Gerhard Merziger · Michael Holz
Steffen Timmann · Detlef Wille

Repetitorium Elementare Mathematik 2

Methoden, Beispiele, Aufgaben, Lösungen

HANSER

FORMELSAMMLUNG

Grenzwerte von Folgen ($n \longrightarrow \infty$)

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1 \qquad \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1,\ a>0 \qquad \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \longrightarrow \mathrm{e} \qquad (1-\tfrac{1}{n})^n \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow \mathrm{e} \qquad \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty$$

$$a^n \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |a|<1 \\ 1, & \text{für } a=1 \\ \text{divergent sonst} \end{cases}$$

$$\frac{a^n}{n^k} \longrightarrow \infty \quad \begin{cases} a>1 \\ k \text{ fest} \end{cases} \qquad a^n n^k \longrightarrow 0 \quad \begin{cases} |a|<1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$$

Rechenregeln für Grenzwerte ($n \longrightarrow \infty$)

$$\begin{matrix} a_n \longrightarrow a \\ b_n \longrightarrow b \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a_n+b_n \longrightarrow a+b \\ a_n-b_n \longrightarrow a-b \end{matrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix} a_n \cdot b_n \longrightarrow a\cdot b \\ \sqrt{a}_n \longrightarrow \sqrt{a} \end{matrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix} \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b},\ b\neq 0 \\ f(a_n) \longrightarrow f(a),\ f \text{ stetig} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_n \longrightarrow a \\ b_n \longrightarrow a \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} a_n \le x_n \le b_n \\ \text{für } n \ge n_0 \end{matrix} \Longrightarrow x_n \longrightarrow a$$

$$\begin{matrix} a_n & \le & x_n & \le & b_n \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & a & & \end{matrix}$$

Kapitalentwicklung bei Zinseszins

Ein Kapital K_0 wird mit jährlich $p\%$ verzinst, Zinsfaktor $q = 1+p\% = 1+\frac{p}{100}$. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende dem Kapital zugeschlagen.

Kapital nach 1 Jahr	K_1	$=$	$K_0(1+p/100)$	$=$	$K_0\,q$,
Kapital nach n Jahren	K_n	$=$	$K_0(1+p/100)^n$	$=$	$K_0\,q^n$,
Verdoppelung nach	n	$=$	$\frac{\ln 2}{\ln q} \approx \frac{70}{p}$ Jahren.		

Endliche Reihen

	Summe der ersten n
$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$	natürlichen Zahlen,
$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+\cdots+2n = n(n+1)$	geraden Zahlen,
$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$	ungeraden Zahlen,
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	Quadratzahlen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\quad q\neq 1$$

endliche geometrische Reihe

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k = \binom{n}{0}a^n + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Reihen

Geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$ für $\lvert q \rvert < 1$
Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$
Alternierende harm. Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$
Allgemeine harm. Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\iff \alpha > 1$
siehe auch uneigentliches Integral!	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert $\iff \alpha > 1$

Konvergenzkriterien

Notwendiges Kriterium

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist (a_k) eine Nullfolge, d.h. $a_k \longrightarrow 0$.

Leibniz-Kriterium für **alternierende Reihen**:

Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Quotientenkriterium

$$\frac{\lvert a_{k+1} \rvert}{\lvert a_k \rvert} \xrightarrow[k\to\infty]{} q, \quad \text{so ist} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } q < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

Wurzelkriterium

$$\sqrt[k]{\lvert a_k \rvert} \xrightarrow[k\to\infty]{} q, \quad \text{so ist} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } q < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

Potenzreihen

$$\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

FORMELSAMMLUNG

Anzahl der	ohne Wiederholung	mit Wiederh.
k-Permutationen über $\{1,\ldots,n\}$	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	n^k
k-Kombinationen über $\{1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Anzahl der k-Tupel mit l verschiedenen Komponenten der Vielfachh. $k_1,\ldots,k_l$
$\dfrac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_l!}$

Die k-Permutationen bzw. k-Kombinationen entsprechen den Auswahlen von k aus n Objekten **mit** bzw. **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge.

Formeln zur Wahrscheinlichkeit

$P(\overline{A}) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ Wahrsch. d. **Gegenereignisses**

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **Additionssatz**

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ **Produktsatz** f. bedingte Wahrsch.

Binomialverteilung

Ein Zufallsexperiment habe nur zwei mögliche Ergebnisse: Treffer und Niete. Die Trefferwahrscheinlichkeit sei p. Das Experiment werde n-mal unabhängig wiederholt, X sei dabei die Anzahl der Treffer. Dann gilt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, für $0 \le k \le n$ **Binomialverteilung**

Komplexe Zahlen

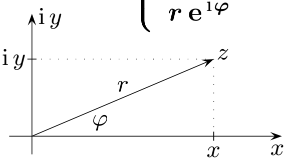
Kartesische Koordinaten $\boldsymbol{x, y}$

$$z = \begin{cases} x + \mathrm{i}\, y \\ r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{cases}$$

Polarkoordinaten $\boldsymbol{r, \varphi}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ Quadranten beachten!

$x = 0$: Sonderfall

Addition	$(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\, y_2)$	$=$	$(x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2)$
Multiplikation	$(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\, y_2)$	$=$	$(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1)$
Division	$\dfrac{x_1 + \mathrm{i}\, y_1}{x_2 + \mathrm{i}\, y_2}$	$=$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \dfrac{1}{\lvert z_2\rvert^2}\, z_1 \cdot \overline{z_2}$

$$\boxed{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)}$$

Multiplikation	$r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$	$= r_1 \cdot r_2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$	Beträge multiplizieren Winkel addieren
Division	$\dfrac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}$	$= \dfrac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$	Beträge dividieren Winkel subtrahieren
Potenzen	$(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n$	$= r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot\varphi}$	Betrag mit n potenzieren Winkel mit n multiplizieren

Quadratische Gleichungen

$z^2 + pz + q = 0$ hat die beiden Lösungen $z_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}\,.$

Ist $\dfrac{p^2}{4} - q = r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 0$, so ist $\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} = \pm\sqrt{r}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}$.

Differenziationsregeln	**Integrationsregeln**
Linearität, c konstanter Faktor $(f+g)' = f'+g'$ und $(cf)' = cf'$	Linearität, c konstanter Faktor $\int(f+g) = \int f + \int g$ und $\int cf = c\int f$
Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$	partielle Integration $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$
Kettenregel $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$	Substitutionsregel $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,\ t = g(x)$
Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$	**Hauptsatz**: Ist $F' = f$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

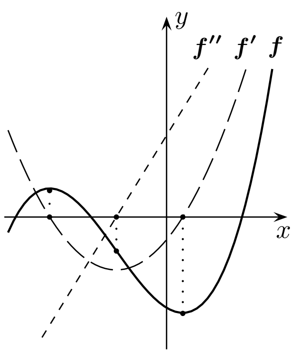
Stammfunktionen und Ableitungen

$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f'}$
x^n	nx^{n-1}
x	1
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f'}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\mathrm{e}^{\,x}$	$\mathrm{e}^{\,x}$
a^x	$a^x \ln a$

$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f'}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$

Extrema, Wendepunkte



$\boldsymbol{f}$ hat **Extremum** bei $x_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0.$

$f' > 0 \implies f$ steigt.

$f' < 0 \implies f$ fällt.

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \text{ hat } \textbf{Wendepunkt} \text{ bei } x_0 \\ \Longleftrightarrow \\ \boldsymbol{f'} \text{ hat } \textbf{Extremum} \text{ bei } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f''(x_0) = 0.$$

$f'' > 0 \implies f$ ist konvex.

