



Michael Bürker

Von Eratosthenes bis Einstein

Eine mathematische Zeitreise durch die
Geschichte des physikalischen Weltbilds



Springer Spektrum

Von Eratosthenes bis Einstein

Michael Bürker

Von Eratosthenes bis Einstein

Eine mathematische Zeitreise durch die
Geschichte des physikalischen Weltbilds

Michael Bürker
Tübingen, Deutschland

ISBN 978-3-658-44023-7 ISBN 978-3-658-44024-4 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-44024-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <https://portal.dnb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2024

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jede Person benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des/der jeweiligen Zeicheninhaber*in sind zu beachten.

Der Verlag, die Autor*innen und die Herausgeber*innen gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autor*innen oder die Herausgeber*innen übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Wenn Sie dieses Produkt entsorgen, geben Sie das Papier bitte zum Recycling.

Vorwort

Fachleiter, die Referendare in der Unterrichtspraxis in Mathematik und Physik unterstützen und ausbilden, haben mehrfach beklagt, dass die Kompetenz der Studierenden nach ihrem Hochschulstudium in Bezug auf die Geschichte der beiden Fächer Mathematik und Physik sowie der dazu affinen Fächer wie zum Beispiel Astronomie sehr zu wünschen übrig lässt. Dies war für mich als Lehrenden dieser Fächer eine starke Motivation, nach meiner Lehrtätigkeit, die am Dietrich-Bonhoeffer-Gymnasium Metzingen einige Jahrzehnte, anschließend an der Abteilung für Didaktik der Mathematik der Universität Freiburg einige Jahre betrug, ein Buch zu schreiben, in dem versucht wird, Elemente aus Mathematik, Physik, Astronomie, Philosophie und Geschichte in didaktisch sinnvoller Weise zu einem Ganzen zusammenzuführen. Dabei werden die mathematisch dominierten Teile sich weitgehend im Rahmen der Schulmathematik bewegen. Für den Buchtitel habe ich zwei Protagonisten aus der Geschichte des Weltbilds genommen, einen unbekannteren, Eratosthenes, und einen sehr bekannten, Einstein. Eratosthenes hat mit der Bestimmung des Erdumfangs 240 v. Chr. eine wichtige Konstante der Geographie, aber auch der Astronomie berechnet. Einstein hat mit der Speziellen und der Allgemeinen Relativitätstheorie wichtige mathematische Instrumente an die Hand gegeben, um realistische Modelle für das heutige Universum zu entwerfen. Die weiteren Protagonisten in diesem langen Zeitraum sind Thales als Anker der Philosophiegeschichte, Pythagoras, Platon, Aristoteles, Aristarch, Archimedes, Euklid und Ptolemäus in der Antike, sowie in der Neuzeit Kopernikus, Brahe, Galilei, Kepler, Newton und Planck, für die mehr oder weniger kurze Biographien skizziert sind. Das Buch ist als mathematische Zeitreise durch die Geschichte des physikalischen Weltbilds vor allem für Lehramtsstudierende der Mathematik und Physik geschrieben, aber auch für Personen, die mehr über die Geschichte des Weltbilds erfahren wollen. Die Zeitreise beginnt mit der Rolle der Mathematik in der Philosophie der Antike, wo die ersten rationalen Fragen an die Natur gestellt und rationale Antworten gegeben werden, und kehrt am Schluss wieder zur Philosophie zurück, wo wir mit dem heutigen Wissen um die Urknalltheorie die Frage stellen: Beruht die Entwicklung des Universums bis hin zur Existenz des Menschen auf einer zielgerichteten Strategie oder nur auf bloßem Zufall mit äußerst geringer Wahrscheinlichkeit?

Während der Abfassung meines Manuskripts hatte ich die Gelegenheit, große Teile davon innerhalb des Arbeitskreises „Geschichte der Naturwissenschaften“ an der Universität Tübingen vorzutragen und zu besprechen. Dafür danke ich den Damen Karin Pfeffer und Irene Schupp sowie den Herren Philipp Albert, Helmut Fischer, Wolfgang Knapp, Ernst Kühn, Volker Lukas, Roland Müller und Michael Schütz sehr herzlich.

Außerdem geht mein herzlicher Dank an Georg Weiss und an Rudolf Renz für die kritische Durchsicht des Manuskripts und an Astrid Brinkmann, Thomas Borys, Matthias Brandl und Frank Loose für die langjährige Unterstützung dieses Buchprojekts.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
Teil I Das Weltbild in der Antike		
2	Antike Philosophie und die Rolle der Mathematik	7
3	Alexandria: Hochburg der Wissenschaften	31
4	Berechnungen an Himmelskörpern	39
5	Der Mechanismus von Antikythera	51
Teil II Die kopernikanische Wende		
6	Astronomie im Mittelalter und in der Renaissance	67
7	Nikolaus Kopernikus	71
8	Tycho Brahe	77
9	Galileo Galilei	83
10	Johannes Kepler	89
11	Keplers „neue Astronomie“	93
12	Das Fernrohr – eine geniale Erfindung	103
13	Galilei und die katholische Kirche: Der Kampf um das kopernikanische System	115
14	Galileis und Keplers Spätwerke	121
Teil III Isaac Newton und das neuzeitliche Weltbild bis 1900		
15	Newtons kreative Jahre	129
16	Newton als Professor in Cambridge	139

17	Newton's Weg zu seinem Hauptwerk	145
18	Newton und Leibniz	153
19	Erfolge der Newton'schen Mechanik	157
20	Das Licht der Sterne als Informationsquelle	165
Teil IV Neue Entwicklungen im 20. Jahrhundert		
21	Max Planck	173
22	Albert Einstein	181
23	Einsteins Lichtquantenhypothese	185
24	Effekte der speziellen Relativitätstheorie	191
25	Die Gleichung $E = mc^2$	203
26	Überlegungen zur allgemeinen Relativitätstheorie	207
27	Einige Aspekte der modernen Kosmologie	217
28	Jenseits der Naturwissenschaft: Das anthropische Prinzip	225
Literatur		229
Personenverzeichnis		233

