Gerhard Merziger · Günter Mühlbach
Detlef Wille · Thomas Wirth

Formeln + Hilfen
Höhere Mathematik

$-e^{i\pi}$

$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x$

1

$\cos^2 x + \sin^2 x$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$

8. Auflage

HANSER

FORMELSAMMLUNG

Trigonometrische Funktionen

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

doppelter Winkel

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

halber Winkel

$$\cos\frac{x}{2} =^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$$
$$\sin\frac{x}{2} =^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} =^* \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
$$\cot\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} =^* \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Symmetrie

$\cos(-x) = \cos x$		gerade Funktion
$\sin(-x) = -\sin x$		ungerade Funktion
$\tan(-x) = -\tan x$		ungerade Funktion
$\cot(-x) = -\cot x$		ungerade Funktion

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad \sin x =^* \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos x =^* \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$
$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} \pm x) \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$$

* Vorzeichen je nach Quadranten!

Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$
$$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$$

$\cosh 0 = 1,\ \sinh 0 = 0,\ \tanh 0 = 0$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$\cosh(-x) = \cosh x$ | $\sinh(-x) = -\sinh x$ | $\tanh(-x) = -\tanh x$ | $\coth(-x) = -\coth x$

Additionstheoreme

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$
$$\sinh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}\ , \quad \text{für } \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}\,)\ , \quad \text{für } x \geq 1$$

Überlagerung von Schwingungen

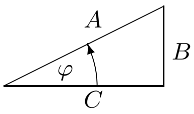
$$\boxed{A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \quad \text{(Quadranten beachten!)}$$

Spezialfall: $\boxed{B\cos\omega t + C \sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi)}$

$$B = A\sin\varphi \qquad C = A\cos\varphi$$



$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \qquad \tan\varphi = \frac{B}{C} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

Quadratische Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

allgemeine Binomialkoeffizienten

$r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, 3\ldots$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

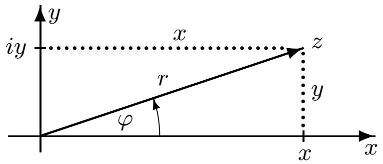
$$\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1, \quad \binom{r}{1} = r$$

Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad dF = r\,dr\,d\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$



Rechnen mit **Potenzen** und **Logarithmen**

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

a^{x+y}	$=$	$a^x a^y$	$\log_a xy$	$=$	$\log_a x + \log_a y$
a^{-x}	$=$	$\frac{1}{a^x}$	$\log_a \frac{1}{x}$	$=$	$-\log_a x$
a^0	$=$	1	$\log_a 1$	$=$	0
$(a^x)^r$	$=$	a^{xr}	$\log_a x^r$	$=$	$r\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

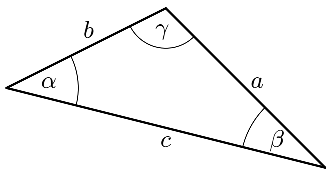
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{speziell:} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ falls } \gamma = 90^0$$

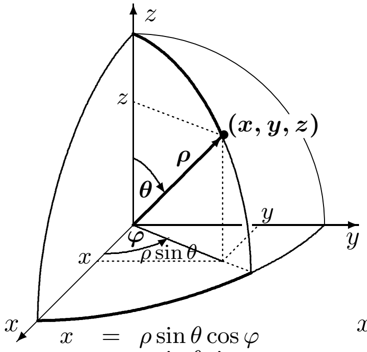


Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kugelkoordinaten

θ : Polabstand

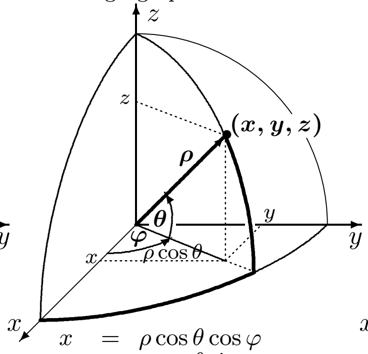


$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad z = \rho\cos\theta$$

$$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Kugelkoordinaten

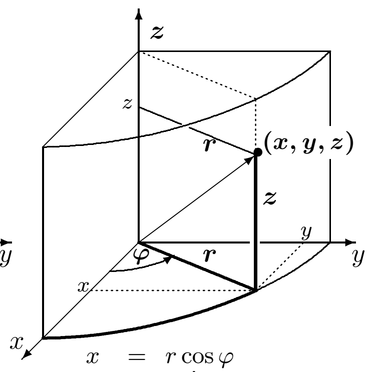
θ : geographische Breite



$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi \qquad y = \rho\cos\theta\sin\varphi \qquad z = \rho\sin\theta$$

$$dV = \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Zylinderkoordinaten



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z$$

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Potenzreihen

e^x	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$	$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \cdots$	für	$\|x\| \leq 1$
$\ln(1+x)$	$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots$	für	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$	$= -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots)$	für	$-1 \leq x < 1$
$\sqrt{1+x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$	$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots$	für	$\|x\| \leq 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots$	für	$\|x\| < 1$