$f'' < 0 \implies f$ ist konkav.

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \implies f \quad \text{hat bei } x_0 \quad \begin{array}{l} \text{Minimum,} \\ \text{Maximum.} \end{array}$$

REPETITORIUM
ELEMENTARE MATHEMATIK
2

Repetitio est mater studiorum

Michael Holz
Gerhard Merziger
Steffen Timmann
Detlef Wille

1. Auflage, Ebook

Binomi Verlag , Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon	05105 6624000
E–Mail	verlag@binomi.de
Internet	www.binomi.de

Zu beziehen beim Verlag, www.binomi.de

ISBN **978–3–923 923–60–3**

Hannover 04/21

REPETITORIUM

ELEMENTARE MATHEMATIK

Teil 1

Grundbegriffe
Beweise
Zahlen
Natürliche Zahlen
ggT, kgV
Euklidischer Algorithmus
Vollständige Induktion
Rationale Zahlen
Prozentrechnung
Reelle Zahlen
Potenzen
Logarithmen
Binomische Formeln
Pascalsches Dreieck
Koordinatensysteme
Geometrie
Dreieckskonstruktionen
Dreiecksberechnungen
Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Matrizen
Determinanten
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Vektorrechnung
Skalarprodukt
Vektorprodukt
Spatprodukt
Geraden und Ebenen im Raum
Finanzmathematik
Dualsystem
Hexadezimalsystem

Teil 2

Polynome
Rationale Funktionen
Trigonometrische Funktionen
Exponentialfunktionen
Logarithmusfunktionen
Folgen
Reihen
Geometrische Reihe
Harmonische Reihe
Grenzwerte
Differenzialrechnung
Ableitungen
Technik des Differenzierens
Kurvendiskussionen
l'Hospital
Extremwertaufgaben
Integralrechnung
Technik des Integrierens
Partielle Integration
Integration durch Substitution
Hauptsatz
Flächenberechnungen
Volumen von Rotationskörpern
Kombinatorik
Wahrscheinlichkeiten
Zufallsvariablen
Verteilungen
Statistik
Komplexe Zahlen
Komplexe Zahlenebene
Multiplikation, Division
Potenzen, Wurzeln
Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Vorwort

Dieses Buch führt Teil 1 des Repetitoriums fort und will Studierenden an Universitäten und Fachhochschulen in allen Studiengängen, die Mathematikkenntnisse voraussetzen, aber auch Schülern bei der Abiturvorbereitung helfen, mathematische Kenntnisse aus dem Oberstufenbereich aufzufrischen und zu ergänzen.

Eine gründliche Vorbereitung auf ein Studium ist zu empfehlen, da wichtige mathematische Bereiche auch in Leistungskursen nicht abgedeckt, aber in Vorlesungen häufig vorausgesetzt werden.

Aus jahrelanger Erfahrung im Umgang mit Studierenden wissen die Autoren, dass **Beispiele** zum Verständnis unverzichtbar sind. Dieses Repetitorium ist zum Selbststudium bestens geeignet! Mathematische Sachverhalte werden an

> mehr als **1000 völlig durchgerechneten Beispielen** erklärt und durch mehr als **500 Skizzen** erläutert.

Ein ausführlicher Index mit ca. 1000 Stichwörtern erleichtert die Arbeit.

Auf Seiten, Beispiele, Aufgaben und Abschnitte, sowie auf die unten zitierte Literatur wird innerhalb eckiger Klammern verwiesen:
[Seite 210], [12.1], [Abschnitt 5.4] sowie [EM 1, 2.13], [HM, Seite 337] usw.

Wichtige Formeln und Begriffe stehen auf den Umschlagseiten F1, F2, F3, F4.

Natürlich können wir trotz aller verwendeten Sorgfalt Fehler nicht ausschliessen. Ein aktuelles Fehlerverzeichnis findet man auf www.binomi.de.

Wir freuen uns auf Ihre Kritik, Hinweise und Anregungen. Sie erreichen uns auf www.binomi.de.

Die Autoren

Zitierte Literatur:

EM 1	*Merziger/Holz/Wille*	Repetitorium Elementare Mathematik 1
EM 2	*Merziger/Holz/Timmann/Wille*	Repetitorium Elementare Mathematik 2
FH	*Merziger/Mühlbach/Wille/Wirth*	Formeln + Hilfen Höhere Mathematik
HM	*Merziger/Wirth*	Repetitorium Höhere Mathematik
VK	*Wille*	Mathematik–Vorkurs
LA 1	*Wille*	Repetitorium Lineare Algebra, Teil 1
Ana 1	*Timmann*	Repetitorium Analysis, Teil 1

Weiterführende Literatur:

Holz/Wille	Repetitorium Lineare Algebra, Teil 2
Timmann	Repetitorium Analysis, Teil 2
Holz	Repetitorium Algebra
Timmann	Repetitorium Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Timmann	Repetitorium Funktionentheorie
Timmann	Repetitorium Topologie und Funktionalanalysis
Mühlbach	Repetitorium Stochastik

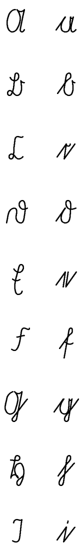
Überwiegend positive Kommentare von Studierenden und Dozenten zu diesen Büchern findet man auf www.binomi.de. Hier richten Sie Ihre Fragen direkt an die Autoren!

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

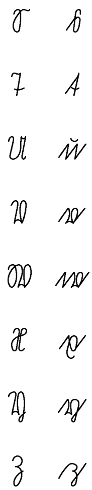
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet



a
b
c
d
e
f
g
h
i

j
k
l
m
n
o
p
q
r



s
t
u
v
w
x
y
z

1 Folgen

1.1 Grundlegende Eigenschaften von Folgen

Ist für jede natürliche Zahl n eine reelle Zahl a_n gegeben, so nennt man

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n,\ \dots$$

eine **reelle Zahlenfolge** oder **Zahlenfolge** oder kurz **Folge**.

Folgen

Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ist durch ein **Bildungsgesetz** gegeben,

(a) **explizit** durch Angabe von $a_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$.

(b) **rekursiv** durch Angabe von a_1 und $a_{n+1} = f(a_n),\ n \in \mathbb{N}$.

Dabei ist f eine Funktion und $a_1 \in \mathbb{R}$ heißt **Startwert**.

Für die Folge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ schreibt man $(a_n),\ n \in \mathbb{N}$ oder kurz (a_n).
a_n heißt ***n*-tes Glied** der Folge (a_n), n heißt **Index**.
Die Bezeichnungen sind willkürlich, üblich sind auch (b_n) oder (x_k) usw.
Der Laufbereich des Indexes sollte klar sein oder angegeben werden:

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{oder} \quad k \geq 2 \quad \text{usw.}$$

Ist eine Folge in der Form $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$ gegeben, so setzt man voraus, dass aus den angegebenen ersten Gliedern ein Bildungsgesetz erkennbar ist:

Zahlenfolge	nächstes Glied der Folge	Bildungsgesetz der Folge	Index
$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots$	5	$a_n = n$	$n = 1, 2, 3, \dots$
$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \dots$	2	$a_n = 2$	$n = 1, 2, 3, \dots$
$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$	$\frac{1}{5}$	$a_n = \frac{1}{n}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots$	16	$a_n = 2^n$	$n = 0, 1, 2, \dots$
$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \dots$	14	$a_n = 2 + 3n$	$n = 0, 1, 2, \dots$
$\frac{4}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{7}{4},\ \dots$	$\frac{8}{5}$	$a_n = \frac{n+1}{n-2}$	$n = 3, 4, 5, \dots$
$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots$	1	$a_n = (-1)^n$	$n = 0, 1, 2, \dots$
$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \dots$	$-\frac{5}{6}$	$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$

Die letzten beiden Folgen heißen **alternierend**. Ihre Glieder haben wechselndes Vorzeichen.