Über den Autor

Michael Bürker hat in Tübingen bei Prof. Helmut Wielandt in Gruppentheorie promoviert. Zusammen mit Prof. Wolfgang Knapp hat er gruppentheoretische Arbeiten in der *Mathematischen Zeitschrift* und im *Archiv der Mathematik* veröffentlicht, am Dietrich-Bonhoeffer-Gymnasium Metzingen Mathematik, Physik, Informatik und Astronomie unterrichtet, hat beim Lehrbuch *Lambacher Schweizer* mehrere Jahre mitgearbeitet und war die letzten fünf Berufsjahre an der Abteilung für Didaktik der Mathematik der Universität Freiburg für die Verbindung von Theorie und Praxis in der Lehramtsausbildung zuständig. Er ist Mitglied des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, hat etliche Artikel in der Reihe *Mathematik vernetzt* veröffentlicht. Er hat zusammen mit Freiburger Kolleginnen und Kollegen als Vorsitzender des MNU-Ortsausschusses den MNU-Kongress 2012 in Freiburg vorbereitet. Seit August 2012 ist er im Ruhestand.



Einleitung

Seit jeher blicken die Menschen staunend auf das nächtliche, uns umgebende Himmelszelt mit unzählig vielen Sternen.

Menschen aller Zeiten und Kulturen haben sich gefragt, wie dieser „Kosmos“ entstanden ist, und haben hinter dem im wahrsten Sinne des Wortes unbegreiflichen Sternenhimmel göttliches Wirken vermutet. Für Sonnen- und Mondgottheiten wurden Tempel gebaut, Mythen von der Erschaffung der Welt in heiligen Büchern aufgeschrieben und von Generation zu Generation weitergegeben.

Die Menschen haben aber auch versucht, die Auf- und Untergänge von Sonne, Mond, Planeten und anderen Himmelskörpern zu verstehen und nach den Hintergründen für diese sich regelmäßig wiederholenden Vorgänge gesucht.

In den Hochkulturen des Vorderen und Mittleren Orients, im Zweistromland und in Ägypten, bildete sich eine astronomisch gebildete Priesterschaft heraus, die Tafeln mit Auf- und Untergangszeiten von Sonne, Mond, Planeten und Fixsternen erstellte. In diesen über viele Jahrhunderte aufgezeichneten Daten erkannten sie die Wiederkehr bestimmter Stellungen der Himmelskörper und bemühten sich um astronomische Vorhersagen.

Spielten bei der Deutung vieler Naturerscheinungen zunächst Mythen eine entscheidende Rolle, traten ab dem 6. Jahrhundert v. Chr. zunehmend Naturphilosophen wie z. B. Thales von Milet mit ersten rationalen Deutungen hervor. Sie sowie Pythagoras und seine Schule setzten nicht nur im Naturverständnis Impulse, sondern auch in Philosophie, Astronomie, Mathematik und Musiktheorie, die in der Zeit von Sokrates, Platon und Aristoteles zu einem Gedankengebäude führten, in dem sich viele nachfolgende Generationen bewegten. Vor allem durch Mond- und Sonnenfinsternisse wurde die Erde mehr und mehr als einer unter vielen Himmelskörpern wahrgenommen.

Die Bezüge zwischen Mathematik und antiker Philosophie sind vielfältig: Die beiden nach Thales und Pythagoras benannten Sätze über rechtwinklige Dreiecke sind vielen Menschen bekannt, Platon war der Namensgeber für die fünf regulären Körper, Aristoteles der Initiator der Logik, eines ganzen Teilgebiets der Mathematik. Insofern werden wir die kulturgeschichtliche Rolle der Mathematik im Rahmen des antiken Weltbilds beleuchten. Besonders augenfällig kommt das Zusammenwirken von Astronomie, Mathematik und handwerklich-mechanischer Kunstfertigkeit im Mechanismus von Antikythera zum Ausdruck, fließt hier doch das enorme Wissen babylonischer Priesterastronomen und griechischer Naturphilosophen sowie hellenistischer Erfindergeist zusammen. Im Rahmen der antiken Philosophie hat sich vor allem die Geometrie zu einer modellhaften, streng logisch aufgebauten Wissenschaft entwickelt, die ihren vorläufigen Abschluss in Euklids Hauptwerk *Elemente* gefunden hat. Die Geometrie feierte im 3. Jahrhundert v. Chr. einen „globalen“ Erfolg in Eratosthenes' recht genauer Bestimmung des Erdumfangs. Abschätzungen für die Mondentfernung folgten, ebenso die, wenn auch noch sehr ungenaue, als Vielfache der Mondentfernung bestimmte Sonnenentfernung durch Aristarch von Samos. Im Gegensatz zu diesem, der die Sonne im Mittelpunkt des Kosmos sah, postulierte Aristoteles als einer der angesehensten antiken Philosophen ein Weltbild, das die Erde als ruhenden Mittelpunkt des Weltalls annahm, um den alle anderen Himmelskörper kreisten. Dieses geozentrische System blieb fast 2000 Jahre lang unangefochten, bis Kopernikus zu Beginn der Neuzeit die nach ihm benannte Wende einleitete. Während die zentrale These in seinem epochalen Buch *De revolutionibus orbium coelestium* damals als alternatives, für astronomische Berechnungen geeignetes mathematisches Modell angesehen wurde, waren Keplers Planetengesetze und Galileis aufsehenerregende Entdeckungen mit dem neu erfundenen Fernrohr wie zum Beispiel die Entdeckung der Venusphasen deutliche Hinweise auf das heliozentrische System. Mehr noch: Keplers Planetengesetze und Galileis Fallgesetz waren zwei Generationen später für Newton Eckpfeiler seines universell gültigen Gravitationsgesetzes und einer neuen Mechanik, die Kräfte, Massen und Bewegungen in einen allgemeinen, mathematisch-logischen Zusammenhang brachten. Mit den in Newtons fundamentalem Jahrtausendwerk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* formulierten Gesetzen war die lange nachwirkende aristotelische Trennung von Erd- und Himmelsphysik überwunden.

Mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz standen weitreichende mathematische Werkzeuge für Berechnungen für die im Entstehen begriffenen exakten Naturwissenschaften zur Verfügung. Der Einfluss mathematischer Methoden wuchs und führte zu fruchtbaren Entwicklungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch beim Zusammenwirken von experimentell ermittelten Daten und theoretischer Überlegung in den Naturwissenschaften. In dieser Zeit der Aufklärung veränderte sich nicht nur die Denk- und Arbeitsweise der Wissenschaftler, sondern der Menschen überhaupt. Der Ruf des Philosophen Kant „Habe den Mut, dich deines Verstandes zu bedienen“, fand breiten Widerhall. Durch zuverlässige Messung der Fixsternparallaxen konnte man im 19. Jahrhundert den endgültigen Beweis für das heliozentrische Weltsystem erbringen. Eine weitere genaue Messung, nämlich die der Lichtgeschwindigkeit, erwies sich als überaus bedeutend:

Durch ausgeklügelte Experimente fand man zur Verblüffung der damaligen Fachwelt heraus, dass die Geschwindigkeit des Lichts nicht von der Geschwindigkeit der Lichtquelle abhängt! Die Lichtgeschwindigkeit ist damit eine der fundamentalen „universellen“ Konstanten der Physik. Nach zwei Jahrzehnten intensiver Diskussionen unter den Physikern löste Einstein 1905 das Rätsel um eine plausible Theorie zu diesem unerwarteten Messergebnis mit seiner Speziellen Relativitätstheorie, die er ein Jahrzehnt später zu einer fundamentalen Verallgemeinerung von Newtons Gravitationsgesetz, der Allgemeinen Relativitätstheorie, erweiterte. Beide Theorien sind bis heute unbestritten.

Während die letztere Theorie vor allem beim Blick ins „Große“, in das Universum, zum Tragen kommt, führte Planck im Jahr 1900 eine vom Zahlenwert her sehr kleine, aber ebenso fundamentale Konstante in die Physik ein, das nach ihm benannte Wirkungsquantum. Dies war das Startsignal für die Entwicklung der Quantentheorie, die den Fokus auf das „Kleine“, die Welt der Atome und Elementarteilchen, lenkt. Beide Relativitätstheorien und die Quantentheorie sind längst Standard, jedoch ist die angestrebte Vereinigung beider Theorien zu einer Art Quantengravitation noch nicht befriedigend gelungen. Neuere Theorien wie die Urknalltheorie werden wir kurz streifen.

Indem Galilei von der Mathematik als „Sprache der Natur“ spricht, schreibt er als Entdecker des Fallgesetzes ihr eine führende Rolle zu. Wie tief wir jedoch mathematisch eindringen, hängt von den für dieses Buch vorgesehenen didaktischen Möglichkeiten und Grenzen ab. Zum Beispiel werden wir in der Speziellen Relativitätstheorie die wichtigsten Effekte mit minimalem mathematischem Formalismus anhand geeigneter Diagramme und unter Ausnutzung vorhandener Symmetrien erklären. Die berühmte Einstein-Formel $E = mc^2$ wird hergeleitet, dagegen wird die Allgemeine Relativitätstheorie vor allem unter dem Gesichtspunkt von Beobachtungsergebnissen behandelt, welche diese komplizierte Theorie bestätigen. Abschließend erörtern wir in einem kurzen Kapitel Denkanstöße zum anthropischen Prinzip und zu der Frage: „Was hat unser Verständnis von der Entwicklung des Universums mit uns Menschen und unserer Sicht auf das Universum zu tun?“

Generell wollen wir uns an die Vorgabe halten, den Rahmen der gymnasialen Mathematik weitgehend einzuhalten.

Mit diesem Buch, das einen Überblick geben soll, werden wir einen Weg durch die Geschichte des physikalischen Weltbilds beschreiten, der zu hohe Gipfel und zu tiefe Täler meidet, aber im Rahmen der Vernetzung von Mathematik, Physik, Astronomie, Philosophie und Geschichte über lohnende Aussichtspunkte führt.

Teil I

Das Weltbild in der Antike



Antike Philosophie und die Rolle der Mathematik

2

Im 7. Jahrhundert v. Chr. war Milet eine der größten Metropolen in den griechischsprachigen Mittelmeerländern. In der an der südöstlichen Ägäis-Küste liegenden Hafenstadt kamen mehrere Handelswege zu Wasser und an Land zusammen, sodass nicht nur der Handel blühte, auch der Austausch von Ideen zwischen Menschen und Kulturen führte zu fruchtbaren Anregungen im Denken der Menschen. Man kann sich vorstellen, dass auf dem Markt von Milet viele Waren angeboten wurden wie z. B. Fische, Oliven, Zedernholz, Tonkrüge, orientalische Duftstoffe und Vasen mit Götter- und Heldenfiguren – alles, was man zum Leben braucht oder gerne haben würde. In Milet traten auch die ersten Philosophen auf, die sich grundsätzliche Fragen stellten:

Kann man diese Fülle an Waren, die wir sehen und wahrnehmen, sinnvoll ordnen? Kann man sie auf Grundstoffe zurückführen? Oliven erntet man vom Baum, der Baum wächst aus der Erde, Ton ist gebrannte Erde, das Öl ist flüssig wie Wasser, Duftstoffe sind wie Luft. Die Philosophen erkannten: Erde, Wasser und Luft sind Grundstoffe, das rätselhafte Feuer kommt noch hinzu, sodass wir vier Elemente Erde, Wasser, Luft und Feuer haben. Die Vier-Elemente-Lehre war bis weit in die Neuzeit hinein verbreitet und bestimmte die Ordnung der Stoffe. Die Philosophen in Milet gingen aber noch weiter: Sie fragten, was der Urstoff oder Urgrund sei. Hier unterschieden sich die drei ersten Philosophen Thales (~ 625–~545 v. Chr.), Anaximander (~610–~546 v. Chr.) und Anaximenes (~580–~520 v. Chr.). Da Thales der Älteste der Philosophen ist, gilt Thales als Begründer der abendländischen Philosophiegeschichte [1, 49, S. 666].

