

Omar Benhar

Struttura e Dinamica delle Stelle Compatte



Springer

Struttura e Dinamica delle Stelle Compatte

Omar Benhar

Struttura e Dinamica delle Stelle Compatte

 Springer

Omar Benhar
Physics
INFN and Sapienza University of Rome
Rome, Italy

ISBN 978-3-031-60910-7

ISBN 978-3-031-60911-4 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-031-60911-4>

© The Editor(s) (if applicable) and The Author(s), under exclusive license to Springer Nature Switzerland AG 2024

This book is a translation of the original English edition “Structure and Dynamics of Compact Stars” by Omar Benhar, published by Springer Nature Switzerland AG in 2023. The translation was done with the help of an artificial intelligence machine translation tool. A subsequent human revision was done primarily in terms of content, so that the book will read stylistically differently from a conventional translation. Springer Nature works continuously to further the development of tools for the production of books and on the related technologies to support the authors.

This work is subject to copyright. All rights are solely and exclusively licensed by the Publisher, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other physical way, and transmission or information storage and retrieval, electronic adaptation, computer software, or by similar or dissimilar methodology now known or hereafter developed.

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, service marks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

The publisher, the authors and the editors are safe to assume that the advice and information in this book are believed to be true and accurate at the date of publication. Neither the publisher nor the authors or the editors give a warranty, expressed or implied, with respect to the material contained herein or for any errors or omissions that may have been made. The publisher remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

This Springer imprint is published by the registered company Springer Nature Switzerland AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

If disposing of this product, please recycle the paper.

Prefazione

Le nane bianche e le stelle di neutroni, alle quali ci si riferisce collettivamente col nome di stelle compatte, sono i possibili stadi finali dell'evoluzione stellare. Questi corpi celesti sono molto diversi dalle stelle ordinarie, nelle quali il collasso gravitazionale è contrastato da una pressione di origine termica. Nelle stelle compatte, il combustibile nucleare necessario per innescare le reazioni di fusione che producono il calore necessario non è più disponibile, e la pressione in grado di assicurare l'equilibrio idrostatico è generata da meccanismi diversi, legati ad effetti puramente quantistici e alle interazioni tra le particelle della materia costituente la stella.

Le stelle compatte sono un laboratorio ineguagliabile per lo studio della struttura della materia in condizioni estreme, non riproducibili sulla Terra, nelle quali tutte le interazioni conosciute—gravità, forze di origine elettromagnetica ed interazioni nucleari, sia deboli che forti—svolgono un ruolo determinante. Di conseguenza, la comprensione delle proprietà di questi sistemi è importante per un'ampia gamma di campi di ricerca, che vanno dall'astrofisica alla fisica gravitazionale, alla fisica nucleare e subnucleare.

I primi tentativi di fare luce sulla struttura della materia a densità che superano di molti ordini di grandezza il valore tipico dei sistemi macroscopici osservabili sulla Terra, $\rho \lesssim 20 \text{ g/cm}^3$, risalgono agli anni 20 del secolo scorso. Questi studi furono stimolati dalla scoperta della stella chiamata Sirio B, la cui densità interna raggiunge valori dell'ordine di $3 \times 10^6 \text{ g/cm}^3$. Oggi sappiamo che Sirio B appartiene alla categoria di stelle conosciute come Nane Bianche.

L'epocale scoperta dell'esistenza di un limite superiore alla massa delle nane bianche, fatta da Chandrasekhar nel 1931, ha suscitato un'ondata di ipotesi su quale fosse il punto di arrivo del processo evolutivo delle stelle aventi massa maggiore del limite massimo. A seconda del valore della loro massa, queste stelle possono trasformarsi in stelle di neutroni o provocare la comparsa di un buco nero, cioè una regione di spazio in cui il campo gravitazionale è così intenso da non permettere l'emissione di luce o materia.