Endliche Folgen, Summen und Produkte werden in [**EM1**] ausführlich behandelt. Dort sind auch die Zeichen $\sum$ und $\prod$ erklärt.

Bei den folgenden Aufgaben benutze man ggf. einen Taschenrechner (TR).

1.1 *Man bestimme die ersten Glieder der explizit gegebenen Folgen:*

(a) $a_n = 5n - 1, \quad n = 1, \dots, 6,$

(b) $a_n = 2^{n-3}, \quad n = 0, \dots, 5,$

(c) $a_n = 2^n - 1, \quad n = 0, \dots, 6,$

(d) $a_n = 1 + 2 + \cdots + n, \quad n = 1, \dots, 6,$

(e) $a_n = n(n+1), \quad n = 1, \dots, 4,$

(f) $a_n = 2n + (-1)^n, \quad n = 0, \dots, 7,$

(g) $a_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1), \quad n = 1, \dots, 4,$

(h) $a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k, \quad n = 1, \dots, 6,$

(i) $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}, \quad n = 1, \dots, 4,$

(j) $a_n = \frac{2}{3}\big(1 - (-\frac{1}{2})^n\big), \quad n = 1, \dots, 5,$

(k) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1}\Big), \quad n = 0, \dots, 6\,.$

(a) $a_1 = 4, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 14, \quad a_4 = 19, \quad a_5 = 24, \quad a_6 = 29.$

(b) $a_0 = \frac{1}{8}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = 4.$

(c) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 15, \quad a_5 = 31, \quad a_6 = 63.$

(d) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 2 = 3, \quad a_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \quad a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$
$a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$

(e) $a_1 = 1 \cdot 2 = 2, \quad a_2 = 2 \cdot 3 = 6, \quad a_3 = 3 \cdot 4 = 12, \quad a_4 = 4 \cdot 5 = 20.$

(f) $(a_n) \;=\; 1, 1, 5, 5, 9, 9, 13, 13, \dots$

(g) $a_1 = \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1, \qquad a_2 = \sum_{k=1}^{2} (2k-1) = 1 + 3 = 4,$

$a_3 = \sum_{k=1}^{3} (2k-1) = 1 + 3 + 5 = 9, \qquad a_4 = \sum_{k=1}^{4} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$

(h) $a_1 = \sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3, \qquad a_2 = \sum_{k=0}^{2} 2^k = 1 + 2 + 4 = 7,$

$a_3 = \sum_{k=0}^{3} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 = 15, \qquad a_4 = 31, \quad a_5 = 63, \quad a_6 = 127.$

(i) $a_1 = \prod_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}$, $\quad a_2 = \prod_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,

$a_3 = \prod_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, $\quad a_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

(j) $a_1 = \frac{2}{3}\big(1 - (-\frac{1}{2})^1\big) = 1$, $\quad a_2 = \frac{2}{3}\big(1 - (-\frac{1}{2})^2\big) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, $\quad a_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$,

$a_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$, $\quad a_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{33}{32} = \frac{11}{16}$.

(k) Mittels TR oder binomischer Formeln [**EM1**, Seite 104 ff] erhält man: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ Das ist der Anfang der *Fibonacci–Folge*, vgl. [1.3 (a)].

1.2 *Man bestimme die ersten Glieder der rekursiv gegebenen Folgen:*

(a) $a_1 = 4$, $\quad a_{n+1} = a_n + 5$, $\quad n = 1, \ldots, 6$,

(b) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = a_n + n + 1$, $\quad n = 1, \ldots, 5$,

(c) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{2}{a_n}\big)$, $\quad n = 1, \ldots, 4$,

(d) $a_0 = 1$, $\quad a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$, $\quad n = 0, \ldots, 4$,

(e) $a_0 = 1$, $\quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $\quad n = 0, \ldots, 5$,

(f) $a_0 = 1$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $\quad n = 0, \ldots, 3$,

(g) $a_0 = 1$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\quad n = 0, \ldots, 4$.

(a) $(a_n) = 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29, \ldots$

(b) $a_1 = 1,\ \ a_2 = a_1 + 2 = 3,\ \ a_3 = a_2 + 3 = 6,\ \ a_4 = 6 + 4 = 10,\ \ a_5 = 15.$

(c) $a_1 = 1,\ \ a_2 = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{2}{1}\big) = \frac{3}{2},\ \ a_3 = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{2}{\frac{3}{2}}\big) = \frac{7}{6},\ \ a_4 = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{2}{\frac{7}{6}}\big) = \frac{19}{14}.$

(d) $(a_n) = 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29}, \ldots$

(e) $(a_n) = \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13}, \ldots$

(f) $a_0 = 1,\ \ a_1 = \sqrt{2} \approx 1.4142,\ \ a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5538,\ \ a_4 \approx 1.5981.$

(g) $a_0 = 1,\ \ a_2 = \sqrt{3} \approx 1.7321,\ \ a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx 1.9319,\ \ a_4 \approx 1.9829.$

Man kann eine Folge (a_n) auch rekursiv definieren durch zwei Startwerte a_1, a_2 und eine Vorschrift, mit der man a_{n+2} aus den beiden Vorgängern a_n und a_{n+1} berechnet: $a_{n+2} = f(a_n, a_{n+1})$.

1.3 *Man bestimme die ersten Glieder der rekursiv gegebenen Folgen:*

(a) $a_0 = 1$, $\quad a_1 = 1$, $\quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $\quad n = 0, \ldots, 12$,

(b) $a_1 = 1$, $\quad a_2 = \frac{1}{2}$, $\quad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $\quad n = 1, \ldots, 5$.

(a) $(a_n) = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233, \ldots$
Diese (historisch berühmte) Folge heißt **Fibonacci–Folge**.

(b) $a_3 = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}\,, \quad a_4 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}\,, \quad a_5 = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{8}}{2} = \frac{11}{16}\,.$

1.4 *Man bestimme ein explizites Bildungsgesetz der rekursiv gegebenen Folgen:*

(a) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n + 5,$

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n + 1,$

(c) $a_0 = -2, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n,$

(d) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2n(n+1)},$

(e) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n(n+1)\,.$

(a) $a_1 = 4,\ a_2 = 4+5,\ a_3 = 4+5+5,\ \dots$
Man sieht $a_n = 4 + (n-1)5$ bzw. $a_n = -1 + 5n$ für $n \ge 1$.

(b) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1+2, \quad a_3 = 1+2+3, \quad a_4 = 1+2+3+4, \ \dots,$ vgl. [1.1 (d)].
Man sieht $a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ für $n \ge 1$, [**EM1**, Seite 31].

(c) $a_0 = -2,\ a_1 = -2(-\frac{1}{2}),\ a_2 = -2(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2})^2,\ a_3 = -2(-\frac{1}{2})^3,\ \dots$
also $a_n = -2(-\frac{1}{2})^n$ für $n \ge 0$.

(d) $a_1 = \frac{1}{2},\ \ a_2 = \frac{1}{4},\ \ a_3 = \frac{1}{6},\ \ a_4 = \frac{1}{8},\ \dots$
Man vermutet $a_n = \frac{1}{2n}$. Dies stimmt für $n = 1$ und folgt wegen

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2n(n+1)} = a_n - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

durch vollständige Induktion.