Möglicherweise ist Thales heute einer der bekanntesten Philosophen, denn sein Name steht in jedem Mathematikbuch der Mittelstufe. Ein einfacher und bekannter Lehrsatz der Geometrie wird ihm zugeschrieben:

Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

Thales galt schon in der Antike wie z. B. der Athener Gesetzgeber Solon als einer der Sieben Weisen. Was Thales mit dem nach ihm benannten Satz 2.1 zu tun hat, lässt sich nur

aus Zitaten der Werke von später lebenden Autoren schließen, denn er hat selbst keine Schriften hinterlassen. So zitiert Gericke [59, S. 70 ff.] aus Schriften von Historikern, Schriftstellern und Philosophen der späteren Antike über Thales als Gelehrten, der sich mit dem, was wir heute unter Mathematik verstehen, wohl intensiv beschäftigt hat.

Der Historiker Diogenes Laertius, der im 2. Jahrhundert n. Chr. eine Art Kompendium mit dem Titel *Leben und Lehre berühmter Philosophen* verfasst hat, schreibt zu Thales als Gelehrtem und zitiert eine Schriftstellerin namens Pamphile: „Er [Thales] hat zuerst das rechtwinklige Dreieck in den Kreis eingezeichnet“ [59, S. 75]. Damit könnten Dreiecke gemeint sein, ähnlich wie in Abb. 2.1 eingezeichnet. Dies scheint plausibel, denn Proklos, ein neuplatonischer Universalgelehrter des 5. nachchristlichen Jahrhunderts schreibt, sich auf Eudemos' „Geschichte der Geometrie“ berufend, Thales habe den Satz vom gleichschenkligen Dreieck („Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich“) „erkannt und ausgesprochen“ [59, S. 76], ebenso den Satz vom Scheitelwinkel („Scheitelwinkel sind gleich weit“) und den Kongruenzsatz „wsw“ („Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleich liegenden Winkeln übereinstimmen“). Thales hat sich demnach mit der elementaren Dreieckslehre befasst und darin einen ersten Meilenstein gesetzt.

Der Thales-Satz wird in voller Allgemeinheit damit begründet, dass man die Radiusstrecke CM (M = Mittelpunkt des Halbkreises; Abb. 2.1) einzeichnet, wodurch zwei gleichschenklige Teildreiecke AMC und MBC entstehen. Die Gültigkeit des Thales-Satzes wird dann durch den Winkelsummensatz im Dreieck evident.

Laetius schreibt in seinem Werk und stützt sich dabei auf Hieronymus von Rhodos [53, S. 75], Thales habe die Höhe von Pyramiden genau zu dem Zeitpunkt gemessen, zu dem „unser Schatten und unser Leib die gleiche Länge haben“, also bei einem Einfallswinkel der Sonnenstrahlen von 45° .

Man konnte damit nach der einfachen Formel

$$\text{Pyramidenhöhe} = \text{Länge des Schattens auf dem (waagrecht ebenen) Boden}$$

die Höhe einer Pyramide berechnen. Das wird in der Praxis nicht ganz einfach gewesen sein, weil gute Bedingungen für die Messung vorliegen müssen, aber für eine Überschlagsrechnung mag es gereicht haben.

Man schließt aus der Bemerkung über die Höhenbestimmung einer Pyramide, dass er in Ägypten war und dort wohl auch mit den mathematischen und astronomischen

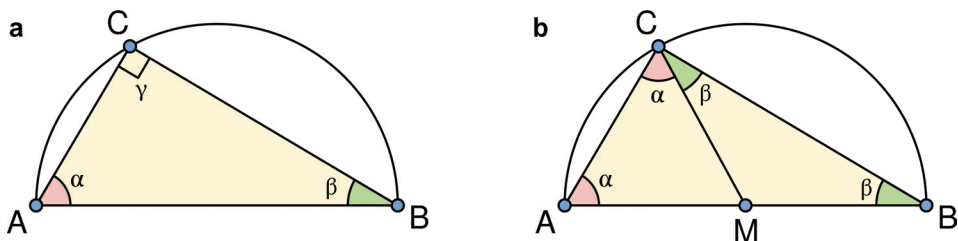


Abb. 2.1 Satz des Thales. Thales gilt als Begründer der abendländischen Philosophiegeschichte

Kenntnissen der Ägypter in Berührung kam. Im folgenden politisch-historischen Abriss stützen wir uns auf Gericke [59, S. 73] sowie Mann und Heuß [49, S. 197].

Thales soll für seine Heimatstadt Milet auf politischer Ebene gearbeitet und bewirkt haben, dass diese nicht dem Perserreich einverleibt wurde. Denn die ionischen Städte wurden im 6. Jahrhundert v. Chr. von den Medern, Lydern und Persern bedrängt. So soll Thales, vermutlich als Ratgeber, den ionischen Städten einen engen Zusammenschluss empfohlen und auch verhindert haben, dass Milet den Lyderkönig Kroisos gegen den Perserkönig Kyros unterstützt. Dadurch blieb Milet eine der wenigen ionischen Städte, die nicht persische Provinz wurden.

585 v. Chr. führte während einer Schlacht zwischen Lydern und Medern eine damals Angst einflößende Sonnenfinsternis zu einem abrupten Abbruch der Kämpfe und zu einem Friedensschluss. Es war eine Sonnenfinsternis, welche, nach Herodot, Thales für dieses Jahr bereits vorhergesagt hatte. Ob und wie eine solche Vorhersage möglich sein konnte, ist in der Literatur umstritten; wir werden in Kap. 5 im Rahmen der Untersuchungen zum Antikythera-Mechanismus darauf eingehen. Mit modernen Mitteln, zum Beispiel einem Planetarium, kann man heutzutage den Sternenhimmel aus der genannten Zeit rekonstruieren und damit das Datum dieser Finsternis exakt bestimmen: Es war der 28. Mai 585 v. Chr.

