widerspruch* steht in der Wahrheitstabelle nur die 0.

Tabelle 31.3: Beweis von $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B \vee \neg A$ mit Wahrheitstabelle

A	B	$\neg A$	$B \vee \neg A$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

31.1.4 Quantoren

Das umgekehrte A und das gespiegelte E sind in der Logik sogenannte *Quantoren*. Sie geben die Quantität der Richtigkeit der nachfolgenden Aussageform an.

- ▷ $\forall$ – für alle
- ▷ $\exists$ – es existiert (mindestens ein)
- ▷ $\exists!$ – es existiert genau ein

Beispiel. Quantoren

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \in \mathbb{N}$
  d.h. alle natürlichen Zahlen haben einen Nachfolger.
- ▷ $\exists(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a^2 + b^2 = c^2$
  d.h. es gibt mindestens ein pythagoräisches Zahlentripel.
- ▷ $\forall x \in \mathbb{Q}^+ \; \exists! p, q \in \mathbb{Z}^+ : x = \frac{p}{q}$ sowie p und q sind teilerfremd
  d.h. alle positiven rationalen Zahlen haben eine eindeutige Darstellung als teilerfremder Bruch.

Die Negation von Ausdrücken mit Quantoren ist sehr einfach und in Tabelle 31.4 zusammengefasst.

Tabelle 31.4: Negation mit Quantoren

$\neg\forall t : A(t)$	$\Leftrightarrow$	$\exists t : \neg A(t)$
$\neg\exists t : A(t)$	$\Leftrightarrow$	$\forall t : \neg A(t)$

Beispiel. Negation mit Quantoren
Die Aussagen über Antonias Schreibtischordnung im obigen Beispiel lassen sich mit der Variable t für den Tag formulieren.

$A(t)$: „Antonia räumte am Tag t ihren Schreibtisch auf". Es gelten dann $O = \forall t : A(t)$ und $U = \forall t : \neg A(t)$.

Die Negation $\neg O$ der Aussage O bedeutet, dass Antonia an mindestens einem Tag t nicht aufräumte. Es ist also $\neg\forall t : A(t) \Leftrightarrow \exists t : \neg A(t)$. Umgekehrt ist die Negation einer Existenzausssage gerade die Allaussage der Negation der Aussage: $\neg\exists t : A(t) \Leftrightarrow \forall t : \neg A(t) = U$.

Beispiel. Negation mit zwei Quantoren
Die Aussage, dass jede nichtnegative reelle Zahl eine reelle Wurzel hat, schreibt sich mit Quantoren: $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \; \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.

Negiert wird sie $\exists x \in \mathbb{R}_0^+ \; \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \neq x$. Diese negierte Aussage ist natürlich falsch. Sie wird richtig, wenn statt reeller Zahlen rationale Zahlen verwendet werden: $\exists x \in \mathbb{Q}_0^+ \; \forall y \in \mathbb{Q} : y^2 \neq x$. Ein Beispiel ist $x = 2$.

31.1.5 Beweise

Wichtige Anwendung in der Mathematik findet die Logik bei *Beweisen*.

Kapitel 13 von Band 1 erklärt einige grundlegende Begriffe zu Beweisen, wie das *Axiom*.

Einfachstes Beweisverfahren ist der *direkte* Beweis, bei dem die Implikation benutzt wird. Aus wahren oder bekannten Aussagen wird schrittweise die gewünschte Aussage abgeleitet.

Beispiel. Direkter Beweis
Es soll die Aussage bewiesen werden: Wenn eine natürliche Zahl n gerade ist, so ist auch ihr Quadrat n^2 eine gerade Zahl.

Wenn n eine gerade Zahl ist, dann lässt sich $n = 2k$ für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Dann ist $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Somit lässt sich n^2 als Produkt von 2 und einer natürlichen Zahl schreiben. n^2 ist gerade.

In der antiken Logik wird diese Schlussweise des direkten Beweises als *Modus ponens* bezeichnet: Wenn $A \Rightarrow B$ und A wahr sind, dann gilt auch B.

Beim logischen Schließen kann eine Reihe von Implikationen hintereinander angewendet werden. Aus $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ wird $A \Rightarrow C$ gefolgert, denn es handelt sich bei der Implikation um eine transitive Relation.

Beispiel. Logisches Schließen
A: „Es regnet", B: „Die Straße ist nass", C: „Es besteht Rutschgefahr". Wenn es regnet, ist die Straße nass ($A \Rightarrow B$), wenn die Straße nass ist, besteht Rutschgefahr ($B \Rightarrow C$). Also gilt: Wenn es regnet, besteht Rutschgefahr ($A \Rightarrow C$).