(e) $a_1 = 1,\ a_2 = 1\cdot 2,\ a_3 = 1\cdot 2\cdot 3,\ a_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,$ und man sieht $a_n = n!\,,\ n \ge 1\,.$

Ist eine Folge explizit durch $a_n = f(n)$ gegeben, so liefert die	
Differenzenfolge	$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - f(n)$
das rekursive Bildungsgesetz	$a_{n+1} = a_n + f(n+1) - f(n)\,.$

1.5 *Man bestimme ein rekursives Bildungsgesetz der explizit gegebenen Folgen:*

(a) $a_n = n(n+1),\ n \ge 1,$ (b) $a_n = \frac{1}{n},\ n \ge 1.$

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= n(n+1) = f(n) \qquad \text{ergibt die Folge } 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42, \dots \\ a_{n+1} &= a_n + f(n+1) - f(n) \\ &= a_n + \big((n+1)(n+2) - n(n+1)\big) \\ &= a_n + (n+1)(n+2-n) \ = \ a_n + 2(n+1) \end{aligned}$$

Ein rekursives Bildungsgesetz ist also: $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2(n+1)\,.$

(b)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} = f(n) \qquad \text{ergibt die Folge } 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}, \dots \\ a_{n+1} &= a_n + f(n+1) - f(n) \\ &= a_n + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= a_n + \frac{-1}{n(n+1)} \ = \ a_n - \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Ein rekursives Bildungsgesetz ist also: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}\,.$

1.6 *Man bestimme ein explizites und ein rekursives Bildungsgesetz der Folgen:*

(a) $1, 2, 3, 4, \ldots$ (b) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ (c) $2, 2, 2, 2, \ldots$

(d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ (e) $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ (f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

(g) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ (h) $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ (i) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

(j) $1, 2, 6, 24, 120, 720, \ldots$ (k) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ (l) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

(a) Folge der natürlichen Zahlen
expl.: $a_n = n, \ n \in \mathbb{N}$,
rek.: $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n + 1$.

(c) Konstante Folge (2)
expl.: $a_n = 2, \ n = 1, 2, 3, \ldots$,
rek.: $a_1 = 2, \ a_{n+1} = a_n$.

(e) Folge der geraden Zahlen
expl.: $a_n = 2n, \ n \geq 0$,
rek.: $a_0 = 0, \ a_{n+1} = a_n + 2$.

(g) Folge der ungeraden Zahlen
expl.: $a_n = 2n - 1, \ n \geq 1$,
rek.: $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n + 2$.

(i) Folge der Potenzen von 2
expl.: $a_n = 2^n, \ n \geq 0$,
rek.: $a_0 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n$.

(k) Alternierende Folge $1, -1, 1, \ldots$
expl.: $a_n = (-1)^n, \ n \geq 0$,
rek.: $a_0 = 1, \ a_{n+1} = -a_n$.

(b) Folge $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
expl.: $a_n = \frac{1}{2}\big(1 + (-1)^n\big), \ n \geq 0$,
rek.: $a_0 = 1, \ a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}$.

(d) Folge $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$
expl.: $a_n = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n, \ n \geq 1$,
rek.: $a_1 = -\frac{1}{4}, \ a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$.

(f) Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$, vgl. [1.5 (b)]
expl.: $a_n = \frac{1}{n}, \ n \geq 1$,
rek.: $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$.

(h) Folge $2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$, vgl. [1.5(a)]
expl.: $a_n = n(n+1), \ n \geq 1$,
rek.: $a_1 = 2, \ a_{n+1} = a_n + 2(n+1)$.

(j) Folge der Fakultäten, vgl. [1.4 (e)]
expl.: $a_n = n!, \ n \geq 1$,
rek.: $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n(n+1)$.

(l) Folge der Quadratzahlen
expl.: $a_n = n^2, \ n \geq 1$,
rek.: $a_0 = 1, \ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$.

1.7 *Man bestimme* (a) *ein rekursives und* (b) *ein explizites Bildungsgesetz der Folge* $1, 5, 10, 16, 23, \ldots$ *Hinweis: Betrachte die Differenzenfolge* $(a_{n+1} - a_n)$.

(a) Rekursiv: Es ist $a_2 - a_1 = 4$, $a_3 - a_2 = 5$, $a_4 - a_3 = 6$, $a_5 - a_6 = 7$, ...
Die Differenzenfolge $(a_{n+1} - a_n)$ ist $4, 5, 6, 7, \ldots$, also gilt $a_{n+1} - a_n = n + 3$.
Damit findet man das rekursive Bildungsgesetz $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 3$.

(b) Explizit: Rückwärtseinsetzen, siehe auch [**EM1**, Seite 27], ergibt

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) + 3 = a_{n-2} + ((n-2) + 3) + ((n-1) + 3) = \ldots$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 + (1+3) + (2+3) + \cdots + ((n-1)+3) \\
&= a_1 + \big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) + \big(3 + 3 + \cdots + 3\big) \\
&= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}n(n-1) + 3(n-1) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n - 2\,.
\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$,
siehe [**EM1**, S. 31].

Eigenschaften von Folgen

Eine Folge (a_n) heißt	falls
monoton wachsend	$a_n \leq a_{n+1}$ für alle n.
streng monoton wachsend	$a_n < a_{n+1}$ für alle n.
monoton fallend	$a_{n+1} \leq a_n$ für alle n.
streng monoton fallend	$a_{n+1} < a_n$ für alle n.
monoton	die Folge monoton wächst oder monoton fällt.
streng monoton	die Folge streng monoton wächst oder streng monoton fällt.
nach oben beschränkt	es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq S$ für alle n. S heißt dann **obere Schranke** der Folge.
nach unten beschränkt	es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $S \leq a_n$ für alle n. S heißt dann **untere Schranke** der Folge.
beschränkt	die Folge nach oben und nach unten beschränkt ist.

Es gibt einige offensichtliche Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften: Beispielsweise ist jede streng monotone Folge auch monoton, jede monoton wachsende Folge nach unten beschränkt durch die Schranke a_1 und jede monoton fallende Folge nach oben beschränkt durch die Schranke a_1.
Ist S eine obere (untere) Schranke von (a_n), so ist natürlich jede größere (kleinere) Zahl ebenfalls eine obere (untere) Schranke der Folge.

1.8 *Welche der genannten Eigenschaften haben die Folgen* (a_n) *?*

(a) $a_n = n$, (b) $a_n = 1$, (c) $a_n = \frac{1}{n}$, (d) $a_n = (-1)^n$.

(a) $a_n = n$: Die Folge der natürlichen Zahlen ist streng monoton wachsend, denn $a_n = n < n + 1 = a_{n+1}$. Also ist die Zahl $a_1 = 1$ oder jede kleinere Zahl untere Schranke der Folge (n). Sie ist nicht nach oben beschränkt, da es zu jeder reellen Zahl eine natürliche Zahl gibt, die größer ist.

(b) $a_n = 1$: Konstante Folgen sind sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend, aber nicht streng monoton. Natürlich sind sie beschränkt.

(c) $a_n = \frac{1}{n}$: Die Folge $(\frac{1}{n})$ ist streng monoton fallend, da $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$. Also ist sie durch $a_1 = 1$ nach oben beschränkt. Sie ist durch 0 oder jede negative Zahl nach unten beschränkt, denn für alle natürlichen Zahlen n gilt $0 < \frac{1}{n} = a_n$.

(d) $a_n = (-1)^n$: Die Folge (a_n) ist nicht monoton, aber beschränkt.
Z.B. ist 1 eine obere und -1 eine untere Schranke.