Nach 560 v. Chr., als Kyros den persischen Königsthron bestieg, wuchs das Perserreich zu einer Großmacht heran, das auch die ionischen Städte bedrohte. Vor einer Schlacht am Fluss Halys im Jahre 546 v. Chr. soll der Lyderkönig Kroisos das Orakel von Delphi befragt haben, ob er diesen Fluss überschreiten und Kyros angreifen solle, und erhielt als Antwort die Prophezeiung, dass er bei Überschreitung des Flusses ein großes Reich zerstören werde. Er wagte den Kampf, möglicherweise von etlichen ionischen Städten unterstützt, mit dem Ergebnis, dass er sein eigenes Reich zerstörte und dadurch die persische Gefahr für die ionischen Städte noch größer wurde. Thales schaffte es, wie genau, kann man aus den Quellen nicht mehr ablesen, dass Milet am Ende nicht dem Perserreich einverleibt wurde. Dieser für Milet segensreiche Einfluss von Thales sowie seine Finsternisvorhersage trugen vermutlich neben seinen mathematischen und naturphilosophischen Betrachtungen wesentlich zu seinem Ansehen in der Antike bei.

Als Urstoff oder Urgrund, auf den alles zurückgeht, nennt Thales das Wasser. Die archaische Vorstellung, die Erdscheibe schwimme auf dem das Festland umgebende „Okeanos“, dem Weltmeer, und in grauer Vorzeit seien Wassertiere aus dem Wasser ans Land gegangen, gehörte noch zum damaligen Weltbild. Bedenkt man, dass der Wasserstoff als Bestandteil des Wassermoleküls zu dem chemischen Element gehört, das im Universum am häufigsten vorkommt, lag Thales mit seiner Ansicht gar nicht so weit daneben.

Hier setzte Anaximander ein, der wie Thales dem Wasser eine große Bedeutung gab. Von ihm stammt das früheste, bis zum 2. Jahrhundert erhaltene Prosawerk der abendländischen Geistesgeschichte mit dem mutmaßlichen Titel *Über die Natur*. Daher erhalten wir aus den antiken Berichten ein relativ gutes Bild über Anaximanders Naturvorstellungen. Er beschreibt darin eine Art Gesamtschau des damaligen Weltbilds, das bei ihm durch Gegensätze geprägt ist: Feuer – Wasser, warm – kalt, feucht – trocken, Tag –

Nacht, Sommer – Winter, Geburt – Tod. Der ewige Wechsel der Jahreszeiten von warm und kalt, Geburt und Tod mag dazu beigetragen haben, dass für ihn der Urgrund im Apeiron, dem Allgemein-Unbestimmten und zeitlich Unbegrenzten, liegt. Die genannten Gegensatzpaare im Naturgeschehen haben für ihn aber auch einen Gerechtigkeitsaspekt: Ist es zum Beispiel lange Zeit kalt, so gleicht die Natur dies wieder durch Warmperioden aus. Die „Ungerechtigkeit“ des Kalten wird durch Warmperioden wieder wettgemacht, so dass im Mittel gerechnet über längere Zeit von Seiten der Natur „Gerechtigkeit“ herrscht.

Er beobachtete bei klarem Nachthimmel, dass Sterne den Polarstern in Kreisbögen umwandern, die er zu vollständigen Kreisen ergänzte, womit er ein wesentliches Detail des aristotelischen Weltbilds vorwegnahm. In seinem wohlgeordneten Weltbild befindet sich die Erde im Mittelpunkt und im äußersten Ring die Sonne. Von der Sonne aus folgen in Richtung Erde der Mond und die Fixsterne, wobei die Abstände von innen nach außen das Verhältnis 9:18:27 aufweisen [1]. So spekulativ diese Vorstellungen auch sein mögen, äußert sich in ihnen doch ein wichtiges und typisches Merkmal der im Entstehen begriffenen griechischen Naturphilosophie: das Bestreben, abseits von Göttern und Mythen das in Raum und Zeit für den Menschen unbegreifliche himmlische Geschehen durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Anaximander soll dieses Kugelmodell des Weltalls durch einen Himmelglobus ein Stück weit konkretisiert haben. Er blieb allerdings bei der archaischen Vorstellung, dass die Erdscheibe auf dem sie umgebenden Weltmeer schwimmt, die Sonne das Meer langsam austrocknet und die Landmasse ständig zunimmt. Denn durch Verdunstung des Meerwassers sei die ursprünglich von Wasser bedeckte Erde aus dem Meer aufgetaucht [2].

Die Vorstellung von der Kugelgestalt der Erde setzte sich erst ganz allmählich in den folgenden Jahrhunderten durch, bei der seefahrenden Bevölkerung rund um das Mittelmeer eher als in den typischen Landgebieten, weil die Krümmung der Meeresoberfläche in den Küstenregionen eine Alltagserfahrung ist.

Anaximenes, wahrscheinlich ein Schüler von Anaximander, beobachtete, dass sich Luft verdichtet, Nebel bildet und zu Wasser wird. Andererseits verdünnt Wärme die Luft. Denkt man diese Umwandlungsprozesse weiter, so entsteht seiner Meinung nach auf der einen Seite durch Verdichtung die feste Erde, auf der anderen Seite durch Verdünnung das Feuer. Er hielt so die Luft für den Urgrund.

Diese Gedanken mögen sehr spekulativ sein, wichtig ist aber festzuhalten, dass sie sich deutlich von der in dieser Zeit üblichen Denk- und Sprechweise absetzen, wo Mythen und Götter allgegenwärtig waren. Man begann, mit Verstand an die Erscheinungen in der Natur heranzugehen. Rationales Denken war bei der Erforschung ihrer Ursachen angesagt. Deshalb wird diese erste Zeit der wesentlich von den drei Milesiern geprägten Naturphilosophie auch die „ionische Naturphilosophie“ genannt [49, S. 666] .

Hier muss man freilich die Quellenlage ansprechen. Das meiste, was wir von den Naturphilosophen dieser Zeit wissen, entstammt den Werken zum Teil wesentlich später auftretender Philosophen, wie Aristoteles (4. Jahrhundert v. Chr.), Diogenes Laertius (2. Jahrhundert v. Chr.), oder von Geschichtsschreibern, wie Herodot (5. Jahrhundert v. Chr.). Während die ursprünglichen Werke der ionischen Philosophen zumeist verschollen sind, lagen sie oft den späteren antiken Autoren vor, die aus ihnen zitierten.