Aussage A bedingt die Wahrheit von B. Die Straße kann auch ohne Regen nass sein, aber wenn es regnet, ist sie nass. Hier wird von einer *hinreichenden Bedingung* gesprochen. A ist hinreichend für B. Umgekehrt wird von einer *notwendigen Bedingung* gesprochen, wenn ohne das Eintreten der Bedingung die Aussage nicht gelten kann. Wenn keine Rutschgefahr besteht, kann die Straße auch nicht nass sein. C ist eine notwendige Bedingung für B.

Eine Implikation $A \Rightarrow B$ kann oft durch die logisch äquivalente *Kontraposition* $\neg B \Rightarrow \neg A$ gezeigt werden.

Beispiel. Beweis durch Kontraposition
Gezeigt werden soll die Aussage $\forall m, n \in \mathbb{Z} : 2|m\,n \Rightarrow 2|m \vee 2|n$, oder ausformuliert: ist das Produkt zweier ganzer Zahlen gerade, so ist mindestens eine der beiden Zahlen gerade. Ist die Aussage $2|m \vee 2|n$ falsch, gibt es ganze Zahlen i, j, so dass $m = 2\,i + 1$ und $n = 2\,j + 1$. Dann ist $m\,n = (2\,i + 1)\,(2\,j + 1) = 2 \cdot (2\,i\,j + i + j) + 1$, also $m\,n$ eine ungerade Zahl. Damit ist $2|m\,n$ negiert und die logisch äquivalente Schlussfolge $2|m\,n \Rightarrow 2|m \vee 2|n$ gezeigt.

Ein *Aequivalenzbeweis@Äquivalenzbeweis* zeigt, dass eine Aussage A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist. Er wird durch zwei direkte Beweise geführt: einmal $A \Rightarrow B$ und zum anderen $B \Rightarrow A$. Wird das Beispiel mit Aufgabe 31.29 ergänzt, ist bewiesen, dass die Aussagen n gerade und n^2 gerade äquivalent sind.

Bei einem *Beweis durch Widerspruch* wird vom logischen Gegenteil der zu beweisenden Tatsache ausgegangen und mit dessen Hilfe ein Widerspruch konstruiert. Ein Widerspruch ist logisch eine Aussage der Form $A \wedge \neg A$. Ein prominentes Beispiel soll als Erläuterung ausreichen.

Beispiel. Euklids Widerspruchbeweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$
Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch teilerfremder ganzer Zahlen darstellen. Nach der Annahme gibt es daher teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$, so dass $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Es folgt $\frac{p^2}{q^2} = 2$ oder $p^2 = 2\,q^2$. Es muss p^2 also eine gerade Zahl sein. Auch p muss eine gerade Zahl sein, denn für eine ungerade Zahl der Form $2k+1$ ist das Quadrat $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ ebenfalls ungerade. p ist gerade also $p = 2k$. Dann liefert die Gleichung $2\,q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$. Das gleiche Argument wie bei p ergibt jetzt, dass auch q eine gerade Zahl ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind. Die gemachte Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ muss also falsch sein.

31.2 Lernziele

Nr	Ich kann	Aufgabe	✓
	Logische Sprache		
280	Aussagen von anderen sprachlichen Gebilden unterscheiden,	31.1–a, 31.2, 31.5	
281	eine Aussage negieren,	31.3–c, 31.4–a	
282	zusammengesetzte Aussagen mit den Verknüpfungen UND, ODER sowie der Implikation bilden,	31.3–a, 31.6, 31.7, 31.9, 31.10–abc, 31.14	
	Wahrheitstabellen		
283	eine Wahrheitstabelle für eine zusammengesetzte Aussage erstellen,	31.11, 31.12, 31.13, 31.15	
284	eine Wahrheitstabelle für eine Implikation erstellen,	31.10–de, 31.16, 31.17	
285	die Äquivalenz zweier Aussagen mithilfe einer Wahrheitstabelle prüfen,	31.8, 31.18, 31.19, 31.20	
	Beweislogik		
286	einen Widerspruch oder eine Tautologie identifizieren,	31.21	
287	die Umkehrung eines Schlusses konstruieren,	31.10–b	
288	eine Kontraposition als Satz formulieren,	31.4–b, 31.10–d, 31.18	
	Quantoren		
289	Formeln mit All-Quantoren lesen und verwenden,	31.22, 31.23, 31.25	
290	Formeln mit Existenz-Quantoren lesen und verwenden,	31.22, 31.24, 31.25	
291	Ausagen mit Quantoren negieren	31.25, 31.27	
	Beweistypen		
292	einfachen Beispiele von direkten oder indirekten Beweisen folgen,	31.3–b, 31.26, 31.28, 31.29–a	
293	einem einfachen Beweis durch Widerspruch folgen.	31.29–b, 31.30, 31.31	

31.3 Aufgaben

Aufgabe 31.1 (5 min) Es geht um den Satz: *Gib mir den Ball oder ich spiel nicht mehr.*

a) Begründen Sie, warum der Satz keine Aussage ist.
b) Formulieren Sie den Satz so, dass er eine Aussage wird.
c) Ist das *oder* im Satz aussagenlogisch gemeint? Begründen Sie ihre Ansicht.