La comparsa di una stella di neutroni a seguito dell'esplosione di una supernova è stata prevista da Baade e Zwicky nel 1934. Le proprietà di questi sistemi si dice siano state discusse per primi da Bohr, Landau e Rosenfeld nei giorni immediatamente

successivi alla scoperta del neutrone ad opera di Chadwick, nel 1932. A causa delle enormi densità che vi si raggiungono, fino a 10^{15} g/cm^3 e oltre, la descrizione della materia all'interno delle stelle di neutroni comporta formidabili difficoltà dovute alla complessità della dinamica microscopica, a livello sia nucleare che subnucleare. Inoltre, se la densità cresce fino a diventare molto maggiore della densità centrale dei nuclei atomici, $\rho_0 \approx 2.6 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, si prevede che possano fare la loro comparsa nuove forme di materia—come la materia barionica strana o la materia di quark deconfinati—la cui esistenza è prevista dalle teorie fondamentali delle interazioni deboli e forti. Infine, nelle stelle di neutroni gli effetti dovuti alla curvatura dello spazio-tempo prevista dalla teoria della relatività generale di Einstein, che risultano essere del tutto trascurabili nelle nane bianche, hanno un ruolo fondamentale nella determinazione tanto delle proprietà di equilibrio quanto della dinamica.

Questo volume si basa sugli appunti delle lezioni dei corsi di Fisica della Materia Densa e Struttura delle Stelle Compatte, che ho tenuto agli studenti dei programmi di Laurea Specialistica a Dottorato di Ricerca in Fisica della Sapienza Università di Roma a partire dal 2005. Lo scopo principale di questi corsi è offrire a studenti di indirizzi diversi un'introduzione concisa ed auto-contenuta alla struttura della materia a densità $10^4 \lesssim \rho \lesssim 10^{15} \text{ g/cm}^3$, tipiche delle nane bianche e delle stelle di neutroni. L'enfasi maggiore è posta sulla regione $\rho > \rho_0$ —dove ρ_0 è la densità massima osservabile sulla Terra in condizioni normali—la cui descrizione richiede inevitabilmente l'uso di estrapolazioni dei modelli teorici usati per l'analisi dei dati empirici disponibili sulle proprietà nucleari.

Ampio spazio è dedicato alle recenti applicazioni della teoria della materia nucleare all'analisi dei dati astronomici, che forniscono informazioni preziose per sottoporre a verifica le predizioni dei modelli microscopici nella regione di densità soprannucleare. In questo contesto, un ruolo fondamentale hanno giocato le prime osservazioni di onde gravitazionali emesse da stelle di neutroni. Non è esagerato affermare che questi studi hanno aperto una nuova era per le ricerche in astrofisica e fisica nucleare.

Nel corso degli anni, mi sono giovato di un numero incalcolabile di illuminanti discussioni con i miei colleghi della Sezione di Roma dell'INFN e del Dipartimento di Fisica della Sapienza Università di Roma, e con i miei studenti e collaboratori. Una menzione particolare è dovuta a Stefano Fantoni e Valeria Ferrari, la cui influenza ha contribuito enormemente a dare forma a questo volume. Infine, voglio esprimere la mia riconoscenza ai colleghi e amici prematuramente scomparsi Vijay R. Pandharipande e Artur Polls, autori di contributi fondamentali per la comprensione della fisica della materia densa e delle stelle di neutroni.

Se non specificato diversamente, in questo volume ho usato il sistema di unità di misura naturali, nel quale $c = \hbar = k_B = 1$.

Costanti fisiche e astronomiche

Angolo di Cabibbo;	$\theta_c = 13.02 \text{ deg}$
Costante di accoppiamento assiale;	$g_A = 1.26$
Costante di accoppiamento pione-nucleone;	$g^2/4\pi = 13.5$
Costante di Boltzmann;	$K_B = 8.617 \times 10^{-11} \text{ MeV K}^{-1}$
Costante di Fermi;	$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
Costante gravitazionale;	$G = 6.674 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ $= 6.709 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$
Costante di Stephan-Boltzmann;	$\sigma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ erg s}^{-1} \text{ K}^{-4}$
Densità di equilibrio della materia nucleare;	$\varrho_0 = 2.6 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$
Luminosità solare;	$L_\odot = 3.89 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$
Massa dell'elettrone;	$m_e = 0.511 \text{ MeV} = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$
Massa del mesone ρ ;	$m_\rho = 769 \text{ MeV}$
Massa del mesone ω ;	$m_\omega = 783 \text{ MeV}$
Massa del muone;	$m_\mu = 105.7 \text{ MeV}$
Massa del neutrone;	$m_n = 939.6 \text{ MeV} = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
Massa del nucleone (media sullo spin isotopico);	$m = 939 \text{ MeV}$
Massa del pione (media sullo spin isotopico);	$m_\pi = 138.1 \text{ MeV}$
Massa del pione neutro;	$m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}$
Massa dei pioni carichi;	$m_{\pi^\pm} = 139.6 \text{ MeV}$
Massa del protone;	$m_p = 938.3 \text{ MeV} = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
Massa solare;	$M_\odot = 1.988 \times 10^{33} \text{ g}$
Raggio solare;	$R_\odot = 6.957 \times 10^5 \text{ km}$