1.9 *Sind die rekursiv gegebenen Folgen aus* [1.4] *monoton?*

Die Folgen (a), (b), (e) sind streng monoton wachsend, Folge (d) ist streng monoton fallend. Die Folge (c) ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.

1.2 Arithmetische und geometrische Folgen

Arithmetische und geometrische Folgen

(a_n) heißt **arithmetische Folge**, falls die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, d.h. es gibt eine reelle Zahl d mit $a_{n+1} - a_n = d$ für alle n.

arithmetische Folge: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

(a_n) heißt **geometrische Folge**, falls der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, d.h. es ist $a_n \neq 0$ und es gibt $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ für alle n.

geometrische Folge: $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$

Nur konstante Folgen $\neq 0, 0, \ldots$ sind zugleich arithmetisch und geometrisch! [1.12(a)]

1.10 *Man bestimme die ersten 6 Glieder der arithmetischen Folge (a_n) mit*

(a) $a_1 = -2,\ d = 3,$ (b) $a_1 = 1,\ d = -2.$

(a) $a_1 = -2,\ d = 3 \implies a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ a_4 = 7,\ a_5 = 10,\ a_6 = 13.$

(b) $a_1 = 1,\ d = -2 \implies a_2 = -1,\ a_3 = -3,\ a_4 = -5,\ a_5 = -7,\ a_6 = -9.$

1.11 *Man bestimme die ersten 5 Glieder sowie ein explizites Bildungsgesetz der geometrischen Folge (a_n) mit*

(a) $a_1 = 1,\ q = 2,$ (b) $a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2},$ (c) $a_1 = 2,\ q = -1,$
(d) $a_1 = 1,\ q = -\frac{1}{3},$ (e) $a_1 = \frac{1}{3},\ q = -3,$ (f) $a_1 = -\frac{1}{6},\ q = -\frac{2}{3}.$

(a) $a_1 = 1,\ q = 2 \implies a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 8,\ a_5 = 16,\ a_n = 2^{n-1}.$

(b) $a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2} \implies a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{8},\ a_5 = \frac{1}{16},\ a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$

(c) $a_1 = 2,\ q = -1 \implies a_2 = -2,\ a_3 = 2,\ a_4 = -2,\ a_5 = 2,\ a_n = -2(-1)^n.$

(d) $a_1 = 1,\ q = -\frac{1}{3} \implies a_2 = -\frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = -\frac{1}{27},\ a_5 = \frac{1}{81},\ a_n = (-\frac{1}{3})^{n-1}.$

(e) $a_1 = \frac{1}{3},\ q = -3 \implies a_2 = -1,\ a_3 = 3,\ a_4 = -9,\ a_5 = 27,\ a_n = \frac{1}{3}(-3)^{n-1}.$

(f) $a_1 = -\frac{1}{6},\ q = -\frac{2}{3} \implies a_2 = \frac{1}{9},\ a_3 = -\frac{2}{27},\ a_4 = \frac{4}{81},\ a_5 = \frac{8}{243},\ a_n = -\frac{1}{6}(-\frac{2}{3})^{n-1}.$

1.12 *Sind die Folgen (a_n) arithmetisch bzw. geometrisch?*

(a) $a_n = 1,$ (b) $a_n = n,$ (c) $a_n = (-\frac{1}{2})^n,$ (d) $a_n = \frac{1}{n},$
(e) $a_n = 1 + 3n,$ (f) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}},$ (g) $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$

(a) Die Folge $(a_n) = 1, 1, 1, 1, \ldots$ ist arithmetisch mit $a_1 = 1,\ d = 0$ und geometrisch mit $a_1 = 1,\ q = 1.$

(b) Die Folge $(a_n) = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ist arithmetisch mit $a_1 = 1,\ d = 1,$ aber nicht geometrisch.

(c) Die Folge $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ ist geometrisch mit $a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{2},$ aber nicht arithmetisch.

(d) Die Folge $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ ist weder arithmetisch noch geometrisch!
Z.B. ist $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - 1 \neq \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = a_3 - a_2$ und $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} = \frac{a_3}{a_2}$.

(e) $a_n = 1 + 3n \implies a_{n+1} - a_n = 1 + 3(n+1) - (1+3n) = 3.$
Also ist die Folge arithmetisch mit $a_1 = 4,\ d = 3$.

(f) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}.$
Also ist die Folge (a_n) geometrisch mit $a_1 = \frac{2}{9},\ q = \frac{2}{3}$.

(g) Die Fibonacci-Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ist weder arithmetisch noch geometrisch! Weder die Differenzen noch die Quotienten benachbarter Glieder sind konstant.

1.13 *Fritz bekommt zum Geburtstag 100 € geschenkt, steckt sie in sein Sparschwein und will in jedem Monat 35 € seines Taschengeldes hinzufügen. Wann enthält das Sparschwein mehr als 1000 €?*

Die gesparten Beträge bilden eine arithmetische Folge (a_n) mit

$$a_1 = 100,\ a_{n+1} = a_n + 35, \quad \text{also} \quad a_n = 100 + (n-1) \cdot 35.$$

Die Forderung $a_n = 100 + (n-1)35 \geq 1000$ ergibt $n \geq \frac{900}{35} + 1 \approx 26.7$.
Nach 27 Monaten enthält das Sparschwein zum ersten Mal mehr als 1000 €, $a_{27} = 100 + (27-1)35 = 1010$.

1.14 *Ein Kapital von $K_0 = 3000$ € wird zu 5% verzinst, wobei die Zinsen jeweils am Ende des Jahres dem Kapital zugeschlagen werden.*
K_n sei das Kapital nach n Jahren.
Man zeige, dass (K_n) eine geometrische Folge ist und bestimme K_1 und q.
Berechne K_{14}. Nach wieviel Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

Am Ende des ersten Jahres beträgt das Kapital $K_1 = K_0 + 0.05 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1.05$, am Ende des zweiten Jahres beträgt das Kapital $K_2 = K_1 \cdot 1.05 = K_0 \cdot 1.05^2$ usw., am Ende des n-ten Jahres $K_n = K_{n-1} \cdot 1.05 = K_1 \cdot 1.05^{n-1} = K_0 \cdot 1.05^n$.
$K_n = K_0 \cdot 1.05^n$ bildet eine geometrische Folge mit $q = 1.05$.

$K_{14} = K_0 \cdot q^{14} = 1.05^{14} \cdot 3000 \approx 1.98 \cdot 3000$, das Kapital hat sich fast verdoppelt.

Löst man die Verdopplungsgleichung $K_n = 2\,K_0$ nach n auf, erhält man
$K_n = K_0 \cdot q^n = 2\,K_0 \iff q^n = 2 \iff n \ln q = \ln 2 \iff n = \frac{\ln 2}{\ln q}$.
In unserem Beispiel ist $q = 1.05$ und man erhält $n = \frac{\ln 2}{\ln 1.05} \approx 14.21$.
Nach 15 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

Zum Rechnen mit Logarithmen siehe [**EM1**, Seite 88 ff].

Zinseszinsformel		$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot q^n}$	
K_0 :	Anfangskapital	K_n :	Kapital nach n Jahren
$p\%$:	Zinssatz pro Jahr	$q = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$:	Zinsfaktor

1.15 *Karl hat einen Infekt. Am ersten Tag vermehren sich die anfänglich vorhandenen 2000 Bakterien stündlich um 3%.*

(a) *Wieviele Bakterien sind nach 24 Stunden vorhanden?*

Nach 24 Stunden erhält er ein Antibiotikum, das sofort wirkt und die Bakterien um 40% pro Tag vermindert.