Im großen Rahmen der Philosophiegeschichte ist Sokrates ein Angelpunkt. Man bezeichnet die vor ihm wirkenden, somit auch die ionischen Philosophen als Vorsokratiker.

Nicht nur in Milet, sondern im ganzen griechischsprachigen Raum wurde seit dem 6. Jahrhundert Philosophie getrieben. Es traten Denker hervor, die einen ganz anderen Ansatz als die Milesier verfolgten.

Hier sind Demokrit (460–370 v. Chr.) und sein Lehrer Leukipp, ein Mitglied der eleatischen Schule des Zenon, zu nennen. In dieser Zeit befasste man sich intensiv mit Ontologie, dem Seienden. Dabei ging es wie auch in der später von Leukipp gegründeten Schule im thrakischen Abdera hauptsächlich um Fragen und Probleme, die sich um das Kleine, „Infinitesimale“, drehten, wie zum Beispiel:

- Durchschneidet man einen Kegel parallel zur Grundfläche, sind dann die beiden Schnittflächen gleich oder ist die obere kleiner?
- Kann man einen Stoff beliebig oft teilen oder kommt der Teilungsprozess nach endlich vielen Schritten an eine Grenze?

Zenon, bekannt für seine scharfsinnigen Paradoxien, argumentiert bei der zweiten Frage:

„Ohne ein „Leeres“ ist eine Zerlegung eines Körpers nicht möglich. Eine Zweiteilung von Körpern bis ins Unendliche setzt voraus, dass die Körper auch bis ins Unendliche kleinste Hohlräume enthalten, schließlich nur aus Hohlräumen bestehen, also [...] muss die Teilbarkeit eine untere Grenze haben.“ [2, S. 117, bei Demokrit]

Deshalb postulierte Leukipp, der als Begründer der Atomistik gilt, den wichtigen Grundsatz:

„Es gibt kleinste Teilchen, die nicht mehr unterteilt werden können: die Atome (griech. *átomos* = „unteilbar“.“ [2]

Demokrit, sein bedeutendster Schüler, entwickelte die Atomtheorie weiter und stellte fest (nach einem Dokument des Arztes Galenos im 2. Jahrhundert):

„Nur scheinbar hat ein Ding eine Farbe, nur scheinbar ist es süß oder bitter, in Wirklichkeit gibt es nur Atome im leeren Raum.“ [7]

Atome und der leere Raum gehören also nach Demokrit zusammen. Nach seinen Vorstellungen sind sie unveränderlich und unvergänglich, manche so klein, dass sie für den Menschen unsichtbar sind, und haben verschiedene Größen und Formen, mit Haken und Ösen, regelmäßige und unregelmäßige Strukturen, und vor allem bewegen sich Atome und benötigen um sie herum Platz, deshalb bewegen sie sich im leeren Raum, stoßen sich aneinander, ballen sich zusammen und werden durch stärkere äußere Kräfte wieder getrennt. Die ungeheure Vielfalt der uns umgebenden Stoffe hängt mit der großen Vielfalt der Kombinationsmöglichkeiten der Atome zusammen. Die Fragen und Antworten der

Atomisten spielen heute noch eine Rolle, wenn es um die Grundlagen der Mathematik und Physik geht. „Sie betreffen die Frage, ob Raum und Zeit nicht vielleicht doch gequantelt, also diskontinuierliche Kontinua sind (W. Heisenberg)“ [1, bei Zenon]. In seinen erkenntnistheoretischen Schriften bekennt sich Demokrit aber auch zu den Grenzen der menschlichen Erkenntnis: „Tatsächlich wissen wir nichts, und die Wahrheit liegt in der Tiefe.“ Erst im späten 18. Jahrhundert geht die wissenschaftliche Atomtheorie weiter: Durch Experimente erhalten Forscher wie Lavoisier und Dalton tiefere Einblicke in die Struktur und die qualitativen und quantitativen Verhältnisse der Stoffe.

Die vorsokratischen Naturphilosophen haben sich aber nicht nur mit Stoffen und Atomen beschäftigt. Eine besonders einflussreiche Bewegung muss noch genannt werden: die Pythagoreer, allen voran Pythagoras aus Samos.

Sein Name erscheint mindestens so oft wie der von Thales in den Mathematikbüchern, denn der nach ihm benannte und hier in Kurzform genannte Satz ist einer der wichtigsten der euklidischen Geometrie:

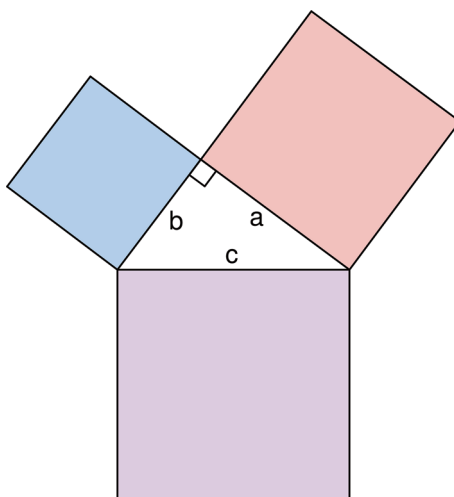
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Die logische Umkehrung gilt auch:

Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate über zwei Seiten flächengleich zum Quadrat über der dritten Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Schon lange gekannt und benutzt haben ihn Babylonier und Ägypter. Letztere haben vor allem auch die Umkehrung des Pythagoras-Satzes (Abb. 2.2) verwendet, um nach den jährlichen Nil-Überschwemmungen die Felder neu ausmessen zu können. Dazu wurde ein langes Seil in 12 gleich lange Abschnitte eingeteilt. Mit dem gespannten Seil bildeten drei

Abb. 2.2 Figur zum Satz des Pythagoras. Pythagoras gründete eine Gemeinschaft, die sich vor allem mit Philosophie, Musik und Mathematik beschäftigte



Seilspanner ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5. Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ entstand gemäß der Umkehrung des Pythagoras-Satzes ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel zwischen den beiden Seiten der Längen 3 und 4. Ein exakter rechter Winkel war für die neue Vermessung der Felder unerlässlich!