Indice

Parte I Nane bianche

1	L'archetipo delle stelle compatte	3
1.1	Scoperta delle nane bianche	3
1.2	Formazione delle nane bianche	4
1.3	Proprietà del gas di Fermi degenere	5
1.3.1	Densità di energia	6
1.3.2	Pressione	8
1.3.3	Regime relativistico	9
1.4	Significato dell'equazione di stato	11
1.5	Equazione di stato della materia delle nane bianche	12
1.6	Equilibrio delle nane bianche e limite di Chandrasekhar	14

Parte II Stelle di neutroni

2	Struttura delle stelle di neutroni	21
2.1	Scoperta delle stelle di neutroni	21
2.2	Panoramica sulla composizione delle stelle di neutroni	23
2.2.1	Crosta esterna	24
2.2.2	Crosta interna	33
3	Il nucleo delle stelle di neutroni	37
3.1	Premessa	37
3.2	Vincoli sull'EOS della materia nucleare	38
3.3	Modelli microscopici dell'EOS della materia nucleare	40
3.3.1	Informazioni empiriche sulle forze nucleari	40
3.3.2	L'interazione nucleone-nucleone	41
3.3.3	Interazioni irriducibili tra tre nucleoni	45
3.3.4	Teoria nucleare a molti corpi non relativistica	46
3.3.5	Teoria della materia nucleare	52

3.3.6	Approcci relativistici	58
3.3.7	Il modello σ - ω	60
3.4	L'equazione di stato della materia neutra e β -stabile	67
	Appendice A: Velocità del suono nella materia e causalità	69
	Appendice B: Derivazione del potenziale OPE di Yukawa	70
4	Fasi esotiche della materia stellare	77
4.1	Stabilità della materia barionica strana	77
4.1.1	Interazioni degli iperoni	80
4.2	Deconfinamento e materia di quark	83
4.2.1	Il modello a <i>bag</i> del MIT	83
4.2.2	L'equazione di stato della materia di quark	86
4.3	La transizione di fase da materia nucleare a materia di quark	91
4.3.1	Coesistenza delle fasi e formazione della fase mista	92
4.3.2	Stabilità della fase mista	95
4.3.3	Stelle strane	99
	Appendice A: Funzione di partizione fermionica	100
5	Emissione di neutrini dalle stelle di neutroni	103
5.1	Processo Urca diretto	103
5.1.1	Soglia del processo Urca diretto	106
5.2	Processi Urca modificati	108
5.2.1	Ramo neutronico	110
5.2.2	Ramo protonico	111
5.3	Bremsstrahlung di neutrini nelle collisioni nucleone-nucleone	113
	Appendice A: Decadimento β del neutrone	117
	Appendice B: Tasso della reazione Urca diretta	119
6	Struttura e dinamica delle stelle neutroni	127
6.1	Equilibrio idrostatico	127
6.2	Raffreddamento	133
6.3	Deformazione mareale in sistemi binari in coalescenza	135
6.4	Oscillazioni delle stelle di neutroni	138
 Parte III Astronomia multimessaggera		
7	Vincoli osservativi sui modelli teorici	143
7.1	L'età dell'oro delle stelle di neutroni	143
7.2	Misure di massa e raggio	144
7.3	Misure della deformabilità mareale	150
7.4	Misure del raffreddamento della stella di neutroni	152
7.5	Verso l'astronomia multimessaggera	153
	Riferimenti bibliografici	157
	Indice analitico	161