Aufgabe 31.2 (5 min) Was liegt bei den nachfolgend gegebenen Ausdrücken vor? Kommentieren Sie diese im Hinblick auf Syntax und Semantik.

a) $x^2 - 2 = x + 4$
b) $x^3 + \sqrt{x} - \pi$
c) $\sqrt{x^2 - 1 = 5}$
d) $x^2 + 2 = -\pi$

Aufgabe 31.3 (20 min) In der Cafeteria unterhalten sich einige Neuankömmlinge über ihr Studium. Dem allgemeinen Stimmengewirr sind diese Sätze zu entnehmen:

Anna: „Ich studiere Wirtschaftsinformatik und habe wöchentlich sechs Stunden Mathe".

Benedikt: „Das stimmt nicht, dass du pro Woche sechs Stunden Mathe hast. Ich studiere auch Wirtschaftsinformatik und habe wöchentlich vier Stunden Mathe-Vorlesung".

Anna: „Ich habe wöchentlich vier Stunden Mathe-Vorlesung und zwei Stunden Mathe-Tutorium".

Benedikt: „Ich besuche nur die Mathe-Vorlesung, nicht das Tutorium".

Anna: „Wenn ich das Mathe-Tutorium nicht regelmäßig besuche, sehe ich keine Chance, die Prüfung zu bestehen".

Celina: „Ich sehe genau dann eine Chance, die Prüfung zu bestehen, wenn ich die Mathe-Vorlesung und das Tutorium regelmäßig besuche und beide gründlich durcharbeite".

a) Geben Sie das Gespräch in Form von logischen Aussageverknüpfungen wieder. Verwenden Sie dazu die Aussagen:

   C: „Ich sehe eine *Chance*, die Prüfung zu bestehen".

   G: „Ich arbeite die Mathe-Vorlesung und das Tutorium *gründlich* durch".

   S: „Ich habe (bzw. du hast) wöchentlich *sechs* Stunden Mathematik".

   V: „Ich habe (besuche) wöchentlich *vier* Stunden Mathe-Vorlesung".

   W: „Ich studiere *Wirtschaftsinformatik*".

   Z: „Ich habe (besuche) wöchentlich *zwei* Stunden Mathe-Tutorium".

b) Sieht Anna den Tutoriumsbesuch als notwendig oder als hinreichend für eine Chance zum Bestehen der Prüfung an?
c) Formulieren Sie unter Verwendung der oben erklärten Aussagen die Verneinung der von den Studierenden in der Cafeteria gesprochenen Sätze (symbolisch und in Worten).

Aufgabe 31.4 (5 min)
a) Negieren Sie folgende Aussage: A: *f ist ein Polynom und hat bei $x = 1$ eine Nullstelle.*
b) Bilden Sie die Kontraposition: B: *Wenn eine reelle Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist g in x auch stetig.*

Aufgabe 31.5 (5 min) Bei welchen der folgenden Sätze handelt es sich um eine Aussage, bei welchem um eine Aussageform? Kreuzen Sie an, wenn es sich um eine Aussageform handelt.
- ☐ An der Stelle x hat die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ eine Nullstelle.
- ☐ Mister X ist untergetaucht.
- ☐ An allen Stellen x, an denen f differenzierbar ist und einen Extremwert hat, gilt $f'(x) = 0$.
- ☐ Mach mir kein X für ein U vor!
- ☐ x gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $g(x) = x$.
- ☐ Für x gilt x^2 ist größer als x.