(b) *Wieviele Bakterien sind nach sieben Tagen vorhanden?*

(c) *Nach wievielen Tagen ist die Anzahl der Bakterien abgerundet 0, d.h. kleiner 0.5?*

(a) Das stündliche Wachstum um 3% bewirkt für die Anzahl der Bakterien eine geometrische Folge mit $q = 1 + 3\% = 1 + 0.03 = 1.03$.

Nach 24 Stunden beträgt die Anzahl der Bakterien $1.03^{24} \cdot 2000 \approx 4066$.

(b) Die tägliche Abnahme um 40% bewirkt für die Anzahl der Bakterien eine geometrische Folge mit $q = 1 - 40\% = 1 - 0.4 = 0.6$.

Nach 7 Tagen beträgt die Anzahl der Bakterien $0.6^7 \cdot 4066 \approx 114$.

(c) Gesucht ist nun das kleinste n mit $0.6^n \cdot 4066 < 0.5$.

Man logarithmiert die Gleichung $0.6^n \cdot 4066 = 0.5$ und erhält
$0.6^n \cdot 4066 = 0.5 \iff n \cdot \ln 0.6 + \ln 4066 = \ln 0.5 \iff n = \frac{\ln 0.5 - \ln 4066}{\ln 0.6} \approx 17.63$.
Nach 18 Tagen ist die Anzahl der Bakterien also abgerundet 0.

1.16 *Wieviel Geld hat Fritz nach 29 Monaten auf seinem Konto bei einem Startkapital von $S = K_0 = 100$ €, der monatlichen Rate $R = 35$ € und einem Jahreszins von 3% mit monatlicher Verzinsung ?*

Wie hoch ist der Zinsgewinn?

Bei monatlicher Verzinsung beträgt der monatliche Zinssatz $\frac{3}{12}\% = \frac{1}{4}\%$.
Es ist $S = 100$, $q = 1 + \frac{3}{12}\% = 1 + \frac{1}{4}\% = 1.0025$ und $R = 35$. Das Kapital beträgt
nach einem Monat $K_1 = Sq + R = 100q + 35$,
nach zwei Monaten $K_2 = Sq^2 + Rq + R = Sq^2 + R(q+1) = 100q^2 + 35(q+1)$,
nach n Monaten $K_n = Sq^n + R(q^{n-1} + \cdots + q + 1) = Sq^n + R\,\frac{q^n - 1}{q-1}$.

$\boxed{1 + q + \cdots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$ endliche geometrische Reihe [**EM1**, S. 32].

Damit ist $K_{29} = 100 \cdot 1.0025^{29} + 35 \cdot \frac{1.0025^{29} - 1}{0.0025} \approx 1158.85$.

Nach 29 Monaten beträgt der Kontostand 1158.85 € und
der Zinsgewinn $(1158.85 - 100 - 29 \cdot 35)$ € $= (1158.85 - 1115)$ € $= 43.85$ €.

1.3 Grenzwerte von Folgen

Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist einer der wichtigsten Begriffe der Mathematik. Wir beginnen mit einer anschaulichen Beschreibung des Grenzwerts, die exakte Definition erfolgt danach.

Anschauliche Grenzwertbeschreibung

Die reelle Zahl a ist **Grenzwert** der Folge (a_n), wenn auf der Zahlengeraden für alle genügend großen n die Folgenglieder a_n der Zahl a beliebig nahekommen, d.h. wenn für alle genügend großen n die Abstände $|a_n - a|$ von a_n und a beliebig klein sind.

Man sagt dafür auch: **(a_n) konvergiert gegen** oder **(a_n) geht gegen a**.

Schreibweisen: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$ oder kurz $\boxed{a_n \longrightarrow a}$

1.17 *Man untersuche anschaulich, ob die Folgen einen Grenzwert haben.*

(a) $a_n = 1$, (b) $a_n = n$, (c) $a_n = (-1)^n$, (d) $a_n = \frac{1}{n}$.

(a) $a_n = 1:$ Die konstante Folge $1, 1, 1, 1, \ldots$ hat den Grenzwert 1.
Alle Folgenglieder sind sogar $= 1$, also kommen sie erst recht für alle genügend großen n der Zahl 1 beliebig nahe.

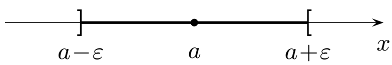
(b) $a_n = n:$ Die Folge der natürlichen Zahlen hat keinen Grenzwert.
Sie wächst über alle Grenzen und kann daher keiner Zahl a für alle genügend großen n beliebig nahe kommen.

(c) $a_n = (-1)^n:$ Die Folge ist zwar beschränkt, hat aber keinen Grenzwert.
Ihre Glieder sind abwechselnd 1 oder -1 und können daher keiner Zahl a für alle genügend großen n beliebig nahe kommen.

(d) $a_n = \frac{1}{n}:$ Die Folge hat den Grenzwert 0:
Wir geben uns einen beliebig kleinen Abstand $\varepsilon > 0$ vor. Dann ist der Abstand $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Also kommen die Glieder der Zahl 0 für alle genügend großen n beliebig nahe.

$|x - a|$ ist der **Abstand** von **x** und **a** auf der **Zahlengeraden**.

$$|x-a| < \varepsilon \iff x \in\,]a-\varepsilon\,,\, a+\varepsilon[\iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$



Offene Intervalle mit Mittelpunkt a haben die Form $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ für eine positive Zahl ε, siehe [**EM1**, Seite 92].
Sie enthalten alle x, die von a einen Abstand kleiner als ε haben.

Grenzwert einer Folge

Eine Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Schreibweisen: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$ oder $\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a}$ oder kurz $\boxed{a_n \longrightarrow a}$

Geometrische Formulierung:
a heißt **Grenzwert** der Folge (a_n), wenn es zu jedem Intervall $I =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ mit Mittelpunkt a einen Index n_0 gibt, von dem ab alle Folgenglieder a_n in I liegen.

Eine Folge heißt **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert hat, sonst heißt sie **divergent**. Eine Folge mit dem Grenzwert 0 nennt man **Nullfolge**.

Jede konvergente Folge ist beschränkt.
Es gibt aber beschränkte Folgen, die nicht konvergieren, siehe [1.18 (c)].

1.18 (a) *Ab welchem Index n_0 liegt $a_n = \frac{1}{n}$ im Intervall $\left]-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right[$?*
Warum hat die Folge den Grenzwert 0 ?

(b) *Ab welchem Indes n_0 liegt $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ im Intervall $\left]\frac{999}{1000}, \frac{1001}{1000}\right[$?*
Warum hat die Folge den Grenzwert 1?

(c) *Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränkt, hat aber keinen Grenzwert.*

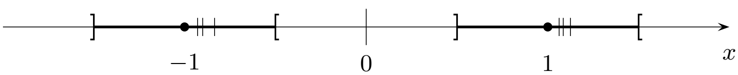
(a) $a_n \in \left]-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right[\iff |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{12} \iff 12 < n.$
Ab dem Index $n_0 = 13$ liegen die Folgenglieder a_n im angegebenen Intervall.
Wir zeigen nun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt:

$a_n \in]-\varepsilon, \varepsilon[\iff |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$
Ist $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle $n \geq n_0$ wie gewünscht $a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$

(b) $a_n \in \left]1 - \frac{1}{1000}, 1 + \frac{1}{1000}\right[\iff |a_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \iff n_0 := 1000 < n$.
Wir zeigen nun $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt:

$a_n \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\iff |a_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$
Ist $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle $n \geq n_0$ wie gewünscht $|a_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

(c) $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 2$, die Folge (a_n) ist also beschränkt.
Für $n \geq 3$ unterscheiden sich die Folgenglieder mit geradem Index um weniger als $\frac{1}{2}$ von 1 und die Folgenglieder mit ungeradem Index um weniger als $\frac{1}{2}$ von -1. Es gibt also kein Intervall z.B. der Länge 1, in dem ab einem n_0 alle Folgenglieder liegen. Die Folge hat also keinen Grenzwert.