Das Wissen um diesen Satz und seine Umkehrung bildete sich in den Jahrhunderten vor Pythagoras vor allem durch langjährige Erfahrung heraus. In den Jahrhunderten nach Pythagoras entdeckten Gelehrte immer mehr Eigenschaften und Sätze, die sich um Figuren, Seiten, Längen, Winkel, Flächen und Körper drehten, sodass sich für diese Wissensbereiche der Name „Geometrie“, was dem griechischen Wortsinn nach „Erdmessung“ bedeutet, herausbildete. Je mehr Eigenschaften man entdeckte, desto größer war auch das Bedürfnis, Sicherheit über die Geltung von Sätzen in diesem Bereich zu erlangen. Das erforderte strenge Beweise, die sich in den folgenden Generationen herausbildeten. Es entstand die Wissenschaft „Geometrie“.

Ob Pythagoras den nach ihm benannten Satz und seine Umkehrung auch streng bewies, d. h. aus allgemeineren, gesicherten Sätzen hergeleitet hat, ist ungewiss. Heute jedenfalls sind mehrere hundert Beweise bekannt, dazu gehören geometrische, algebraische und Kombinationen aus beiden Gebieten. Das zeigt, welche zentrale Stellung er im Aufbau der euklidischen Geometrie hat.

Pythagoras (~570–~500 v. Chr.) stammte aus Samos, reiste als junger Mann vermutlich zu Studienzwecken nach Ägypten und Babylon, wo er Kenntnisse in Mathematik und Astronomie erwarb. Nach der Rückkehr in seine Heimat blieb er dort eine Zeit lang, verließ aber Samos, wahrscheinlich, weil er mit dem Alleinherrscher Polykrates Schwierigkeiten bekam. Er wanderte in das griechischsprachige Süditalien (*Magna Graecia*) aus und gründete in Kroton (heute Crotona) eine philosophisch-religiös orientierte Gemeinschaft, deren Mitglieder sich zu gegenseitiger Treue, Verschwiegenheit und zu einem einfachen Lebensstil verpflichteten. Pythagoras selbst hat keine Schriften hinterlassen. Seine Lehre ist daher nicht wie bei den späteren Philosophen Platon und Aristoteles als durchstrukturiertes Gedankengebäude überliefert, er hat sie vielmehr mündlich in Form kurzer Lebensregeln und Sprüche (Akusmata, „Gehörtes“) weitergegeben. Von Legenden umrankt, schwankt das Bild seiner Persönlichkeit in den Quellen erheblich. Sprachen seine Anhänger von ihm als gottähnlichem Heilslehrer, so bedachten ihn seine Gegner mit beißendem Spott, wenn etwa Heraklit von Ephesos ihn als „König der Quatschköpfe“ [1] bezeichnet. Merkmale seiner Lehre kann man in etwa so umreißen: Die unsterbliche Seele des Menschen, die ein Teil der Weltseele ist, kann durch asketische Lebensführung im Streben nach Harmonie mit anderen Menschen, mit der Familie, dem Staat, der Natur und dem Kosmos (wörtl. „Ordnung“, im weiteren Sinn „Weltall“) eine höhere Stufe bei der Seelenwanderung erreichen. Pythagoras gewann eine große Anhängerschaft, die sich ab den 20er-Jahren des 6. Jahrhunderts in Süditalien ausbreitete. Dabei gewannen die Pythagoreer, wie seine Anhänger genannt werden, zunehmend politischen Einfluss in den dortigen Gemeinwesen, vor allem in den Stadtstaaten Metapont und Tarent. So wird z. B. von einem Pythagoreer namens Archytas aus Tarent (~435 –~ 355 v. Chr.), einem Ingenieur, Mathematiker, Staatsmann und Freund von Platon, berichtet, dass er die Mathematik, insbesondere die Arithmetik, sehr geschätzt hat, weil sie

seiner Ansicht nach zu einem gerechten Ausgleich zwischen reicheren und ärmeren Schichten der Bevölkerung verhalf. Er besaß unter den Bewohnern des demokratischen Stadtstaates Tarent (in Apulien) großes Ansehen und Vertrauen, weil er mehrfach hintereinander zum Archonten gewählt wurde, obwohl eine Wiederwahl eigentlich nicht gestattet war.

Archytas soll im Zusammenhang mit einer graphischen Lösung des antiken Problems der Würfelverdopplung die erste nicht in einer Ebene liegende Raumkurve der Mathematikgeschichte beschrieben haben. Näheres dazu findet man in einem Aufsatz von Klaus Strick in *Spektrum der Wissenschaft* [28, 58], wo auch die Kurve des Archytas erläutert wird.

Bekannt ist die Freundestreue bei den Pythagoreern, die auch Platon zuteilwurde. Als der bekannte Philosoph am Hof von Dionysios II. in Syrakus zu Gast war und Schwierigkeiten mit dem Herrscher bekam, half ihm Archytas von Tarent und holte ihn aus der Löwengrube des Tyrannen heraus.

Berühmt ist die Geschichte der beiden Freunde Damon und Phintias, die Friedrich Schiller in seiner Ballade *Die Bürgschaft* verarbeitet hat. Darin ist der Tyrann und „Wüterich“ Dionysios von der Freundestreue der beiden so beeindruckt, dass er als „Dritter im Bund“ von ihnen aufgenommen werden will.

Pythagoras, der den Sitz seines Ordens wegen kriegerischer Auseinandersetzungen von Kroton nach Metapont verlegen musste, starb dort um etwa 500 v. Chr. Dass Pythagoras' Haus nach seinem Tod in ein Demeter-Heiligtum umgewandelt wurde, ist ein Zeichen für die große Verehrung, die er von seinen Anhängern erfuhr.