Aufgabe 31.6 (5 min) Gegeben sind die Aussagen
A: „Hannover ist die Hauptstadt von Niedersachsen“. *wahr*
B: „Die Ems fließt durch Hannover“. *falsch*
Gesucht sind die Wahrheitswerte von

a) $\neg A$	d) $(\neg A) \vee B$	g) $A \wedge \neg B$
b) $A \wedge B$	e) $A \Rightarrow \neg B$	h) $A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
c) $A \vee B$	f) $A \Leftrightarrow B$	i) $B \wedge \neg B$

Aufgabe 31.7 (15 min)
a) Mit den Aussagen A, B, C, D und E seien die folgenden logischen Implikationen gegeben: $A \Rightarrow \neg B$, $\neg C \Rightarrow B$, $C \Rightarrow D$, $\neg E \Rightarrow \neg D$. Alle Implikationen seien wahr. Die Aussage E sei falsch! Welche Wahrheitswerte haben A, B, C, D?
b) Die folgenden Implikationen sind wahr $A \Rightarrow B$ und $(A \vee B) \Rightarrow C$, dagegen sind diese Aussagen falsch: $A \Leftrightarrow B$ und $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(C \Leftrightarrow D)$. Welche Wahrheitswerte haben A, B, C und D?

Aufgabe 31.8 (10 min) In Band 1 finden Sie in Kapitel 14 die *de-morganschen Regeln* für Mengen. Ihre logische Entsprechung lautet: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ und $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. Beweisen Sie die de-morganschen Regeln mithilfe einer Wahrheitstabelle.

Augustus De Morgan (1806–1871) gilt neben George Boole als einer der Begründer der formalen Logik.

Aufgabe 31.9 (10 min) Abhängig vom Wert einer Booleschen Variablen V soll in einem Programm verzweigt werden. A, B, C, D, TMP1, TMP2 und V seien als Boolesche Variablen deklariert. Zwei Personen haben die Ermittlung von V formuliert:

Person 1	V	:= NOT((NOT A AND B) OR (C AND D));
Person 2	TMP1	:= A OR NOT B;
	TMP2	:= NOT C OR NOT D;
	V	:= TMP1 OR TMP2;

Hat V für alle möglichen Werte der Booleschen Variablen A, B, C und D in beiden Programmen jeweils den selben Wert?

Aufgabe 31.10 (10 min) Zwei Aussagen sind gegeben. A: „Viele Sterne sind am Himmel zu sehen" und B: „Es ist Nacht".

a) Formulieren Sie die Implikation $A \Rightarrow B$ als normalen deutschen Satz.
b) Erklären Sie, warum nicht $B \Rightarrow A$ gelten muss.
c) Zeigen Sie, dass mit der Implikation $A \Rightarrow B$ gilt: Entweder es ist Nacht oder es sind nicht viele Sterne am Himmel zu sehen.
d) Als *Kontraposition* wird die Aussage $A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ bezeichnet. Wenden Sie die Kontraposition auf das Beispiel an.
e) Stellen Sie die Aussagen aus c) und d) in einer Wahrheitstabelle dar.

Aufgabe 31.11 (10 min) Vereinfachen Sie den nachstehenden Ausdruck, indem Sie eine Wahrheitstabelle aufstellen: $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow \neg B)$.

Aufgabe 31.12 (15 min) Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für:

$$(A \Rightarrow \neg B) \wedge (C \vee \neg A)$$

Vereinfachen Sie den logischen Ausdruck.

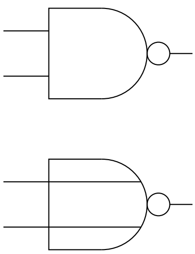


Bild 31.1: Digitale Schaltungen NAND und NOR

Aufgabe 31.13 (5 min) Boole'sche Operationen lassen sich durch digitale Schaltungen oder *Gatter* realisieren, wie sie in Bild 31.1 dargestellt sind. *NAND* und *NOR* sind als logische Verneinungen von *AND* und *OR* definiert.

$$\begin{aligned} &A\ AND\ B &&= A \wedge B, \qquad &&A\ NAND\ B &&= \neg(A \wedge B),\\ &A\ OR\ B &&= A \vee B, \qquad &&A\ NOR\ B &&= \neg(A \vee B). \end{aligned}$$

Erstellen Sie Wahrheitstabellen für die Operationen *NAND* und *NOR*.

Aufgabe 31.14 (15 min) Zeigen Sie durch Konstruktion, dass sich die logischen Operationen Negation, Konjunktion sowie Disjunktion ausschließlich mittels NAND-Gattern und ausschließlich mit NOR-Gattern realisieren lassen. Vergleiche Aufgabe 31.13.

Aufgabe 31.15 (10 min) Finden Sie eine logische Formel für das „ausschließende Oder", wie es im Deutschen durch „entweder – oder"ausgedrückt wird.

Tipp: Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle mit den passenden Wahrheitswerten und drücken Sie „entweder – oder"durch $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ aus.