Es gibt kein allgemeines Verfahren, Grenzwerte zu bestimmen.
Einige Methoden, Tricks und viele Beispiele findet man im Rest dieses Abschnitts.

1.19 *Bestimme ggf. den Grenzwert a der Folgen (a_n) und zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ einen passenden Index n_0, von dem ab der Abstand $|a_n - a| < \varepsilon$ ist:*

(a) $a_n = \frac{5}{3n}$, (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, (c) $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$,

(d) $a_n = \frac{2n^2}{n^2+1}$, (e) $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$, (f) $a_n = 1 + (-1)^n$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{3n} = 0$, d.h. (a_n) ist eine Nullfolge.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Gesucht ist $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| = \frac{5}{3n} < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Es gilt: $\frac{5}{3n} < \varepsilon \iff \frac{5}{3\varepsilon} < n$.
Wähle $n_0 > \frac{5}{3\varepsilon}$. Dann gilt $|0 - a_n| = \frac{5}{3n} \leq \frac{5}{3n_0} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$, d.h. (a_n) ist eine Nullfolge.
Im Unterschied zur Folge in (a) liegen die Glieder der Folge $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ abwechselnd rechts und links von 0, es handelt sich um eine alternierende Folge.
Der Abstand von a_n und 0 ist $|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gilt $|a_n - 0| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$.
Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ und $n \geq n_0$. Dann ist $n + 1 > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, also $|0 - a_n| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$:
Für genügend große n liegen die Glieder der Folge beliebig nahe bei 1, da $(\frac{1}{n^2})$ analog zu $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist. Also ist 1 Grenzwert der Folge.
Exakt: $|1 - a_n| = \left|1 - (1 - \frac{1}{n^2})\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$:
Es ist $\frac{2n^2}{n^2+1} = 2 - \frac{2}{n^2+1}$, und die Ausdrücke $\frac{2}{n^2+1}$ werden für genügend große n beliebig klein, also hat die Folge den Grenzwert 2.
Exakt: $|2 - a_n| = \frac{2}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$, denn $2n \leq n^2 + 1$, da $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$.
Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt $\varepsilon > \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{n} \geq |2 - a_n|$ für alle $n \geq n_0$.

(e) Die ersten Glieder der Folge sind $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, \frac{36}{13}, \frac{49}{15}$.
Es scheint also, dass die Glieder der Folge beliebig groß werden. Dies ist richtig.
Es ist $a_n = \frac{n^2}{2n+1} \geq \frac{n^2}{2n+n} = \frac{n}{3}$, und schon die Zahlen $\frac{n}{3}$ werden beliebig groß.
Die Folge (a_n) hat keinen Grenzwert, sie ist bestimmt divergent gegen ∞ (s.u.).

(f) Es ist $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, ...
Analog zur Folge $-1, 1, -1, 1, \ldots$, siehe [1.18 (c)], hat (a_n) keinen Grenzwert, ist aber beschränkt.

Die Folgen in [1.19 (a),(c),(d),(e)] sind sog. **rationale Folgen**. Ihre Grenzwerte kann man leicht ausrechnen. Siehe dazu [Seite 25].

Uneigentliche Grenzwerte, bestimmt divergente Folgen

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff$ Zu jeder Zahl S gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n \geq S$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff$ Zu jeder Zahl S gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n \leq S$.

In diesen Fällen nennt man die Folgen (a_n) **bestimmt divergent**, ∞ bzw. $-\infty$ heißt **uneigentlicher Grenzwert** von (a_n).

Man sagt, dass die Folge (a_n) für genügend große n **über alle Grenzen wächst** bzw. **unter alle Grenzen fällt**. Man schreibt

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \longrightarrow \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \longrightarrow -\infty$.

Beispiele:

(1) Die Folge (n^2), also $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$ wächst über alle Grenzen.
Es gilt $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$. Die Folge (n^2) ist bestimmt divergent gegen ∞.

(2) Die Folge (-2^n), also $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ \ldots$ fällt unter alle Grenzen.
Es gilt $\lim_{n\to\infty} (-2^n) = -\infty$. Die Folge (-2^n) ist bestimmt divergent gegen $-\infty$.

1.20 *Sind die Folgen (a_n) bestimmt divergent?*

(a) $a_n = 2^n$, (b) $a_n = (-1)^n$, (c) $a_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}$, (d) $a_n = 1 - \sqrt{n}$,
(e) $a_n = (-n)^n$, (f) $a_n = (n-1)^2$, (g) $a_n = \frac{2^n}{n^4}$, (h) $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n^4}$.

(a) Mit n wächst auch $2^n > n$ für genügend große n über alle Grenzen.
Also $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ bzw. $2^n \longrightarrow \infty$, d.h. die Folge (2^n) ist bestimmt divergent.

(b) $a_n = (-1)^n$: Nach [1.17 (c)] hat die alternierende Folge keinen Grenzwert, sie ist divergent. Da sie beschränkt ist, kann sie nicht bestimmt divergent sein.

(c) Es ist $a_n = \frac{n^2+n+1}{n+1} = n + \frac{1}{n+1} > n$.
Mit n wächst also auch a_n über alle Grenzen, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $a_n \longrightarrow \infty$.
Zu jedem S gibt es ein $n_0 \geq S$. Dann gilt $a_n > n \geq n_0 \geq S$ für alle $n \geq n_0$.

(d) $\sqrt{n}$ wächst ebenso wie n über alle Grenzen. Also fällt $1 - \sqrt{n}$ unter alle Grenzen, d.h. $\lim_{n\to\infty} 1 - \sqrt{n} = -\infty$, Die Folge $(1 - \sqrt{n})$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$.

(e) Die alternierende Folge $a_n = (-n)^n$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent. Ihr Betrag $|a_n| = n^n$ wächst über alle Grenzen. Wegen des wechselnden Vorzeichens kann $a_n = (-n)^n$ nicht bestimmt gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergieren.

(f) $a_n = (n-1)^2 \longrightarrow \infty$: Die Folge ist bestimmt divergent gegen ∞.

(g) $a_n = \frac{2^n}{n^4}$: $a_n > 0$ und der Kehrwert $\frac{n^4}{2^n} \longrightarrow 0$ [Seite 23], also $\frac{2^n}{n^4} \longrightarrow \infty$.

(h) $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n^4}$: Diese Folge divergiert, ist aber nicht bestimmt divergent.
Nach (g) gehen die Glieder mit geradem Index gegen ∞ und die Glieder mit ungeradem Index gegen $-\infty$.

1.4 Bestimmung von Grenzwerten

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^r} = 0$ für $r > 0,\ c$ fest
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ für $\lvert a\rvert < 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot n^k = 0$ für $\lvert a\rvert < 1,\ k \in \mathbb{N}$ fest
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ für $\lvert a\rvert > 1,\ k \in \mathbb{N}$ fest
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2.718$

Es gibt kein allgemeines Verfahren, Grenzwerte zu bestimmen.
Häufig versucht man, unbekannte Grenzwerte auf bekannte zurückzuführen.
Im Folgenden findet man einige dafür nützliche Rechenregeln und Verfahren.