endliche geom. Reihe	$\sum_{n=0}^{k} x^n$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$	$= \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$	für $x \neq 1$
geometrische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$= \frac{1}{1-x}$	für $\|x\| < 1$
harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$	$= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$	konvergent $\iff$	$x > 1$
binomische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$	$= 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots$	$= (1+x)^r,$	$\|x\| \leq 1,\ r > 0$; $\|x\| < 1,\ r < 0$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$	$= \infty$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$	$= \ln 2$
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$	$= e$
$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots$	$= \frac{1}{e}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$	$= 2$
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$	$= \frac{\pi}{4}$
$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$	$= \frac{\pi^2}{6}$
$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots$	$= \frac{\pi^2}{12}$
$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$	$= \frac{\pi^2}{8}$

wichtige Grenzwerte
$(n \to \infty, \quad a > 0)$

$\sqrt[n]{a}$	$\to 1$	$(\frac{n+1}{n})^n$	$\to e$	$\binom{a}{n}$	$\to 0, \quad a > -1$
$\sqrt[n]{n}$	$\to 1$	$(1 + \frac{1}{n})^n$	$\to e$	$\frac{a^n}{n!}$	$\to 0$
$\sqrt[n]{n!}$	$\to \infty$	$(1 - \frac{1}{n})^n$	$\to e^{-1}$	$\frac{n^n}{n!}$	$\to \infty$
$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$	$\to e$	$(1 + \frac{x}{n})^n$	$\to e^x$	$\frac{a^n}{n^k}$	$\to \infty \quad \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$	$\to \frac{1}{e}$	$(1 - \frac{x}{n})^n$	$\to e^{-x}$	$a^n n^k$	$\to 0 \quad \begin{cases} \|a\| < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
				$n(\sqrt[n]{a} - 1)$	$\to \ln a, \ a > 0$

Differentiations– und Integrationsregeln

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

partielle Integration: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Vektorfunktionen

$$(\lambda\vec{u})' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}'$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})' = \vec{u}'\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v}'$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})' = \vec{u}'\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}'$$

$$(\vec{u}(\lambda(t)))' = \vec{u}'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)$$

Kettenregel: $\big(y(x(t))\big)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y'(x(t))\cdot x'(t)$

Substitutionsregel: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$, dabei ist $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert > 1$
$\int g\,dx$	g

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int x\ln x\,dx = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta = 4ac - b^2$

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right| & \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| < \sqrt{-\Delta} & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arcoth}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| > \sqrt{-\Delta} & \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

$\Delta = 4ac - b^2$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

F O R M E L N + H I L F E N

HÖHERE MATHEMATIK

8. Auflage

Binomi Verlag	**Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**	
	Internet	**www.binomi.de**
	E–Mail	**verlag@binomi.de**
	Telefon	**05105 6624000**

Druck QUBUS media GmbH, www.qubus.media

Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel

ISBN 978–3–923 923–86–1

Hannover 1/21

FORMELN + HILFEN
HÖHERE MATHEMATIK

Gerhard Merziger
Günter Mühlbach
Detlef Wille
Thomas Wirth

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

a	j	s
b	k	t
c	l	u
d	m	v
e	n	w
f	o	x
g	p	y
h	q	z
i	r	

Vorwort

Diese beliebte Formelsammlung enthält die wichtigen Formeln zur Höheren Mathematik. Zahlreiche Beispiele erleichtern das Verständnis und sind so eine wesentliche **Hilfe** beim:

- **Anfertigen von Übungen**
- **Bewältigen von Klausuren**
- **Vorbereiten auf Prüfungen**

Die Seiten von **FORMELN + HILFEN** sind kompakt gestaltet. Wir haben uns bemüht, auf jeder Seite möglichst viele Informationen unterzubringen. Wesentliche Zusammenhänge werden optisch herausgestellt und durch zahlreiche **Beispiele** und **Skizzen** verdeutlicht.

Ein besonderes Problem bei Formelsammlungen ist das schnelle Auffinden des Gesuchten. Neben der **Griffleiste** wird vor allem der ausführlich angelegte **Index** nützlich sein.

Häufig benötigte Formeln stehen auch auf den Seiten **F1** vorne und **F2, F3, F4** hinten.

Natürlich können wir bei aller verwendeten Sorgfalt Fehler nicht ausschließen. Für etwaige Hinweise und Anregungen sind wir dankbar. **Fehlerverzeichnis** auf **www.binomi.de**

Wir sind überzeugt, dass **F+H** ein nützlicher und hilfreicher Begleiter auch über Ihr Studium hinaus ist.

F+H ist als Übersetzung auch in **Japan** erhältlich (ISBN 978-4-254-11138-5).

Die Verfasser

Zitierte Literatur:

HM	*Merziger/Wirth*	**Repetitorium Höhere Mathematik**
EM	*Merziger/Holz* *Timmann/Wille*	**Repetitorium Elementare Mathematik 1, 2**
LA	*Holz/Wille*	**Repetitorium Lineare Algebra 1, 2**
ANA	*Timmann*	**Repetitorium Analysis 1, 2**
DGL	*Timmann*	**Repetitorium gewöhnliche Differentialgleichungen**
FU	*Timmann*	**Repetitorium Funktionentheorie**
TOP	*Timmann*	**Repetitorium Topologie und Funktionalanalysis**
NU	*Feldmann*	**Repetitorium Numerische Mathematik**
STO	*Mühlbach*	**Repetitorium Stochastik**

Probeseiten auf **www.binomi.de**

1 Arithmetik und Algebra

1.1 Reelle Zahlen

Potenzen, Wurzeln

Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}$ gelten (falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind, z.B. ist $\sqrt{x}$ in $\mathbb{R}$ nur für $x \geq 0$ definiert) folgende Regeln ($x^0 = 1$ für $x \neq 0$):