Aufgabe 31.16 (5 min) Bei einem Kartenspiel trägt jede Karte auf einer Seite eine Zahl und auf der anderen Seite einen Buchstaben. Dabei gilt folgende Regel:

Wenn der Buchstabe auf einer Karte ein Vokal ist, dann ist die Zahl auf der anderen Seite der Karte eine gerade Zahl.

Welche der Karten in Bild 31.2 müssen umgedreht werden, um zu prüfen, ob die Regel eingehalten wurde?

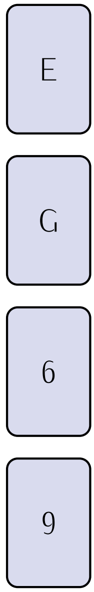


Bild 31.2: Der Kartentest

Aufgabe 31.17 (5 min) Vereinfachen Sie den logischen Ausdruck $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$, indem Sie eine Wahrheitstabelle erstellen.

Aufgabe 31.18 (5 min) Überprüfen Sie die Äquivalenz von Implikation und Kontraposition mithilfe einer Wahrheitstabelle.

Aufgabe 31.19 (10 min) Beweisen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle die Gültigkeit des Distributivgesetzes

$$((A \Rightarrow B) \vee C) = ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$$

Aufgabe 31.20 (15 min) Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, wenn Sie ein Distributivgesetz für $A \Rightarrow (B \vee C)$ beweisen wollen. Nennen Sie das fragliche Distributivgesetz. Geben Sie Schritt für Schritt an, wie der Beweis abläuft und führen Sie ihn durch.

Aufgabe 31.21 (5 min) Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie?

a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ b) $(B \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Aufgabe 31.22 (5 min) Es bezeichne P_3 die Menge aller reellen Polynome von Grad 3. Drücken Sie den folgenden Sachverhalt mit Quantoren aus. Jedes Polynom aus P_3 hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 31.23 (5 min) Kreuzen Sie an, was die richtig formulierte Bedeutung dieses Ausdrucks ist:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : P(x).$$

- ☐ x ist eine positive, reelle Zahl, es gilt also $x > 0$,
- ☐ für alle x aus der Menge der positiven, reellen Zahlen gilt $P(x)$,
- ☐ für alle x aus der Menge der positiven, reellen Zahlen, gehört x auch zur Menge P,
- ☐ es gibt ein x aus der Menge der positiven, reellen Zahlen sodass $P(x)$,
- ☐ wenn x zur Menge P gehört, ist x eine positive, reelle Zahl,
- ☐ wenn für x die Eigenschaft $P(x)$ gilt, ist x eine positive, reelle Zahl.

Aufgabe 31.24 (5 min) Es sei f eine im Intervall I definierte reelle Funktion. Geben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks an

$$\exists x \in I : f(x) = 0.$$

- ☐ x gehört zum Intervall I, wenn $f(x) = 0$ ist,
- ☐ für alle x aus dem Intervall I gilt $f(x) = 0$,
- ☐ es existiert ein x aus dem Intervall I mit $f(x) = 0$,
- ☐ f hat im Intervall I eine Nullstelle,
- ☐ alle Nullstellen von f liegen in I.

Aufgabe 31.25 (15 min) Die Stetigkeit einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 kann so formuliert werden. Vergleiche Aufgabe 26.4 aus Band 2.

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \left|f(x) - f(x_0)\right| < \epsilon$$

a) Schreiben Sie den Ausdruck im sprachlichen Klartext aus.
b) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$, den Wert $x_0 = 1$ und $\epsilon = 0.4$ einen geeigneten Wert δ. Skizzieren Sie die Situation.
c) Bilden Sie die Negation des Ausdrucks.

Aufgabe 31.26 (10 min) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ das geometrische Mittel kleiner gleich dem arithmetische Mittel ist, also

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Tipp: Setzen Sie $a = \sqrt{x}$ und $b = \sqrt{y}$ und benutzen Sie eine binomische Formel.

Aufgabe 31.27 (5 min) Es bezeichne P_4 die Menge aller reellen Polynome bis zum Grad 4. Negieren Sie den folgenden Quantoren-Ausdruck

$$\forall f \in P_4\, \exists x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = 0.$$

Aufgabe 31.28 (5 min) Softwareingenieur W. testet ein Netzwerkprogramm, indem er der Reihe nach alle möglichen Zustände mit allen Eingaben ausprobiert. Mit welcher Methode „beweist“er die Korrektheit seines Programms?

Aufgabe 31.29 (15 min) Ist das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n gerade, so ist n ebenfalls gerade. Beweisen Sie diesen Satz

a) direkt,
b) durch Widerspruch.