Rechenregeln für Grenzwerte

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b\end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b \\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} \quad \text{für } b_n \neq 0\ ,\ b \neq 0 \\ a_n \leq b_n \text{ für } n \geq n_0 \Longrightarrow a \leq b \end{array}\right.$$

1.21 *Man bestimme ggf. den Grenzwert der Folgen* (a_n)*:*

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, (b) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n}$, (c) $a_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$, (d) $a_n = \frac{3^n+2^n}{1-3^n}$,
(e) $a_n = \sqrt[n]{\mathrm{e}}$, (f) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$, (g) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, (h) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0$.

(b) Man klammert die höchsten Potenzen von n aus, kürzt und erhält:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{2+0}{1+0} = 0.$$

(c) Ist $\lvert a\rvert < 1$, so gilt $a^n \longrightarrow 0$. Also $\left(-\frac{4}{5}\right)^n \longrightarrow 0$.

(d) Es gilt $a_n = \frac{3^n+2^n}{1-3^n} = \frac{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)}{3^n(\frac{1}{3^n}-1)} = \frac{1+(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3^n}-1} \longrightarrow \frac{1+0}{0-1} = -1$.

(e) Ist $a > 0$, so gilt $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$. Also $\sqrt[n]{\mathrm{e}} \longrightarrow 1$.

(f) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, also $\sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1^2 = 1$.

(g) $\frac{n^k}{a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für $\lvert a\rvert > 1$, $k \in \mathbb{N}$ fest, also $\frac{n^2}{2^n} \longrightarrow 0$.

(h) Es gilt $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{e} \cdot (1+0) = \mathrm{e}$.

Die oben angegebenen Rechenregeln gelten unter den folgenden Vereinbarungen auch für uneigentliche Grenzwerte.

Rechnen mit $\pm\infty$

∞ und $-\infty$ sind keine Zahlen, man kann mit ihnen nicht wie üblich rechnen. Es ist aber bequem, $-\infty < a < \infty$ für $a \in \mathbb{R}$ zu vereinbaren, sowie:

$$\begin{aligned}
a + \infty &= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{R}\\
a - \infty &= -\infty \quad \text{für } a \in \mathbb{R}\\
\infty + \infty &= \infty\\
\infty \cdot \infty &= \infty\\
\frac{1}{\infty} &= 0\\
a \cdot \infty &= \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0\\ -\infty & \text{für } a < 0\end{cases}
\end{aligned}$$

$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ \ldots$

werden **nicht definiert**!

Diese sog. *unbestimmten Ausdrücke* werden auf [S. 158] und in [**HM**] behandelt.

1.22 *Man bestimme den eventuell uneigentlichen Grenzwert der Folgen (a_n):*

(a) $\left(n + \frac{1}{n}\right)n^{-1/2}$, (b) $\frac{n+2^n}{1-n}$, (c) $\frac{n+\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}}$,

(d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (e) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$, (f) $\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3}$.

Hinweis für die letzten drei Aufgaben: Erweitere mit $\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}$.

$$\boxed{\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$$

(a) Es gilt $\left(n + \frac{1}{n}\right)n^{-1/2} = \sqrt{n} + \frac{1}{n^{3/2}} \longrightarrow \infty + 0 = \infty$.

(b) Aus $\frac{n^k}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, siehe [Kasten Seite 23], folgt $\frac{2^n}{n} \longrightarrow \infty$. Damit ergibt sich

$$\frac{n+2^n}{1-n} = \frac{n(1+\frac{2^n}{n})}{n(\frac{1}{n}-1)} = \frac{1+\frac{2^n}{n}}{\frac{1}{n}-1} \longrightarrow (-1)\cdot\infty = -\infty.$$

(c) Aus $\frac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\mathrm{e}^n}{n} \longrightarrow \infty$, vgl. (b), folgt $\frac{n+\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} + \frac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}} \longrightarrow \infty + \infty = \infty$.

Die Aufgaben (d) - (f) zeigen, dass $\infty - \infty$ nicht sinnvoll definiert werden kann.

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

(e) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^2+n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$

(f) $\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3} = \frac{(n^3+n^2)-n^3}{\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/2}}{\sqrt{1+n^{-1}}+1} \longrightarrow \infty.$

Grenzwerte rationaler Folgen

Rationale Folgen besitzen stets einen (evtl. uneigentlichen) Grenzwert.
Für $a \neq 0, b \neq 0$ und $k, l \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{a}\, n^k + \cdots + a_1 n + a_0}{\boldsymbol{b}\, n^l + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} & \text{für } k = l \text{ , d.h. Zählergrad = Nennergrad} \\ 0 & \text{für } k < l \text{ , d.h. Zählergrad < Nennergrad} \\ \pm\infty & \text{für } k > l \text{ , d.h. Zählergrad > Nennergrad} \end{cases}$$

∞ oder $-\infty$ je nach Vorzeichen von $\frac{a}{b}$

1.23 *Man bestimme den Grenzwert der Folgen* (a_n) *:*

(a) $a_n = \frac{2n^2+5}{-3n^2+n+1}$, (b) $a_n = \frac{(2n-1)^2}{n-2n^2}$, (c) $a_n = \frac{2n(n-1)^2}{(2n+1)^3}$,

(d) $a_n = \frac{n(n-2)^2}{(n^2+1)^2}$, (e) $a_n = \frac{(2n-1)^3}{3n^2+2n}$, (f) $a_n = \frac{(3-2n)^3}{(2n+1)^2}$.

Das obige Kochrezept liefert die Grenzwerte. Wir geben ausführlichere Lösungen an, bei denen die höchsten Potenzen von n ausgeklammert werden.
Diese Methode zeigt einmal, wie man das Kochrezept beweist, zum anderen ist sie auch in vielen anderen Situationen nützlich.

(a) $\frac{2n^2+5}{-3n^2+n+1} = \frac{n^2(2+\frac{5}{n^2})}{n^2(-3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{2+\frac{5}{n^2}}{-3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{2+0}{-3+0+0} = -\frac{2}{3}.$

(b) $\frac{(2n-1)^2}{n-2n^2} = \frac{4n^2-4n+1}{n-2n^2} = \frac{n^2(4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(\frac{1}{n}-2)} = \frac{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}-2} \longrightarrow \frac{4}{-2} = -2.$

(c) $\frac{2n(n-1)^2}{(2n+1)^3} = \frac{2n^3+\ldots}{8n^3+\ldots} \longrightarrow \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$ (d) $\frac{n(n-2)^2}{(n^2+1)^2} = \frac{n^3+\ldots}{n^4+\ldots} \longrightarrow 0.$

(e) $\frac{(2n-1)^3}{3n^2+2n} = \frac{8n^3+\ldots}{3n^2+\ldots} \longrightarrow \infty.$ (f) $\frac{(3-2n)^3}{(2n+1)^2} = \frac{-8n^3+\ldots}{4n^2+\ldots} \longrightarrow -\infty.$

1.24 *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$. *Man bestimme den Grenzwert der Folgen* (a_n) *:*

(a) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$, (b) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$, (c) $a_n = (1-\frac{1}{n})^n$.

(a) $(1+\frac{1}{n})^{2n} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 \longrightarrow \mathrm{e}^2.$

(b) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$: Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} \approx 2.7$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $(1+\frac{1}{n})^n > 2$ für alle $n \geq n_0$.
Damit folgt $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^n > 2^n$ für $n \geq n_0$.
Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, die Folge ist bestimmt divergent.

(c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$. Man formt um und erhält:

$$\begin{aligned}(1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1} &= (\tfrac{n}{n+1})^{n+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$