	Zahlenbeispiele		Zahlenbeispiele
$x^u \cdot x^v = x^{u+v}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$	$(x^u)^v = x^{u \cdot v}$	$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6$
$\frac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$	$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2$	$\sqrt[v]{x} = x^{1/v}$	$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 9^{1/2} = 3$
$x^{-v} = \frac{1}{x^v}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\sqrt[v]{x^u} = x^{u/v}$	$\sqrt[2]{3^6} = 3^{6/2} = 3^3$
$(xy)^u = x^u y^u$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$	$\sqrt[v]{xy} = \sqrt[v]{x}\,\sqrt[v]{y}$	$\sqrt[3]{8\pi} = 2\sqrt[3]{\pi}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^u = \frac{x^u}{y^u}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{9}{4}$	$\sqrt[v]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[v]{x}}{\sqrt[v]{y}}$	$\sqrt[3]{\frac{9}{8}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{3}}$

Es ist $\quad 2^{2^3} := 2^{(2^3)} = 2^8 = 256, \quad$ aber $\quad (2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64.$

Logarithmen

a: allgemeine Basis, mit $0 < a \neq 1$. $\qquad \log_a x$ ist def. für $x > 0$.

$\mathrm{e} = 2,718281\ldots$: Basis der natürl. Logarithmen. $\qquad \ln x := \log_{\mathrm{e}} x$, für $x > 0$.

$$\boxed{b = \log_a c \iff a^b = c} \qquad \boxed{a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} \log_a x^r &= r \log_a x \\ \log_a \sqrt[r]{x} &= \frac{1}{r} \log_a x \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \\ \mathrm{e}^{\ln x} &= x \end{aligned}\ , \text{ für } x > 0}$$

$$\boxed{\log_a a = \ln \mathrm{e} = 1 \;\Big|\; \log_a 1 = \ln 1 = 0 \;\Big|\; \log_a \frac{1}{a} = \ln \frac{1}{\mathrm{e}} = -1 \;\Big|\; \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x}$$

Logarithmen zu verschiedenen Basen

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \qquad \text{speziell:} \qquad \boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

Fakultät $n!$

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n bezeichnet man mit $\boldsymbol{n!}$
Lies: ***n*–Fakultät**. Aus Zweckmäßigkeitsgründen setzt man zusätzlich $\mathbf{0! = 1}$.

n–Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$
$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$
$$0! = 1$$

Beispiele

$0! =$	1	$5! =$	120
$1! =$	1	$6! =$	720
$2! =$	2	$7! =$	5 040
$3! =$	6	$8! =$	40 320
$4! =$	24	$9! =$	362 880

Stirlingsche Formel
zur näherungsweisen Berechnung von $n!$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$
$$9! \approx 359\,537$$

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

Die als Faktoren der Potenzen des Binoms $(a+b)$ auftretenden Koeffizienten heißen **Binomialkoeffizienten**. Man schreibt für sie: $\binom{n}{k}$, lies: "n **über** k".

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $k = 0, \ldots, n$ ist

n über k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$
$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

z.B.:
$$\begin{cases} \binom{4}{0} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1 \\ \binom{4}{1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \\ \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \\ \binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \\ \binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1 \\ \binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} \\ \quad = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816 \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$
$$\mathbf{6 + 4 = 10}$$

Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \binom{5}{2}$$

Symmetrie des Pascalschen Dreiecks

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Zeilensumme des Pascalschen Dreiecks

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$$
$$1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

alternierende Zeilensumme des Pascalschen Dreiecks

Pascalsches Dreieck zur Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

Jede Zahl ist Summe der zwei links und rechts über ihr stehenden Zahlen.
z.B.: $6 + 4 = 10$

n	**Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$	Zeilen-Summe
0	1	$2^0 = 1$
1	1 1	$2^1 = 2$
2	1 2 1	$2^2 = 4$
3	1 3 3 1	$2^3 = 8$
4	1 4 **6** + **4** 1	$2^4 = 16$
5	1 5 10 **10** 5 1	$2^5 = 32$
6	1 6 15 20 15 6 1	$2^6 = 64$
	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	
	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$	$2^6 = \sum\limits_{k=0}^{6} \binom{6}{k}$

binomische Formel $\quad \boldsymbol{(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n \in \mathbb{N}}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 \\
\cdots & \quad \cdots \\
(a+b)^6 &= \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b^1 + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \binom{6}{6} b^6 \\
&= 1\,a^6 + 6\,a^5 b + 15\,a^4 b^2 + 20\,a^3 b^3 + 15\,a^2 b^4 + 6\,ab^5 + 1\,b^6
\end{aligned}$$

Speziell:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^k + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\
(1+x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\
(1+x)^4 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \\
(1+x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \\
(1+x)^6 &= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}}$$

Ersetzt man x durch $-x$, so alternieren die Vorzeichen, z.B.:

$$(1-x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc
\end{aligned}$$

$\binom{r}{k}$ – zunächst nur für $r \in \mathbb{N}$ erklärt – wird folgendermaßen für alle $r \in \mathbb{R}$ definiert:

allgemeine Binomialkoeffizienten $\binom{r}{k}$

Für $r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, \ldots$ ist

r über k

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

$$\binom{r}{0} = 1 \qquad \binom{r}{1} = r$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}$$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

z.B.:

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$$

$$\binom{1.4}{3} = \frac{1.4\cdot0.4\cdot(-0.6)}{3!} = -0.056$$

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{3!} = -4$$

$$\binom{\pi}{2} = \frac{\pi\cdot(\pi-1)}{2!} \approx 3.364$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2!} = \frac{3}{8}$$

allgemeine binomische Formel, binomische Reihe

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1\\ &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{1\cdot2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

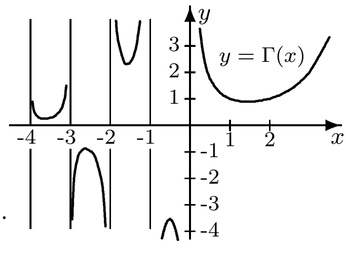
$$\frac{1}{1+x} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + - \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \cdots\\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots \qquad \text{für } |x| < 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}x^k = \binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}x + \binom{-1/2}{2}x^2 + \binom{-1/2}{3}x^3 + \cdots\\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1\end{aligned}$$

Siehe auch **Potenzreihen**, Seiten 79–83 und **geometrische Reihe**, Seite 80

Γ–Funktion $\Gamma(x)$



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt &, \ x > 0\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}, & x \neq 0, -1, -2, \cdots \text{ (Polstellen)}\end{cases}$$

Eigenschaften:

$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad , x \in \mathbb{R}$

$\Gamma(n) = (n-1)! \quad , n \in \mathbb{N}$

$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

$\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Rechnen mit Ungleichungen

$$a < b \Longrightarrow \begin{cases} a + c \;<\; b + c \,, & \text{für alle } c \in \mathbb{R} \\ a \cdot c \;\lessgtr\; b \cdot c \,, & \text{für } c \gtrless 0 \\ \dfrac{1}{a} \;\gtrless\; \dfrac{1}{b} \,, & \text{für } ab \gtrless 0 \end{cases}$$

Addition einer Zahl

Multiplikation mit $\begin{matrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{matrix}$ Zahl

Kehrwert: a, b $\begin{matrix}\text{gleiches}\\\text{ungleiches}\end{matrix}$ Vorzeichen

$$\begin{aligned} a < b \,,\; c < d \quad &\Longrightarrow a + c < b + d \\ 0 < a < b \,,\; 0 < c < d &\Longrightarrow a \cdot c < b \cdot d \end{aligned}$$

Addition / Multiplikation gleichgerichteter Ungleichungen

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad 0 \le a < b \begin{matrix} \Longrightarrow & a^n < b^n \\ \Longrightarrow & \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{matrix}$

Monotonie von $\begin{matrix}\text{Potenz}\\\text{Wurzel}\end{matrix}$

Diese Regeln gelten auch, wenn "$<$" durch "$\le$" ersetzt wird!

Wichtige Ungleichungen

harmonisches $\le$ geometrisches $\le$ arithmetisches Mittel

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}}_{\text{harmon. Mittel}} \;\le\; \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\text{geometr. Mittel}} \;\le\; \underbrace{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}_{\text{arithm. Mittel}} \,, \quad x_i > 0$$

speziell für $a, b > 0$:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \;\le\; \sqrt{ab} \;\le\; \frac{a+b}{2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ bzw. $a = b$ ist.

Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \ge 1 + nx \,, \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\; x \ge -2$$

Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 \;\le\; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \,, \quad \text{für } x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 &\le \vec{x}^2 \cdot \vec{y}^{\,2} \,, \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ |\vec{x} \cdot \vec{y}| &\le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \end{aligned}$$

Minkowskische Ungleichung

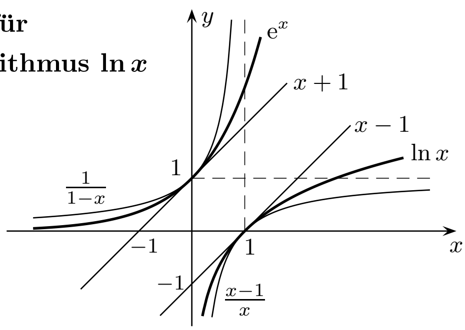
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \;\le\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \,, \quad \text{für } x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

$$\big|\,|\vec{x}| - |\vec{y}|\,\big| \le |\boldsymbol{\vec{x}} \pm \boldsymbol{\vec{y}}\,| \le |\boldsymbol{\vec{x}}| + |\boldsymbol{\vec{y}}\,| \quad \textbf{Dreiecksungleich.,}\; \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Wichtige Ungleichungen für Exponentialfunktion $\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}$ und Logarithmus $\ln \boldsymbol{x}$

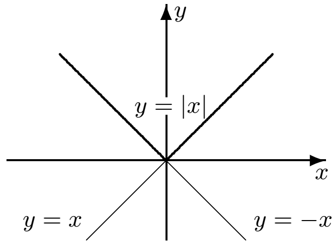
$$x + 1 \;\le\; \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} \;\le\; \frac{1}{1-x} \,, \quad \text{für } x < 1,$$

$$\frac{x-1}{x} \;\le\; \ln \boldsymbol{x} \;\le\; x - 1 \,, \quad \text{für } x > 0.$$



Betrag

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, für } x \geq 0 \\ -x & \text{, für } x < 0 \end{cases}$$



$|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ und $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für $y \neq 0$.