Aufgabe 31.30 (15 min) Beweisen Sie, dass die Wurzel einer Primzahl p keine rationale Zahl sein kann.

Tipp: Verwenden Sie den Beweis von Euklid der Irrationalität von $\sqrt{2}$ als Vorlage.

Aufgabe 31.31 (15 min) Zeigen Sie durch Widerspruch: jede alternierende und konvergente Folge (a_n) hat den Grenzwert 0. Vgl. Kapitel 27 aus Band 2.

31.4 Lösungen

Lösung 31.1

a) Der Satz enthält die Aufforderung *Gib mir den Ball*. Dies ist keine Aussage, da eine Aufforderung nicht als wahr oder falsch klassifiziert werden kann. Die Zusammensetzung mit der Aussage *ich spiel nicht mehr* ändert daran nichts.
b) *Du gibst mir den Ball oder ich spiel nicht mehr.*
c) Nein. Das aussagenlogische *oder* ist inklusiv, erlaubt also die Wahrheit beider Teile. Im fraglichen Satz ist das exklusive *entweder ... oder* gemeint, sonst ist die Androhung des Spielabbruchs unwirksam.

Lösung 31.2

a) Der Ausdruck ist eine Gleichung, also ein Aussage. Für $x = 3$ oder $x = -2$ ist die Gleichung wahr.
b) Der Ausdruck ist ein Term. Er ist weder wahr noch falsch, sondern nimmt je nach dem Wert von x einen Zahlenwert an. Für negative x ist er nicht definiert.
c) Der Ausdruck ist unsinnig, da aus einer Gleichung keine Wurzel gezogen werden kann. Der Ausdruck ist syntaktisch fehlerhaft.
d) Der Ausdruck ist eine Aussage, die jedoch immer falsch ist, da $x^2 + 2$ nicht negativ sein kann. Er ist daher semantisch falsch.

Lösung 31.3

a) Anna: $W \wedge S$
Benedikt: $\neg S; W \wedge V$
Anna: $V \wedge Z$
Benedikt: $V \wedge \neg Z$
Anna: $\neg Z \Rightarrow \neg C$
Celina: $C \Leftrightarrow V \wedge Z \wedge G$

b) Anna sieht den Tutoriumsbesuch als notwendige Voraussetzung für eine Chance zum Bestehen der Prüfung.

c) *Anna:* $\neg W \vee \neg S$ – „Ich studiere nicht Wirtschaftsinformatik oder habe wöchentlich keine sechs Stunden Mathe".

Benedikt: $S; \neg W \vee \neg V$ – „Du hast pro Woche sechs Stunden Mathe. Ich studiere nicht Wirtschaftsinformatik oder habe wöchentlich keine 4 Stunden Mathe-Vorlesung."

Anna: $\neg V \vee \neg Z$ – „Ich habe wöchentlich keine vier Stunden Mathe-Vorlesung oder keine zwei Stunden Mathe-Tutorium."

Benedikt: $\neg V \vee Z$ – „Ich besuche nicht die Mathe-Vorlesung oder ich besuche das Tutorium."
Gleichwertig oder äquivalent ist:
$V \Rightarrow Z$ – „Wenn ich die Mathe-Vorlesung besuche, dann auch das Tutorium."

Anna: $\neg Z \wedge C$ – „Ich besuche das Mathe-Tutorium nicht, sehe aber eine Chance, die Prüfung zu bestehen."Grund: $\neg(\neg Z \Rightarrow \neg C) = \neg(Z \vee \neg C) = \neg Z \wedge C$

Celina: $\neg C \Leftrightarrow V \wedge Z \wedge G$ – „Ich sehe genau dann keine Chance, die Prüfung zu bestehen, wenn ich die Mathe-Vorlesung und das Tutorium regelmäßig besuche und beide gründlich durcharbeite."

Lösung 31.4

a) f ist kein Polynom oder f hat keine Nullstelle bei $x = 1$.

b) Wenn eine reelle Funktion g in x nicht stetig ist, ist sie in x auch nicht differenzierbar.