Acronimi

AFDMC	Auxiliary-Field Diffusion Monte Carlo
APR	Akmal Pandharipande Ravenhall
BCC	Body-Centered Cubic
BHF	Brueckner Hartree Fock
CBF	Correlated Basis Functions
EOS	Equation of State
GBM	Gamma-Ray Burst Monitor
GRB	Gamma Ray Burst
GFMC	Green Function Monte Carlo
GW	Gravitational Waves
INTEGRAL	International Gamma-ray Astrophysics Laboratory
LIGO	Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory
NICER	Neutron Star Interior Composition Explorer
NJL	Nambu Jona-Lasinio
NN	Nucleon-nucleon
NNN	Three-nucleon
OPE	One Pion Exchange
QCD	Quantum Chromo Dynamics
QNM	Quasi Normal Modes
RMF	Relativistic Mean Field
SNM	Symmetric Nuclear Matter
SQM	Strange Quark Matter
PNM	Pure Neutron Matter
VMC	Variational Monte Carlo
XMM	X-ray Multi-Mirror Mission
XTI	X-ray Timing Instrument

Parte I
Nane bianche



Sommario

La scoperta della prima nana bianca, una stella con massa paragonabile a quella solare ma delle dimensioni di un pianeta, ha rivelato l'esistenza di una nuova forma di materia, la cui densità supera di molti ordini di grandezza quella dei corpi macroscopici terrestri. Questo capitolo fornisce una panoramica delle proprietà delle nane bianche, evidenziando il ruolo svolto dall'equazione di stato della materia all'interno della stella. Vengono inoltre discusse l'origine quantistica della pressione che bilancia l'attrazione gravitazionale e l'esistenza di una massa limite delle nane bianche stabili, predetta da Chandrasekhar negli anni '70.

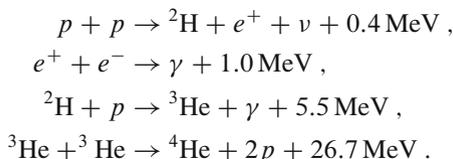
1.1 Scoperta delle nane bianche

Nel 1844, l'astronomo tedesco Friedrich Bessel dedusse che la stella chiamata Sirio aveva un compagno ancora invisibile, che fu poi osservato due decenni dopo da Alvan Graham Clark e chiamato Sirio B. La massa di Sirio B fu determinata applicando la terza legge di Keplero all'orbita del sistema binario, mentre il suo raggio fu dedotto negli anni '20 del secolo scorso, utilizzando l'equazione che descrive l'emissione di un corpo nero e lo spettro e la luminosità misurati. I valori risultanti, $M \sim 0.75\text{--}0.95 M_{\odot}$ —dove $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g è la massa del sole— e $R \sim 18,800$ km, paragonabile al raggio tipico di un pianeta¹, rivelarono che Sirio B era un oggetto straordinariamente compatto, con una densità che raggiungeva milioni di g/cm³. Nel suo libro *The Internal Constitution of the Stars*, pubblicato nel 1926, Sir Arthur Eddington scrisse la famosa frase: “abbiamo una stella di massa circa uguale al sole e raggio molto inferiore a quello di Urano” [1]. Oggi sappiamo che Sirio B appartiene alla classe di stelle chiamate nane bianche.

¹ Si noti che questo valore è circa quattro volte maggiore di quello risultante da misurazioni più recenti; vedi Tabella 1.2.

1.2 Formazione delle nane bianche

La formazione di una stella inizia con la contrazione di una nube di idrogeno auto-gravitante. Man mano che la densità aumenta, la nube diventa sempre più opaca, e l'energia rilasciata non può essere irradiata efficacemente. Di conseguenza, la temperatura aumenta fino a raggiungere il valore $T \sim 6 \times 10^7$ K, necessario per innescare le reazioni nucleari che trasformano l'idrogeno in elio



Queste reazioni sono tutte *esotermiche*, con l'energia che viene rilasciata sotto forma di energia cinetica delle particelle prodotte². L'equilibrio viene raggiunto non appena l'attrazione gravitazionale è bilanciata dalla pressione della materia.