$\big||x| - |y|\big| \;\leq\; |x \pm y| \;\leq\; |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

$|x|$ ist der **Abstand** der Zahl x vom Nullpunkt und
$|x - a|$ ist der **Abstand** der Zahl x von der Zahl a.

quadratische Gleichung

p, q–Formel

$$x^2 + px + q = 0 \iff x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Diskriminante: $D = \frac{p^2}{4} - q$

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Die quadratische Gleichung

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

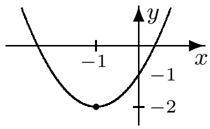
hat

Parabel $y = x^2 + px + q$

Beispiele

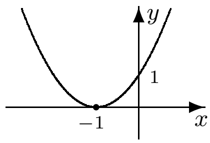
zwei verschiedene Lösungen $\iff D > 0$

$x^2 + 2x - 1 = 0$
$D = 2 > 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$



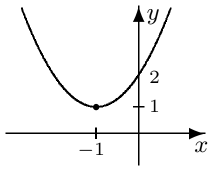
eine doppelte Lösung $\iff D = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$
$D = 0$
$x_{1,2} = -1$



keine (reelle) Lösung
zwei konjugiert komplexe Lösungen $\iff D < 0$

$x^2 + 2x + 2 = 0$
$D = -1 < 0$
$x_{1,2} = -1 \pm i$



Sind x_1, x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

$$\boxed{x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2}$$

Vietascher Wurzelsatz:
$x_1 + x_2 = -p$ = **Summe** der Nullstellen
$x_1 \cdot x_2 = q$ = **Produkt** der Nullstellen

Heronsches Wurzelziehen: Näherungsweise Berechnung von $\sqrt{a}$ für $a > 0$:

Die rekursive Folge $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$ konvergiert gegen $\sqrt{a}$.

Allgemein: $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right)$ konvergiert gegen $\sqrt[k]{a}$.

kubische Gleichung

$$\boxed{x^3 + ax^2 + bx + c = 0} \quad \textbf{Normalform}$$

Subst.: $x = y - \frac{a}{3}$ ergibt $\boxed{y^3 + py + q = 0}$ **reduzierte Form**

dabei ist $p = \dfrac{3b - a^2}{3}$ und $q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c.$

Diskriminante:

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

	Lösungen der kubischen Gleichung
$D > 0$	eine reelle, zwei konjugiert komplexe Lösungen
$D = 0$	drei reelle Lösungen, mindest. zwei gleiche Lösungen
$D < 0$	drei paarweise verschiedene reelle Lösungen

Cardanosche Formeln : Man berechnet (u reell wählen, falls möglich!)

$$u := \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{D}}$$

$$v := -\frac{p}{3u} \quad (v = 0 \text{ , falls } u = 0)$$

, setzt $\varrho_{1,2} := -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\; i$ und erhält die

Lösungen der reduzierten Form:

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v)\sqrt{3}\; i = \varrho_1 u + \varrho_2 v \\ y_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v)\sqrt{3}\; i = \varrho_2 u + \varrho_1 v \end{cases}$$

Die Lösungen der **Normalform** sind dann ($k = 1, 2, 3$): $\boxed{x_k = y_k - \frac{a}{3}}$

Ist $D < 0$, so hat die kubische Gleichung drei reelle Lösungen. Benutzt man obige Formeln, muß man komplex rechnen, da $\sqrt{D}$ nicht reell ist. Dies läßt sich wie folgt vermeiden:

Man berechnet (falls $D < 0$) (siehe Beispiel 2)

$$r := \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \cos\varphi := -\frac{q}{2r}$$

und erhält:

$$\begin{cases} y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3} \\ y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Die Lösungen der **Normalform** sind wieder ($k = 1, 2, 3$): $\boxed{x_k = y_k - \frac{a}{3}}$

Beispiel 1 *Man löse die kubische Gleichung* $3x^3 + 16.3594x^2 + 82.9241x - 1.2997 = 0.$

$x^3 + 5.4531x^2 + 27.6414x - 0.4332 = 0$ Normalform, Subst.: $x = y - \frac{5.4531}{3}$

$y^3 + 17.7292y - 38.6655 = 0$ reduzierte Form

Diskriminante $D = 580.1516 > 0$ (also 1 reelle, 2 konjugiert komplexe Lösungen)

$$\begin{aligned} u &= 3.5147 \\ v &= -1.6814 \end{aligned} \implies \begin{aligned} y_1 &= 1.8333 \\ y_2 &= -0.9167 - 4.5i \\ y_3 &= -0.9167 + 4.5i \end{aligned} \implies \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0.0156 \\ x_2 &= -2.7344 - 4.5i \\ x_3 &= -2.7344 + 4.5i \end{aligned}}$$

Beispiel 2 *Man löse die kubische Gleichung* $18x^3 + 9x^2 - 17x + 4 = 0.$

$x^3 + 0.5x^2 - 0.9444x + 0.2222 = 0$ Normalform, Subst.: $x = y - \frac{0.5}{3} = y - 0.1667$