Lösung 31.5

☒ An der Stelle x hat die Funktion mit $f(x) = \sin(x)$ eine Nullstelle. *Für x können Werte eingesetzt werden, dann entsteht eine wahre oder falsche Aussage. Wahr für $x = k\,\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, sonst falsch.*

☐ Mister X ist untergetaucht. *Es handelt sich um eine Aussage. Für X kann nichts eingesetzt werden, X meint eine bestimmte gesuchte Person.*

☐ An allen Stellen x, an denen f differenzierbar ist und einen Extremwert hat, gilt $f'(x) = 0$. *Es handelt sich um eine wahre Aussage. Sie gilt für viele x. Deshalb kann nichts eingesetzt werden.*

☐ Mach mir kein X für ein U vor! *Hier liegt weder Aussage noch Aussageform vor. Eine Aufforderung ist keine Aussage.*

☒ x gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $g(x) = x$. *Mit Einsetzen von x liegt eine Aussage über einen Fixpunkt von g vor.*

☒ Für x gilt x^2 ist größer als x. *Für $0 \leq x \leq 1$ ist die Aussage falsch, sonst wahr.*

Lösung 31.6

a) f	d) f	g) w
b) f	e) w	h) w
c) w	f) f	i) f

Lösung 31.7

a) Wenn E falsch ist, folgt aus $(\neg E) \Rightarrow (\neg D)$, dass auch D falsch ist. Wegen $C \Rightarrow D$ kann nur C falsch gelten, sonst müsste D wahr sein. Aus $(\neg C) \Rightarrow B$ folgt damit die Wahrheit von B. Wegen $A \Rightarrow (\neg B)$ kann schließlich A nicht wahr sein. Es sind somit alle Aussagen außer B falsch.

b) Wenn $A \Rightarrow B$ wahr, aber $A \Leftrightarrow B$ falsch ist, kann A nur falsch und B wahr sein. Dann ist die Implikation nämlich wahr, die Äquivalenz aber falsch. $A \vee B$ ist damit wahr, folglich auch C. Die rechte Seite der letzten Aussage $\neg(C \Leftrightarrow D)$ muss falsch sein, denn sonst könnte die Äquivalenz zur wahren Aussage $A \vee B$ nicht falsch sein. Damit ist $C \Leftrightarrow D$ wahr und mit C auch D wahr. Es sind somit alle Aussagen wahr außer A.

Lösung 31.8 Die Wahrheitstabelle für $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ ist:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Da die vierte und siebte Spalte gleich sind, gilt die Äquivalenz.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Entsprechend gilt auch $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Lösung 31.9 Person 1 programmiert $\neg((\neg A \wedge B) \vee (C \wedge D))$. Das ist nach der Regel von de Morgan gleich $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg D)$. Vergleiche

Aufgabe 31.8. Person 2 programmiert dagegen $(A \vee \neg B) \vee (\neg C \vee \neg D)$. In der Verknüpfung der Teilausdrücke wird also Konjunktion und Disjunktion vertauscht.

Logische Fälle, in denen sich die Fragmente unterscheiden, sind
- ▷ A, C und D wahr,
- ▷ C und D wahr aber B falsch,
- ▷ B wahr, aber A und C falsch,
- ▷ B wahr, aber A und D falsch.

Dabei ist jeweils ein Teilausdruck wahr und der andere falsch.

Lösung 31.10

a) Wenn viele Sterne am Himmel zu sehen sind, ist es Nacht.

b) $B \Rightarrow A$ ist genau dann falsch, wenn B wahr, aber A falsch ist, etwa wenn es nachts bewölkt ist.

c) Der Satz *Entweder es ist Nacht oder es sind nicht viele Sterne am Himmel zu sehen* ist logisch formuliert: $B \vee \neg A$. Er ist nur dann falsch, wenn A wahr ist, aber B falsch und somit logisch identisch zu $A \Rightarrow B$.

d) *Wenn es nicht Nacht ist, sind nicht viele Sterne am Himmel zu sehen.*

e) Die Wahrheitstabelle leitet die Kontraposition ab und stellt die Aussage aus c) dar.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$B \vee \neg A$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Identische Spalten sind äquivalent.

Lösung 31.11

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow \neg B)$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

Es folgt $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow \neg B)) = \neg A \wedge B$.

Ohne Wahrheitstabelle geht es so: $A \Leftrightarrow \neg B$ besagt, dass A und B verschiedene Wahrheitswerte haben. Wenn A wahr ist und B falsch ist, gilt nicht $A \Rightarrow B$. Somit verbleibt nur der Fall, dass A falsch und B wahr ist.

Lösung 31.12

A	B	C	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$\neg A$	$C \vee \neg A$	$(A \Rightarrow \neg B) \wedge$ $(C \vee \neg A)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0

Es folgt $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (C \vee \neg A) = (\neg A \vee (\neg B \wedge C)) = A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$.