Die Pythagoreer haben sich intensiv mit der Musik beschäftigt. Eines ihrer wichtigsten Instrumente war das Monochord, an dem sie feststellten, dass Tonintervalle harmonisch klangen, wenn die beiden Streckenlängen einer abgegriffenen Saite in einem bestimmten Zahlenverhältnis standen, beim Verhältnis 2:1 als Oktave, 3:2 als Quinte, 4:3 als Quart, 6:5 als Terz usw. Sie haben darauf eine Theorie des „harmonischen Klangs“ aufgebaut, der bis weit in das Mittelalter prägend wirkte. Heute noch wird der Begriff „pythagoreisches Komma“ in der Musiktheorie verwendet. Es kennzeichnet den Unterschied zwischen 7 Oktaven und 12 Quinten. Geht man zum Beispiel von dem Ton Gis aus 7 Oktaven nach oben und dann 12 Quinten abwärts, so gelangt man zum As; dieses kleine Intervall [gis,as] von weniger als einem Achtelton entspricht dem pythagoreischen Komma.

Außerdem wurde bis ins Mittelalter in der durch den pythagoreischen Quintenzirkel festgelegten pythagoreischen Stimmung musiziert. Der erwähnte Archytas ist auch als Musiktheoretiker und Mathematiker bekannt geworden, denn er hat die Proportionenlehre auf die Musiktheorie angewandt und führte die Tonverhältnisse für das enharmonische, das chromatische und das diatonische Tongeschlecht sowie den Begriff des harmonischen Mittels ein [2]. Er bewies, dass das Ganztonintervall mit dem Verhältnis 9:8 nicht in zwei gleiche Tonintervalle mit ganzzahligem Verhältnis zerlegt werden kann, und stellte in diesem Zusammenhang fest, dass Brüche der Form $(n + 1)/n$ nicht als Brüche von ganzzahligen Quadratzahlen geschrieben werden können (Irrationalität von $((n + 1)/n)^{0,5}$).

Die Pythagoreer stellten sich vor, dass auch im Kosmos harmonische Verhältnisse herrschen, und wiesen ihm eine harmonische Sphärenmusik zu. Rund 2000 Jahre später hat auch Kepler ähnliche Überlegungen in seinem Buch *Weltharmonie* niedergeschrieben.

Für die Pythagoreer spielten Zahlen und Zahlenverhältnisse eine sehr große Rolle. Zum Beispiel ordneten sie der 1 den Anfang zu, den Anfang alles Seienden. Die Zahl 10 war für sie eine heilige Zahl, weil $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ist. Diese heilige Zahl 10 veranlasste auch den Naturphilosophen und Pythagoreer Philolaos (~470–~399 v. Chr.) dazu, den neun Himmelskörpern, Erde, Mond, Sonne, den fünf Planeten und der Fixsternsphäre, einen zehnten hinzuzufügen, nämlich die Gegenerde. Dieses von Philolaos entworfene Weltbild bestand aus dem in der Weltmitte befindlichen Zentralfeuer, um das die Erde und die Gegenerde zusammen mit allen anderen Himmelskörpern kreisen, wobei die Gegenerde für alle irdischen Beobachter nicht zu sehen sein sollte, weil sie sich auf der anderen Seite des Zentralfeuers befand (Abb. 2.3).

Die Zahlen nahmen einen solch hohen Rang im pythagoreischen Denken ein, dass „Alles ist Zahl“ ihr Motto wurde.

Zahlentripel der Form $(a; b; c)$ mit ganzen Zahlen a, b, c und der Eigenschaft $a^2 + b^2 = c^2$ heißen pythagoreische Zahlentripel. Daher kann man annehmen, dass die Pythagoreer sich intensiv mit diesen Zahlentripeln befasst haben, allerdings haben sie diese sicher nicht erfunden, denn man hat sie auf über 3000 Jahre alten babylonischen Keilschrifttafeln gefunden, darunter zum Beispiel auch das Tripel (12709; 13500; 18541) mit lauter fünfstelligen Zahlen. Das bedeutet, dass die Babylonier ein Verfahren gekannt haben, mit dem man

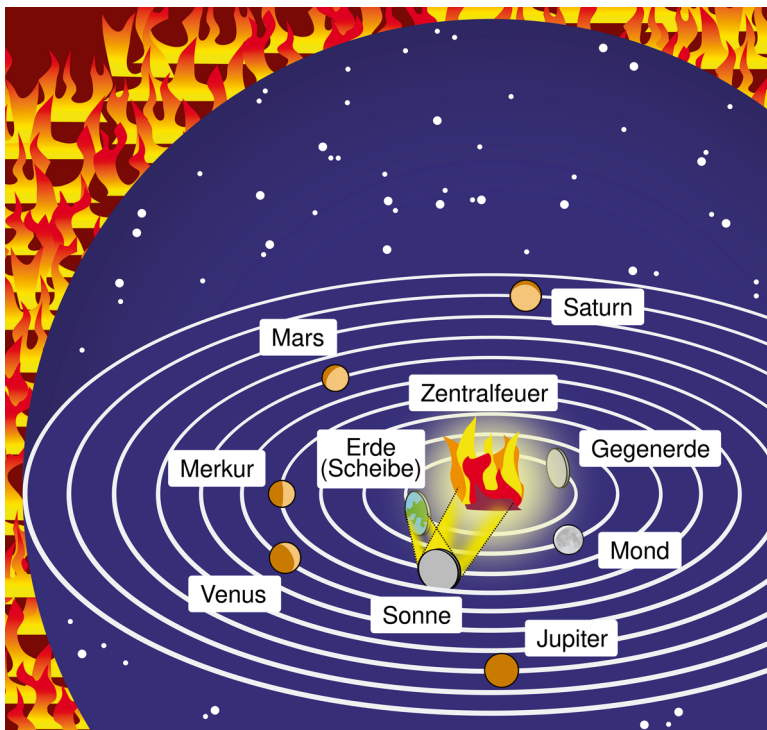


Abb. 2.3 Weltbild der Pythagoreer. In der Weltmitte befindet sich das Zentralfeuer, um das alle Himmelskörper einschließlich Erde und Gegenerde kreisen