$y^3 - 1.0278y + 0.3889 = 0$ reduzierte Form

Diskriminante $D = -0.0024 < 0$ (also drei verschiedene reelle Lös.) reelle Rechnung:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{-\left(\tfrac{p}{3}\right)^3} &&= 0.2005 \\ \cos\varphi &= -\frac{q}{2r} &&= -0.9697 \\ \varphi &= \arccos\left(-\frac{q}{2r}\right) &&= 2.8947 \end{aligned} \implies \begin{aligned} y_1 &= 0.6667 \\ y_2 &= -1.1667 \\ y_3 &= 0.5 \end{aligned} \implies \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0.5 &&= 1/2 \\ x_2 &= -1.3333 &&= -4/3 \\ x_3 &= 0.3333 &&= 1/3 \end{aligned}}$$

Gleichung vierten Grades

$$\boxed{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \quad \textbf{Normalform}$$

Subst.: $x = y - \frac{a}{4}$ $\quad \boxed{y^4 + py^2 + qy + r = 0} \quad$ **reduzierte Form**

$$\boxed{z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0} \quad \textbf{kubische Resolvente}$$

dabei ist $p = b - \frac{3}{8}a^2, \quad q = c - \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{8}, \quad r = d - \frac{ac}{4} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{3a^4}{256}.$

Das Lösungsverhalten der Gleichung vierten Grades hängt vom Lösungsverhalten ihrer *kubischen Resolventen* ab, deren Lösungen man zunächst berechnet (siehe kubische Gleichung, Seite 12):

kubische Resolvente	Gleichung vierten Grades
alle Lösungen reell und positiv*)	vier reelle Lösungen
alle Lösungen reell, eine positiv, zwei negativ*)	zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen
eine Lösung reell, zwei konjugiert komplex	zwei reelle, zwei konj. komplexe Lösungen

Sind z_1, z_2, z_3 die Lösungen der kubischen Resolvente (Seite 12), berechnet man

w_1 als *eine* Lösung von $w^2 = z_1$

w_2 als *eine* Lösung von $w^2 = z_2$ und setzt

$w_3 = -\frac{q}{w_1 \cdot w_2}$ $\left(\begin{array}{l} \text{dann ist } w_3 \text{ eine Lösung von } w^2 = z_3. \\ w_3 = 0, \text{ falls } w_1 \cdot w_2 = 0. \end{array} \right)$

Die Lösungen der reduzierten Form erhält man dann in der Form:
$$\begin{cases} y_1 = (+w_1 + w_2 + w_3)/2 \\ y_2 = (+w_1 - w_2 - w_3)/2 \\ y_3 = (-w_1 + w_2 - w_3)/2 \\ y_4 = (-w_1 - w_2 + w_3)/2 \end{cases}$$

Die Lösungen der **Normalform** sind dann für $k = 1, 2, 3, 4$: $\boxed{x_k = y_k - \frac{a}{4}}$

Beispiel *Man löse die Gleichung vierten Grades* $4x^4 + 15x^3 + 32x^2 + 31x - 10 = 0.$

$x^4 + 3.75x^3 + 8x^2 + 7.75x - 2.5 = 0$ Normalform, Subst.: $x = y - \frac{3.75}{4} = y - 0.9375$

$y^4 + 2.7266y^2 - 0.6582y - 5.0518 = 0$ reduzierte Form

$z^3 + 5.4531z^2 + 27.6414z - 0.4332 = 0$ kubische Resolvente, (siehe vorige Seite!)

$$\begin{array}{l} z_1 = 0.0156 \\ z_2 = -2.7344 - 4.5i \\ z_3 = -2.7344 + 4.5i \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} w_1 = 0.125 \\ w_2 = -1.125 + 2i \\ w_3 = -1.125 - 2i \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} y_1 = -1.0625 \\ y_2 = -1.1875 \\ y_3 = -0.0625 + 2i \\ y_4 = -0.0625 - 2i \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 0.25 \\ x_3 = -1 + 2i \\ x_4 = -1 - 2i \end{array}}$$

*) Nach **Vieta** ist das Produkt der Lösungen positiv: $z_1 z_2 z_3 = q^2 > 0.$

Für Gleichungen höheren als vierten Grades gibt es keine allgemeinen Auflösungsformeln siehe Holz, Repetitorium Algebra, Seite 512 ff.

Nullstellen von Polynomen mit ganzen Koeffizienten

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Ist $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten (alle $a_i \in \mathbb{Z}$), dann gilt:

(1) Jede ganzzahlige Nullstelle ist ein Teiler von a_0.
$f(x_0) = 0$ und $x_0 \in \mathbb{Z} \implies x_0 \mid a_0$.

Ist außerdem der Hauptkoeffizient $a_n = 1$, so gilt:

(2) Jede rationale Nullstelle ist eine ganze Zahl und zwar ein Teiler von a_0.
$f(x_0) = 0$ und $x_0 \in \mathbb{Q} \implies x_0 \in \mathbb{Z}$ und $x_0 | a_0$.

Ist $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten (alle $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n = 1$), so probiert man – z.B. mit HORNER – alle Teiler von a_0 und findet so alle rationalen Nullstellen. Bleibt nach dem Abspalten der zugehörigen Linearfaktoren (HORNER Seite 15, Schulmethode, Polynomdivision) ein Polynom höheren als 2–ten Grades, wählt man Näherungsverfahren, um evtl. weitere reelle (irrationale) Nullstellen zu bestimmen.

Ist f ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, aber $a_n \neq 1$, siehe zweites Beispiel.

Beispiel

Man rate Nullstellen des Polynoms $x^3 - 3x^2 + x - 3$.

Die Teiler von -3 sind: $\pm 1, \pm 3$.