Lösung 31.13

A	B	A $NAND$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Lösung 31.14

	NAND: $\barwedge$	NOR: $\veebar$
Negation $\neg x =$	$\neg(x \wedge x) =$ $x \barwedge x$	$\neg(x \vee x) =$ $x \veebar x$
Konjunktion $x \wedge y =$	$\neg(\neg(x \wedge y)) =$ $\neg(\neg(x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge y))$ $= (x \barwedge y) \barwedge (x \barwedge y)$	$\neg(\neg x \vee \neg y) =$ $\neg(\neg(x \vee x) \vee \neg(y \vee y))$ $= (x \veebar x) \veebar (y \veebar y)$
Disjunktion $x \vee y =$	$\neg(\neg x \wedge \neg y) =$ $\neg(\neg(x \wedge x) \wedge \neg(y \wedge y))$ $= (x \barwedge x) \barwedge (y \barwedge y)$	$\neg(\neg(x \vee y)) =$ $\neg(\neg(x \vee y) \vee \neg(x \vee y))$ $= (x \veebar y) \veebar (x \veebar y)$

Lösung 31.15

A	B	Entweder A oder B
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	F

Es gibt mehrere Möglichkeiten für *entweder A oder B*:

$$\neg(A \Leftrightarrow B), \qquad (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A),$$
$$A \Leftrightarrow \neg B, \qquad \text{oder}(A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee \neg B).$$

Lösung 31.16 Die erste und letzte Karte müssen überprüft werden. Bei der zweiten und dritten Karte kann die Regel nicht verletzt sein, egal was sich auf der anderen Seite befindet. Die nachstehende Wahrheitstabelle gibt die bekannten Wahrheitswerte für die Karten und die sich daraus ergebenden Werte zur Prüfung der Aussage an.

Wahrheitstabelle Karte	Buchstabe Vokal	Zahl gerade	Regel Vokal⇒gerade
E	w	?	?
G	f	?	w
6	?	w	w
9	?	f	?

Lösung 31.17

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \vee B \Rightarrow A \wedge B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Die Gleichheit besagt: $A \vee B \Rightarrow A \wedge B = A \Leftrightarrow B$.

Q: Wie kann ich das sehen?
A: Nutze die Inklusionsregeln:
1) Wenn $A \wedge B$ gilt, muss A gelten. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
2) Wenn A gilt, gilt auch $A \vee B$. $A \Rightarrow (A \vee B)$

Wegen Inklusion 2 ist $A \Rightarrow (A \vee B)$ und wegen Inklusion 1 gilt $(A \wedge B) \Rightarrow B$. Zusammen mit dem linken Teil der Behauptung gilt $A \Rightarrow A \vee B \Rightarrow A \wedge B \Rightarrow B$. Analog kann $B \Rightarrow A$ gefolgert werden.

Umgekehrt folgt aus $A \Leftrightarrow B$ sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$. Aus $A \Rightarrow B$ folgt aber auch $A \vee B \Rightarrow B \vee B = B$. Ebenso kann aus $A \vee B$ auch A gefolgert werden, mithin $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$.

Lösung 31.18

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Die vorletzte Spalte mit der Implikation hat die gleichen Wahrheitswerte wie die letzte Spalte mit der Kontraposition.

Lösung 31.19 Die Wahrheitstabelle besteht aus acht Zeilen, die alle logischen Kombinationen der drei Variablen A, B, C enthalten. Diese werden in den ersten drei Spalten aufgeführt. Dahinter werden aus den logischen Teilstücken der Aussage beide Teile $(A \Rightarrow B) \vee C$ und $A \vee C \Rightarrow B \vee C$ der Gesamtaussage erstellt. Da diese identische Wahrheitswerte enthalten, liegt mit ihrer Äquivalenz eine Tautologie vor.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \vee C$	$B \vee C$	$(A \Rightarrow B) \vee C$	$A \vee C \Rightarrow B \vee C$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Lösung 31.20

- ▷ Ich erstelle das vermutete Distributivgesetz $\big(A \Rightarrow (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)\big)$.
- ▷ Ich erstelle eine Wahrheitstabelle mit allen acht möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von A, B und C.
- ▷ Ich füge eine Spalte $B \vee C$ für die Klammer auf der linken Seite an und verknüpfe die Werte aus den Spalten für B und C mit logischem Oder.
- ▷ Ich füge die Spalte $L : A \Rightarrow (B \vee C)$ für die linke Seite an und verknüpfe die Werte aus den Spalten A und $B \vee C$ mit der Implikation. Eine Null ergibt sich nur, wenn $A = 1$ und $B \vee C = 0$ ist.
- ▷ Ich füge eine Spalte $A \Rightarrow B$ für die erste Klammer der rechten Seite an und verknüpfe wie eben.
- ▷ Ich füge eine Spalte $A \Rightarrow C$ für die zweite Klammer der rechten Seite an und verknüpfe wie eben.