Quando il combustibile nucleare si esaurisce, il nucleo smette di produrre calore, la pressione interna non può più essere generata, e la contrazione dovuta dall'attrazione gravitazionale riprende il sopravvento. Se la massa del nucleo di elio è abbastanza grande, questa contrazione, associata a un ulteriore aumento della temperatura, porta all'accensione di nuove reazioni di fusione, il cui risultato è la comparsa di nuclei più pesanti, come il carbonio e l'ossigeno. A seconda della massa della stella progenitrice, questo processo può ripetersi diverse volte, e il risultato finale è la formazione di un nucleo composto dalle specie nucleari più stabili, nichel e ferro, a densità comparabile al valore massimo osservabile sulla terra, $\rho_0 \approx 2.67 \times 10^{14}$ g/cm³, tipico della regione centrale dei nuclei atomici pesanti. Densità ancora maggiori si ritiene si verifichino all'interno delle stelle di neutroni, oggetti astrofisici risultanti dalla contrazione del nucleo di ferro in stelle molto massive, aventi $M > 4 M_\odot$. È da notare che durante la contrazione la stella progenitrice perde una grande quantità di materia dai suoi strati esterni, e la massa della nuova stella compatta—sia essa una nana bianca o una stella di neutroni—è determinata dalla massa del residuo. Le fasi evolutive di una stella progenitrice di massa $\sim 25 M_\odot$ sono riassunte nella Tabella 1.1.

Se la stella è sufficientemente piccola, cosicché la contrazione gravitazionale del nucleo non produce una temperatura abbastanza alta da innescare la combustione di nuclei pesanti, si evolverà in una nana bianca, costituita principalmente da elio, carbonio e ossigeno.

Le oltre 2.000 nane bianche osservate hanno una luminosità $L \sim 10^{-2} L_\odot$ —dove L_\odot è la luminosità del sole—e temperatura superficiale $T_s \sim 10^4$ K. Il raggio di molte nane bianche è stato determinato misurandone il flusso, definito come

$$F(D) = \frac{L}{4\pi D^2} , \quad (1.1)$$

² Ricorda: 1 MeV = 1.6021917 × 10⁻⁶ erg.

Tabella 1.1 Fasi della nucleosintesi per una stella di massa $\sim 25 M_{\odot}$. Adattato da Ref. [2] con permessi, © APS 2002. Tutti i diritti riservati

Combustibile nucleare	Prodotti principali	Temperatura	Densità	Durata
		[K]	[g cm ⁻³]	[anni]
H	He	3.81×10^7	3.81	6.70×10^6
He	C, O	1.96×10^8	762	8.39×10^5
C	O, Ne, Mg	8.41×10^8	1.29×10^5	522
Ne	O, Mg, Si	1.57×10^9	3.95×10^6	0.891
O	Si, S	2.09×10^9	3.60×10^6	0.402
Si	Fe	3.65×10^9	3.01×10^7	0.002

Tabella 1.2 Valori misurati di massa e raggio di tre nane bianche in unità di massa e raggio solare, M_{\odot} e R_{\odot}

	Massa	Raggio
	[M_{\odot}]	[R_{\odot}]
Sirius B [3, 4]	1.018 ± 0.011	0.0084 ± 0.0002
Procyon B [5]	0.602 ± 0.015	0.01234 ± 0.00032
40 Eri B [6, 7]	0.573 ± 0.018	0.0136 ± 0.0002

dove D è la distanza dalla terra, il cui valore si ottiene applicando il metodo della parallasse. Combinando l'Eq. (1.1) con quella che descrive l'emissione del corpo nero

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_s^4, \quad (1.2)$$

dove σ è la costante di Stephan-Boltzmann, si ottiene

$$R = \sqrt{\frac{FD^2}{\sigma T_s^4}}. \quad (1.3)$$

A titolo di esempio, i valori misurati di massa e raggio di tre nane bianche sono riportati nella Tabella 1.2. Le densità medie corrispondenti cadono nell'intervallo $10^6 - 10^7$ g/cm³, da confrontare con la densità tipica degli oggetti macroscopici terrestri, non superiore a 20 g/cm³.

Nel suo fondamentale articolo del 1931 [8], Chandrasekhar ha dimostrato che la pressione necessaria per assicurare la stabilità delle nane bianche contro il collasso gravitazionale è fornita da un gas di elettroni non interagenti a temperatura molto bassa. Le principali proprietà di questo sistema sono discusse nella sezione che segue.