Probieren (HORNER) zeigt: $x_1 = 3$ ist eine Nullstelle von $x^3 - 3x^2 + x - 3$.
Division (HORNER) liefert: $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3) = x^2 + 1$.

Da $x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat, ist $\underline{\underline{x_1 = 3}}$ die einzige reelle Nullstelle von $x^3 - 3x^2 + x - 3$ und es gilt: $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)$.

Beispiel

Man rate alle Nullstellen des Polynoms $6x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 4x + 4$.

Die Teiler von 4 sind: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$. Die Teiler von 6 sind: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$.

> Ist die (gekürzte!) rationale Zahl $\dfrac{p}{q}$ eine Nullstelle des Polynoms
> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
> so muß p ein Teiler von a_0 $(= 4)$ und q ein Teiler von a_n $(= 6)$ sein.

Es kommen also als rationale Nullstellen nur folgende Brüche $\dfrac{p}{q}$ in Frage:

$$\frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{1}{3},\ \pm\tfrac{1}{6},\ \pm 2,\ \pm\tfrac{2}{3},\ \pm 4,\ \pm\tfrac{4}{3}.$$

Einsetzen (HORNER) liefert alle Nullstellen: $\underline{\underline{1,\ \frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{2}{3}}}$.

Es gilt
$$\begin{aligned} 6x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 4x + 4 &= 6(x-1)(x-\tfrac{1}{2})(x+2)(x+\tfrac{2}{3}) \\ &= (x-1)(2x-1)(x+2)(3x+2). \end{aligned}$$

Das HORNER–Schema ist ein Rechenverfahren, mit dem man für ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle x_0 mit minimalem Rechenaufwand folgendes berechnet:

(1) Funktionswert $f(x_0)$

(2) Division von $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_0$, also $\frac{f(x)}{x-x_0}$

(3) Ableitungen $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$

(4) Taylorentwicklung von f an der Stelle x_0

Man schreibt die Koeffizienten des Polynoms $f(x)$ in absteigender Reihenfolge $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ hintereinander ($a_k = 0$ nicht vergessen, falls die Potenz x^k fehlt!), schreibt dann x_0 vor die zweite Zeile, beginnt die dritte Zeile mit a_n und geht jeweils mit x_0 multiplizierend in der durch die Pfeile (siehe Beispiel) angedeuteten Weise vor. Die über dem waagerechten Strich untereinanderstehenden Zahlen sind zu addieren, die Summe ist mit x_0 zu multiplizieren, usw.

Beispiel *Für* $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 13$ *berechne man* $f(3)$ *und* $\frac{f(x)}{x-3}$.

HORNER–Schema

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 13, \quad x_0 = 3$$

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 1 & -1 & -9 & 13 & + & \\ x_0 = 3 & & \nearrow 3 & \nearrow 6 & \nearrow -9 & + & \\ & & {\scriptstyle 3\cdot 1} & {\scriptstyle 3\cdot 2} & {\scriptstyle 3\cdot(-3)} & & \\ \hline & \mathbf{1} \nearrow & \mathbf{2} \nearrow & \mathbf{-3} \nearrow & \boxed{4} & = & f(3) \end{array}$$

Man liest ab:

(1) Schlußzahl der dritten Zeile ist der Funktionswert $f(x_0)$ hier: $f(3) = 4$.

(2) Die übrigen Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des Polynoms $g(x)$, das man bei Division von $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_0$ erhält

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = g(x) + \frac{f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{hier:} \quad \frac{x^3-x^2-9x+13}{x-3} = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}x\mathbf{-3} + \frac{\mathbf{4}}{x-3}.$$

$\boxed{f(x) \text{ ist genau dann ohne Rest durch } x - x_0 \text{ teilbar, wenn } f(x_0) = 0 \text{ ist.}}$

Das HORNER–Schema läßt sich auch im Komplexen verwenden:

Beispiel

Für das Polynom $f(z) = z^3 - (1+i)z^2 - (2-i)z + 2i$ *berechne man* $f(i)$ *und* $\frac{f(z)}{z-i}$.

HORNER–Schema im Komplexen

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & -1-i & -2+i & 2i & \\ z_0 = i & & i & -i & -2i & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 & = f(i) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \frac{f(z)}{z-i} = z^2 - z - 2.$$

Beispiel

Für das Polynom $f(x) = 2x^4 - x^3 - x - 18$ *berechne man*
$f(2), f'(2), f''(2), f^{(3)}(2), f^{(4)}(2)$, *sowie* $\frac{f(x)}{x-2}$ *und die* **Taylorentwicklung** *von* f *an der Stelle* $x_0 = 2$ *(Umordnung von* f *nach Potenzen von* $x - 2$*).*

Vollständiges HORNER–Schema

$$
\begin{array}{r|cccccl}
 & 2 & -1 & 0 & -1 & -18 & + \\
x_0 = 2 & & 4 & 6 & 12 & 22 & + \\
\hline
 & 2 & 3 & 6 & 11 & \boxed{4} = \frac{f(2)}{0!} & \Longrightarrow \quad f(2) = 4 \\
x_0 = 2 & & 4 & 14 & 40 & & \\
\hline
 & 2 & 7 & 20 & \boxed{51} = \frac{f'(2)}{1!} & & \Longrightarrow \quad f'(2) = 51 \\
x_0 = 2 & & 4 & 22 & & & \\
\hline
 & 2 & 11 & \boxed{42} = \frac{f''(2)}{2!} & & & \Longrightarrow \quad f''(2) = 42 \cdot 2! = 84 \\
x_0 = 2 & & 4 & & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{15} = \frac{f^{(3)}(2)}{3!} & & & & \Longrightarrow \quad f^{(3)}(2) = 15 \cdot 3! = 90 \\
x_0 = 2 & & & & & & \\
\hline
 & \boxed{2} = \frac{f^{(4)}(2)}{4!} & & & & & \Longrightarrow \quad f^{(4)}(2) = 2 \cdot 4! = 48
\end{array}
$$

Man liest ab:

(1) Schlußzahl der dritten Zeile ist der Funktionswert $f(x_0)$ hier $f(2) = 4$.