1.3 Proprietà del gas di Fermi degenerare

Consideriamo un sistema di elettroni non interagenti distribuiti uniformemente in un cubo di volume $V = L^3$. Se la temperatura è abbastanza bassa da poter trascurare le energie termiche, tutti i livelli energetici quantistici più bassi sono occupati

da due elettroni, uno per ogni stato di spin. Questa configurazione corrisponde allo stato fondamentale del sistema. Un gas di elettroni non interagenti nel suo stato fondamentale è detto *totalmente degenere*. A temperature maggiori, l'energia termica può eccitare gli elettroni a stati di energia più alta, lasciando vuoti alcuni dei livelli inferiori. In questo caso, il sistema non è più completamente degenere.

Poiché gli elettroni sono distribuiti uniformemente, le loro funzioni d'onda sono invarianti per traslazioni. Possono quindi essere scritte nella forma

$$\psi_{\mathbf{p}s}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\chi_s, \quad (1.4)$$

dove χ_s è uno spinore di Pauli che specifica la proiezione dello spin e

$$\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.5)$$

è un'autofunzione dell'operatore impulso—che è il generatore delle traslazioni spaziali—e soddisfa le condizioni al contorno periodiche

$$\phi_{\mathbf{p}}(x, y, z) = \phi_{\mathbf{p}}(x + n_x L, y + n_y L, z + n_z L). \quad (1.6)$$

Qui x , y e z denotano le componenti del vettore \mathbf{r} , che specifica la posizione dell'elettrone, e $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dall'Eq. (1.6) seguono immediatamente le relazioni

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad p_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad p_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (1.7)$$

con $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$, che a loro volta determinano gli autovalori dell'impulso.

Ogni stato quantistico è associato ad un autovalore dell'impulso \mathbf{p} , cioè ad una specifica terna di numeri interi (n_x, n_y, n_z) . L'autovalore dell'energia corrispondente risulta essere

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m_e} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{2m_e} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (1.8)$$

dove $p^2 = |\mathbf{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, e m_e è la massa dell'elettrone. L'energia massima dell'elettrone in un gas completamente degenere è chiamata Energia di Fermi, e denotata ϵ_F . L'impulso corrispondente, chiamato impulso di Fermi, è $p_F = \sqrt{2m_e\epsilon_F^3}$.

1.3.1 Densità di energia

Il numero di stati quantistici con energia minore o uguale a ϵ_F si può calcolare facilmente. Poiché ad ogni terna (n_x, n_y, n_z) corrisponde un punto in un reticolo

³ Qui consideriamo un sistema non relativistico. La generalizzazione necessaria per descrivere gli elettroni relativistici sarà discussa più avanti.

cubico con distanza tra i punti unitaria, il numero degli autostati dell'impulso è uguale al numero di punti del reticolo che si trovano all'interno di una sfera di raggio $R = p_F L / (2\pi)$. Il numero di elettroni nel sistema si ottiene quindi dalla relazione

$$N = 2 \frac{4\pi}{3} R^3 = V \frac{p_F^3}{3\pi^2}, \quad (1.9)$$

dove il fattore 2 tiene conto della degenerazione di spin, che implica che ci sono due elettroni con proiezioni di spin opposte per ogni autostato dell'impulso. Ne consegue che la densità di numero degli elettroni, cioè il numero di elettroni per unità di volume, è data dalla

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{p_F^3}{3\pi^2}. \quad (1.10)$$

A questo punto l'energia totale dello stato fondamentale si può calcolare facilmente dalla

$$E = 2 \sum_{p \leq p_F} \frac{p^2}{2m_e}, \quad (1.11)$$

usando Eq. (1.7) e prendendo il limite $L \rightarrow \infty$, che corrisponde a una spaziatura tra i livelli tendente a zero. In queste condizioni, possiamo fare la sostituzione

$$\sum_{p \leq p_F} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{p \leq p_F} d^3 p \quad (1.12)$$

nel membro di destra dell'Eq. (1.11), per ottenere

$$E = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp \frac{p^2}{2m_e} = N \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_e}. \quad (1.13)$$

La corrispondente densità di energia è

$$\epsilon = \frac{E}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{p_F^5}{5m_e}. \quad (1.14)$$

Si noti che che dall'Eq. (1.10) segue che l'energia di Fermi può essere scritta in termini della densità di numero secondo la

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{1}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3}. \quad (1.15)$$

L'equazione soprastante può essere utilizzata per definire un valore n_0 della densità tale che per $n_e \gg n_0$ il gas di elettroni a una data temperatura T è totalmente