(2) Die übrigen Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des Polynoms $g(x)$, das man bei Division von $f(x)$ durch den Linearfakt. $x - x_0$ erhält:

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = g(x) + \frac{f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{hier} \quad \frac{2x^4-x^3-x-18}{x-2} = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 11 + \frac{4}{x-2}.$$

(3) Ableitungen: $f'(2) = 51,\ f''(2) = 84,\ f'''(2) = 90,\ f''''(2) = 48.$

(4) Die Koeffizienten der Taylorentwicklung sind die umrahmten Zahlen des Horner–Schemas:

$$f(x) = \underbrace{2x^4 - x^3 - x - 18}_{\substack{f \text{ geordnet nach} \\ \text{Potenzen von } x.}} = \underbrace{\boxed{2}(x-2)^4 + \boxed{15}(x-2)^3 + \boxed{42}(x-2)^2 + \boxed{51}(x-2) + \boxed{4}}_{\substack{\text{Taylorentwicklung} \\ \text{von } f \text{ an der Stelle 2.}} = \substack{f \text{ umgeordnet nach} \\ \text{Potenzen von } (x-2).}}$$

(5) Alle Koeffizienten der Umordnung nach Potenzen von $(x - 2)$ sind ≥ 0, also: Keine Nullstelle von f ist > 2.

Beispiel (Euklidischer Algorithmus): *Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler* ggT $(42, 9)$ *von 42 und 9, und löse die diophantische Gleichung* $42x+9y =$ggT $(42, 9)$.

Division mit Rest:	Einsetzen liefert:	alle Lösungen der diophantischen Gleichung [**EM 1**, Seite 49–52.]
$42 = 4 \cdot 9 + 6$	$3 = 9 - 1 \cdot 6$	
$9 = 1 \cdot 6 + \underline{3}$	$3 = 9 - 1 \cdot (42 - 4 \cdot 9)$	$42x + 9y = 3$ bzw. $14x + 3y = 1$ sind:
$6 = 2 \cdot 3$	$3 = -1 \cdot 42 + 5 \cdot 9$	
$\Rightarrow \underline{3} = \text{ggT}(42, 9).$	ggT als Vielfachsumme.	$(x, y) = (-1, 5) + m(3, -14),\ m \in \mathbb{Z}$.

2 Geometrie

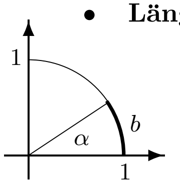
2.1 Winkel, Dreieck, Viereck, n–Eck

Winkel

Umrechnung: Gradmaß – Bogenmaß

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem

- **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** in Grad und der
- **Länge $\boldsymbol{b}$** des zugehörigen Kreisbogens am **Einheitskreis**:



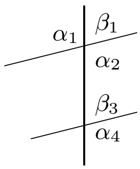
$$\boxed{\frac{\alpha}{180°} = \frac{b}{\pi}}$$

$$\alpha = \frac{b}{\pi}180°\,,\quad b = 1 \implies \alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57.296°$$

$$b = \frac{\alpha}{180°}\pi\,,\quad \alpha = 1° \implies b = \frac{1°}{180°}\pi \approx 0.017$$

Benutzt man einen Taschenrechner, vergewissere man sich, ob er auf Winkel im Gradmaß (DEG) oder im Bogenmaß (RAD) eingestellt ist.

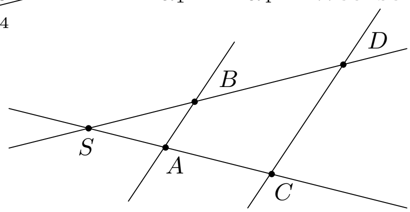
Werden **Parallelen** von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei der Winkel gleich oder ergänzen sich zu 180^0.



$\alpha_1 + \beta_1 = 180^0$		**Nebenwinkel**
α_1	$= \alpha_2$	**Scheitelwinkel**
β_1	$= \beta_3$	**Stufenwinkel**
α_1	$= \alpha_4$	**Wechselwinkel**

Strahlensatz

$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD} = \overline{AB} : \overline{CD}$



Dreieck

Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie übereinstimmen in:	Symbol	Berechnung der fehlenden Seiten/Winkel
(1) drei Seiten	**(sss)**	**Kosinussatz**
(2) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel	**(sws)**	**Kosinussatz**
(3) einer Seite und zwei Winkeln	**(wsw)** **(sww)**	**Sinussatz**
(4) zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite	**(SsW)**	**Sinussatz**

Ähnlichkeitssätze:

Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie übereinstimmen

(1) im Verhältnis dreier Seiten,
(2) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
(3) in zwei Winkeln,
(4) im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite.