Gerhard Merziger
Thomas Wirth

Repetitorium Höhere Mathematik

7. Auflage

HANSER

FORMELSAMMLUNG

Trigonometrische Funktionen

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

doppelter Winkel

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\
\cot 2x &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}
\end{aligned}$$

halber Winkel

$$\begin{aligned}
\cos \frac{x}{2} &=^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)} \\
\sin \frac{x}{2} &=^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)} \\
\tan \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\
&=^* \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \\
\cot \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \\
&=^* \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}
\end{aligned}$$

Symmetrie

$\cos(-x)$	$=$	$\cos x$	gerade Funktion
$\sin(-x)$	$=$	$-\sin x$	ungerade Funktion
$\tan(-x)$	$=$	$-\tan x$	ungerade Funktion
$\cot(-x)$	$=$	$-\cot x$	ungerade Funktion

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) & \sin x &=^* \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}} \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) & \cos x &=^* \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}} \\
\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) & \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\
\sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\
\cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \\
\sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)
\end{aligned}$$

* Vorzeichen je nach Quadranten!

Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}
\end{aligned}$$

$\cosh 0 = 1, \ \sinh 0 = 0, \ \tanh 0 = 0$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$, $\coth(-x) = -\coth x$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y
\end{aligned}$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$

$$\sinh \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}, \quad \text{für } \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}\,) \\
\operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}\,), \quad \text{für } x \geq 1
\end{aligned}$$

Überlagerung von Schwingungen

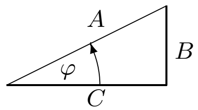
$$\boxed{A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad \text{(Quadranten beachten!)}$$

Spezialfall: $\boxed{B\cos\omega t + C \sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi)}$

$$B = A\sin\varphi \qquad C = A\cos\varphi$$



$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \qquad \tan\varphi = \frac{B}{C} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

Quadratische Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

allgemeine Binomialkoeffizienten

$r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, \ldots$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

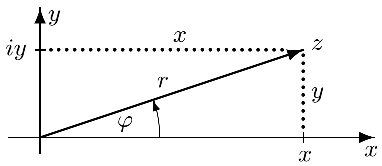
$$\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1, \quad \binom{r}{1} = r$$

Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad dF = r\,dr\,d\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{i\varphi}$$



Rechnen mit **Potenzen** und **Logarithmen**

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

a^{x+y}	$=$	$a^x a^y$	$\log_a xy$	$=$	$\log_a x + \log_a y$
a^{-x}	$=$	$\frac{1}{a^x}$	$\log_a \frac{1}{x}$	$=$	$-\log_a x$
a^0	$=$	1	$\log_a 1$	$=$	0
$(a^x)^r$	$=$	a^{xr}	$\log_a x^r$	$=$	$r\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

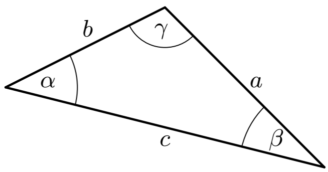
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{speziell:} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ falls } \gamma = 90^0$$

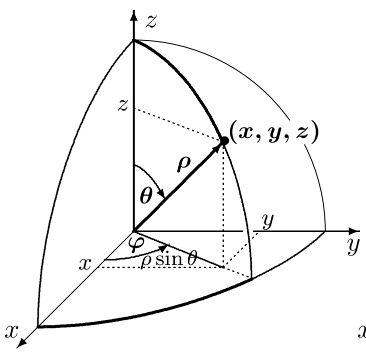


Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kugelkoordinaten

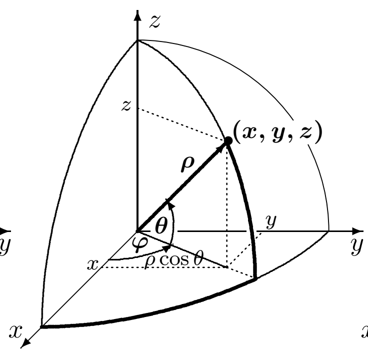
θ : Polabstand



$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta$$
$$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

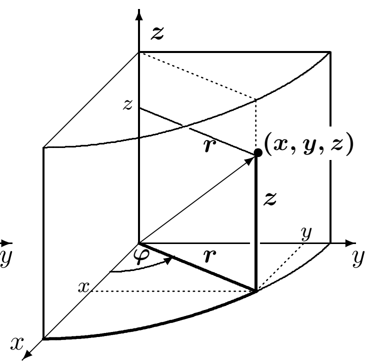
Kugelkoordinaten

θ : geographische Breite



$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\theta$$
$$dV = \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Zylinderkoordinaten



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \cdots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots \quad \text{für } -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots) \quad \text{für } -1 \leq x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots \quad \text{für } |x| < 1$$

---

endliche geom. Reihe $\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ für $x \neq 1$

geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$ konvergent $\iff$ $x > 1$

binomische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r$, $|x| \leq 1,\ r > 0$; $|x| < 1,\ r < 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2$$
$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$
$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots = \frac{1}{e}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$$
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

wichtige Grenzwerte

$(n \to \infty,\quad a > 0)$

$\sqrt[n]{a} \to 1$	$(\frac{n+1}{n})^n \to e$	$\binom{a}{n} \to 0,\quad a > -1$
$\sqrt[n]{n} \to 1$	$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$	$\frac{a^n}{n!} \to 0$
$\sqrt[n]{n!} \to \infty$	$(1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1}$	$\frac{n^n}{n!} \to \infty$
$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$	$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$	$\frac{a^n}{n^k} \to \infty \quad \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$	$(1 - \frac{x}{n})^n \to e^{-x}$	$a^n n^k \to 0 \quad \begin{cases} \lvert a\rvert < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
		$n(\sqrt[n]{a} - 1) \to \ln a,\ a > 0$

Differentiations– und Integrationsregeln

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

partielle Integration: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Vektorfunktionen

$\left(\lambda\vec{u}\right)' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}\,'$

$\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)' = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$

$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right)' = \vec{u}\,' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}\,'$

$\left(\vec{u}(\lambda(t))\right)' = \vec{u}\,'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$

Kettenregel: $\big(y(x(t))\big)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$

Substitutionsregel: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$, dabei ist $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$
$\int g\,dx$	g

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \neq -1)$

$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$

$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$

$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$

$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

$\int xe^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

$\int x\ln x\,dx = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$

$\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$

$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta = 4ac - b^2$

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right| & \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| < \sqrt{-\Delta} & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arcoth}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| > \sqrt{-\Delta} & \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}\,)\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}\,)\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

REPETITORIUM

HÖHERE MATHEMATIK

Repetitio est mater studiorum

Gerhard Merziger
Thomas Wirth

7. Auflage, Ebook

Binomi Verlag	**Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**	
	Telefon	**05105 6624000**
	E–Mail	**verlag@binomi.de**
	Internet	**www.binomi.de**

Zu beziehen beim Verlag

ISBN 978–3–923923–67-0

Hannover 04/21

Vorwort

Dieses Buch will angehenden Mathematikern, Physikern und Ingenieuren von Universitäten und Fachhochschulen eine Hilfe sein beim Bewältigen von

Vorlesungen **Übungen** **Klausuren**

Mathematische Verfahren und abstrakte Methoden werden erklärt und anhand einer Fülle von **vollständig behandelten Beispielen** erläutert.
Aus jahrelanger Erfahrung im Umgang mit Studierenden wissen die Autoren, wie wichtig **Beispiele** zum Verständnis sind.
Ein ausführlicher Index mit mehr als 1000 Stichwörtern erleichtert die Arbeit.

Auf Seiten, Beispiele, Aufgaben und Abschnitte wird innerhalb eckiger Klammern verwiesen: [Seite 210], [12.1], [Abschnitt 5.4] usw.

Wichtige Formeln, Begriffe und fast alle benötigten Integrale stehen auf den Umschlagseiten F1, F2, F3, F4.

Natürlich können wir trotz aller verwendeten Sorgfalt Fehler nicht ausschließen. Ein aktuelles Fehlerverzeichnis findet man auf www.binomi.de.

Teilen Sie uns bitte Kritik, Hinweise und Anregungen auf www.binomi.de mit.

Das **Repetitorium** arbeitet mit der **Formelsammlung**, zitiert durch **F+H**:

Merziger / Mühlbach / Wille / Wirth

FORMELN + HILFEN
HÖHERE MATHEMATIK

ISBN 3–923923–36–6 241 Seiten 15,80 €

Zitierte Literatur:

F+H	*Merziger/Mühlbach/Wille/Wirth*		Formeln + Hilfen
EM 1	*Merziger/Holz/Wille*	Repetitorium	Elementare Mathematik 1
EM 2	*Merziger/Holz/Wille*	Repetitorium	Elementare Mathematik 2
LA 1	*Wille*	Repetitorium	Lineare Algebra, Teil 1
LA 2	*Holz/Wille*	Repetitorium	Lineare Algebra, Teil 2
Alg	*Holz*	Repetitorium	Algebra
Ana 1	*Timmann*	Repetitorium	Analysis, Teil 1
Ana 2	*Timmann*	Repetitorium	Analysis, Teil 2
DGL	*Timmann*	Repetitorium	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Fun	*Timmann*	Repetitorium	Funktionentheorie
Top	*Timmann*	Repetitorium	Topologie und Funktionalanalysis

Überwiegend positive Kommentare von Studys und Dozentys zu diesen Büchern findet man unter **www.binomi.de**.

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

a	j	s
b	k	t
c	l	u
d	m	v
e	n	w
f	o	x
g	p	y
h	q	z
i	r	

Zeichenindex

$\vec{a}$	Vektor	120
$\lvert\vec{a}\rvert$	Betrag des Vektors $\vec{a}$	122
$\vec{a}\vec{b}$	Skalarprodukt, $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$	127
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt	133
$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$	Spatprodukt	136
$\vec{b}_{\vec{a}}$	Projektion von $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$	131
$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$	Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$	128
$\lvert\lvert$	parallel	$137, 147$
$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf	128
$(a_{i,j})$	Matrix	166
$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$	Matrix	166
$\begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$	Determinante	183
$f(x)$	Funktionswert, lies "f von x"	24
$f'(x)$	1-te Ableitung, lies "f Strich von x"	260
$f^{(n)}(x)$	n-te Ableitung, lies "f n-Strich von x"	266
$\frac{df}{dx}$	1-te Ableitung, lies "df nach dx"	260
dx, df	Differentiale	$261, 383$
f_x	f partiell nach x	374
$\operatorname{grad} f$	Gradient von f	$374, 376$
J_f	Jakobi-Matrix von f	376
$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$	Richtungsableitung	385
$a_n \to a$	die Folge (a_n) konvergiert gegen a	330
$\sum$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$	Summenzeichen	366
$\sqrt{}$, $\sqrt[n]{}$	Wurzel, n-te Wurzel	$48, 103$
$\int f(x)\,dx$	unbestimmtes Integral	285
$\int_a^b f(x)\,dx$	bestimmtes Integral	300
${}^{G}\!\!\iint$	Gebietsintegral, Doppelintegral	485
${}^{K}\!\!\iiint$	Raumintegral, Dreifachintegral	490

1 Grundbegriffe

1.1 Logische Grundlagen, Aussagen

Mathematik ist ohne Logik undenkbar; doch keine Angst, uns reichen hier einfache logische Prinzipien, die sich aus dem gesunden Menschenverstand erklären. Mathematik präsentiert sich in **Aussagen**, im Folgenden mit großen Buchstaben $A, B, \ldots$ bezeichnet.

Eine **Aussage** ist entweder **wahr** oder **falsch** — ein Drittes gibt es nicht!

1.1 *Beispiele für (mathematische) Aussagen:*

$3^2 > 2^3$,	ist eine wahre Aussage (ist richtig, gilt).
4 ist eine Primzahl,	ist eine falsche Aussage (ist falsch, gilt nicht).
Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge[1],	wahr oder falsch? Ein bis heute ungelöstes Problem!

Aus (einfachen) Aussagen kann man weitere (kompliziertere) Aussagen bilden:

Bezeichnung	Symbole	Lies	ist genau dann wahr, wenn
Negation	$\overline{A}$	nicht A	A falsch ist.
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B	A und B wahr sind.
Adjunktion	$A \vee B$	A oder B	A oder B wahr ist (oder beide).
Implikation	$A \Longrightarrow B$	aus A folgt B	A falsch oder B wahr ist [2].
Äquivalenz	$A \Longleftrightarrow B$	A äquivalent B	A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist.

Belegt man die Aussagen A und B mit *Wahrheitswerten* w für "wahr" und f für "falsch", so ergeben sich die Wahrheitswerte der abgeleiteten Aussagen wie folgt:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Ist die Aussage $A \Longleftrightarrow B$ wahr, benutzt man statt "$\Longleftrightarrow$" auch das Gleichheitszeichen "$=$", um längere Aussagen übersichtlicher zu schreiben.

Statt A äquivalent B, sagt man auch: A und B sind *gleichbedeutend*.

Bei mathematischen Schlüssen werden folgende Regeln häufig benutzt:

[1] Primzahlzwillinge sind z.B. 3,5 und 17,19 und 41,43, ...

[2] Merke: Ist die Voraussetzung falsch, ist jede Implikation (nicht das Ergebnis) richtig!

Logische Regeln

$\overline{\overline{A}} = A$	doppelte Verneinung einer Aussage
$(A \Longrightarrow B) = (\overline{A} \vee B) = (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$	Ersetzen der Implikation
$(A \Longleftrightarrow B) = \big((A \Longrightarrow B \;\wedge\; B \Longrightarrow A)\big) = (\overline{A} \Longleftrightarrow \overline{B})$	Ersetzen der Äquivalenz
$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	de Morgan'sche Regel
$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$	de Morgan'sche Regel
$\overline{A \Longrightarrow B} = A \wedge \overline{B}$	Verneinung der Implikation
$\overline{A \Longleftrightarrow B} = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$	Verneinung der Äquivalenz

1.2 *Die Aussage* $x^2 \geq x \Longrightarrow (x \leq 0) \vee (1 \leq x)$ *ist gleichbedeutend (äquivalent) mit der Aussage* $0 < x < 1 \Longrightarrow x^2 < x$.

Die beiden Aussagen sind von der Form $A \Longrightarrow B$ bzw. $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$, sie sind daher äquivalent.

1.3 *Man beweise* $\overline{A \Longrightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\boldsymbol{\overline{A \Longrightarrow B}}$	$\overline{B}$	$\boldsymbol{A \wedge \overline{B}}$
w	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	$\boldsymbol{f}$
w	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	$\boldsymbol{w}$
f	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	w	$\boldsymbol{f}$	w	$\boldsymbol{f}$

$\overline{A \Longrightarrow B}$ und $A \wedge \overline{B}$ haben dieselbe Belegung mit Wahrheitswerten, die Aussagen sind also äquivalent.

Häufig enthalten Aussagen die *Quantoren* "**für alle** … " oder "**es gibt** … ".
Die Negation der Aussage:

"Für alle $x \in X$ gilt die Aussage $A(x)$." ist offensichtlich:
"Es gibt (mindestens) ein $x \in X$, für das $A(x)$ falsch ist."

Quantoren

$\forall x \in X,\ A(x)$	lies:	Für alle $x \in X$ gilt die Aussage $A(x)$.
$\exists x \in X,\ A(x)$		Es gibt ein $x \in X$, für das $A(x)$ gilt.

Negation:

$$\overline{\forall x \in X,\ A(x)} = \exists x \in X,\ \overline{A}(x)$$

$$\overline{\exists x \in X,\ A(x)} = \forall x \in X,\ \overline{A}(x)$$

1.4 *Man negiere folgende Aussagen:*

(a) $n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon$.

(b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $A(n, n_0)$ gilt.

(c) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon$. (Bedeutung?)

(a) Die Aussage $(n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon)$ ist eine Implikation: $(B \Longrightarrow C)$. Also:

$$\begin{aligned} \overline{(B \Longrightarrow C)} &= \overline{(\overline{B} \vee C)} && \text{(Ersetzen der Implikation)} \\ &= \overline{\overline{B}} \wedge \overline{C} && \text{(de Morgan)} \\ &= B \wedge \overline{C} && \text{(doppelte Verneinung)} \end{aligned}$$

Die Negation von $(n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon)$ ist also $(n \geq n_0 \wedge |a_n| \geq \epsilon)$.

(b)
$$\begin{aligned} \overline{\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A(n, n_0)} &= \exists \epsilon > 0\ \overline{\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A(n, n_0)} \\ &= \exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \overline{\forall n \in \mathbb{N},\ A(n, n_0)} \\ &= \exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\ \overline{A}(n, n_0). \end{aligned}$$

(c) Bedeutung: (a_n) ist Nullfolge (siehe Seite 330). Formales Negieren ergibt:

$$\begin{aligned} &\overline{\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon)} \\ =\ &\exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0\ \wedge\ |a_n| \geq \epsilon) \quad = \quad (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.} \end{aligned}$$

indirekter Beweis

Man beweist die Aussage $A \Longrightarrow B$, indem man aus der Annahme, dass die Behauptung B falsch sei, einen Widerspruch herleitet. Das heißt, man nimmt zur Voraussetzung A noch die Annahme $\overline{B}$ hinzu und führt die Aussage $A \wedge \overline{B}$ auf eine der drei folgenden Arten auf einen **Widerspruch** (Zeichen : #).

$A \wedge \overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$, also # (Widerspruch zur Voraussetzung A), [1.67]
$A \wedge \overline{B} \Longrightarrow B$, also # (Widerspruch zur Annahme $\overline{B}$), [1.52], [1.53]
$A \wedge \overline{B} \Longrightarrow F$, also # ($F$ steht für eine offensichtl. falsche Aussage), [1.66]

Ergibt sich aus $A \wedge \overline{B}$ (durch richtige Schlüsse) ein Widerspruch (etwas Falsches), muss $A \wedge \overline{B}$ falsch sein. Also muß, wenn A richtig ist, $\overline{B}$ falsch, also B richtig sein, d.h. aus A folgt B. Klingt kompliziert, ist aber logisch und wird häufig benutzt.

1.5 *Man zeige: $\sqrt{2}$ ist irrational.*

Die Aussage "$\sqrt{2}$ ist irrational" ist von der Form $A \Longrightarrow B$, wenn man sie als Kurzform folgender Aussage betrachtet:
"Aus den Rechenregeln für die reellen Zahlen folgt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist."

Indirekter Beweis:

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. $\sqrt{2}$ schreibt sich in gekürzter Bruchdarstellung: $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, mit $r, s \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ggT}(r, s) = 1$.

Man schließt nun folgendermaßen:

$$\sqrt{2} = \frac{r}{s} \Longrightarrow 2s^2 = r^2 \Longrightarrow 2|r^2 \Longrightarrow 2|r \text{ (da 2 Primzahl), etwa } r = 2t,$$
$$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{2t}{s} \Longrightarrow 2 = \frac{4t^2}{s^2} \Longrightarrow s^2 = 2t^2 \Longrightarrow 2|s^2 \Longrightarrow 2|s.$$

Also $2|r$ und $2|s \Longrightarrow \operatorname{ggT}(r, s) \neq 1$ # (zur Annahme). Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

1.2 Mathematische Grundlagen, Mengen

Selbst derjenige, der Mathematik nur als Hilfswissenschaft benutzt, benötigt einige Grundkenntnisse der Mengenlehre. Der Begriff einer Menge ist ein Grundbegriff der Mathematik, der nicht auf andere Begriffe zurückgeführt wird.

Es bedeuten:

$x \in M$: x ist Element der Menge M, kurz: x in M.
$x \notin M$: x ist nicht Element der Menge M, kurz: x nicht in M.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

(1) $M = \{a, b, \ldots, c\}$ (Durch Angabe der Elemente).
M ist die Menge, die genau die paarweise verschiedenen Elemente $a, b, \ldots, c$ enthält, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

(2) $M = \{x \in X \mid A(x)\}$ (Durch eine *definierende Eigenschaft*).
M ist die Menge, die genau die Elemente $x \in X$ enthält, für welche die Aussage A wahr ist. Ein "$\wedge$" in $A(x)$ ersetzt man häufig durch ein Komma ",".

Ist klar, um welche Menge X es sich handelt, schreibt man kurz: $\{x \mid A(x)\}$.

1.6 *Für folgende Mengen benutzt man Standardbezeichnungen:*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ = Menge der *natürlichen Zahlen*[3].

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = Menge der *ganzen Zahlen.*
$\phantom{\mathbb{Z}} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z} \wedge s \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(r, s) = 1\}$ = Menge der *rationalen Zahlen.*

$\mathbb{R}$ = Menge der *reellen Zahlen*, siehe Seite 44.

$\mathbb{C}$ = Menge der *komplexen Zahlen*, siehe Seite 93.

1.7 *Beispiele für Mengen:*

$\{1\}$ = Menge, die nur das Element 1 enthält.

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -1 ist. Diese Menge enthält kein Element, sie ist leer.

$\emptyset$ = **leere Menge** = die Menge, die kein Element enthält.

$\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2x\}$
$= $ Menge der *Lösungen* der Gleichung $x^3 - 2x = 0$.

$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot \vec{x} = 4\}$ = *Ebene* im Raum, siehe Seite 147.

$\{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ = *Einheitskreis* in der komplexen Ebene, Seite 97.

$\{f \mid f'(x) = 2x\} = \{f \mid f(x) = x^2 + c, c \in \mathbb{R}\}$
$=$ Menge aller *Stammfunktionen* von $2x$.

[3] Falls es zweckmäßig ist, betrachtet man auch 0 als natürliche Zahl!

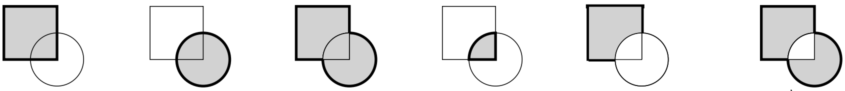
Man spricht von einer *endlichen* oder *unendlichen* Menge, je nachdem die Anzahl der Elemente der Menge eine natürliche Zahl ist oder nicht. Hier ist zweckmäßigerweise 0 eine natürliche Zahl, sonst wäre (nach unserer Definition) die leere Menge unendlich!

1.8 $\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < n^2\}$ ist eine endliche (einelementige) Menge, nämlich $\{3\}$.

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine unendliche Menge.

Bezeichnung	Lies	Bedeutung
$A \subseteq B$	A **Teilmenge** von B	$x \in A \Longrightarrow x \in B$
$A \subset B$	A **echte Teilmenge** von B	$A \subseteq B \ \wedge\ A \neq B$
$A = B$	A **gleich** B	$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$
$A \cup B$	**Vereinigung** von A und B	$= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$	**Durchschnitt** von A und B	$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \setminus B$	**Differenz** von A und B	$= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Veranschaulichung mittels sogenannter *Venn–Diagramme*:



M $\quad N \quad M \cup N \quad M \cap N \quad M \setminus N \quad M \cup N \setminus M \cap N$

symmetrische Differenz

Für die symmetrische Differenz gilt: $M \cup N \setminus M \cap N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.

Rechenregeln für Mengen

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

Sind A, B Teilmengen der Menge X, dann gilt:

$$A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq X \setminus B \iff B \subseteq X \setminus A.$$

de Morgansche Regeln $\left\{ \begin{array}{lcl} X \setminus (A \cup B) & = & (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \\ X \setminus (A \cap B) & = & (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{array} \right.$

Gleichheit von Mengen

$$A = B \iff \Big((x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A)\Big) \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn jedes Element der einen Menge zu der anderen gehört und umgekehrt.

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn die eine Menge Teilmenge der anderen Menge ist und umgekehrt.

1.9 (a) *Man zeige:* $A \subseteq B \iff A \cup B = B.$

(b) *Man zeige die de Morganschen Regeln:*

$$\begin{aligned} X \setminus (A \cup B) &= (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \\ X \setminus (A \cap B) &= (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{aligned}$$

(a) Die Äquivalenz kann man durch zwei Implikationen ersetzen: Man spricht von einem Beweis "in zwei Richtungen":

(1) "$\Longrightarrow$" , Beweis von $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B$:

Unter der Voraussetzung $A \subseteq B$ ist die Gleichheit $A \cup B = B$ zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{ll} x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \subseteq B \vee x \in B \Rightarrow x \in B, & \text{also } A \cup B \subseteq B \\ x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A \cup B, & \text{also } B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = B.$$

(2) "$\Longleftarrow$" , Beweis von $A \cup B = B \Longrightarrow A \subseteq B$:

Unter der Voraussetzung $A \cup B = B$ ist zu zeigen, dass $A \subseteq B$ ist:

$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B = B$. Also ist jedes Element von A in B, also ist $A \subseteq B$.

Durch (1) und (2) ist gezeigt: $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

(b)
$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\ &\iff x \in X \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\iff (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \\ x \in X \setminus (A \cap B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\iff (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{aligned}$$

1.10 *Es seien A, B, C folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:*

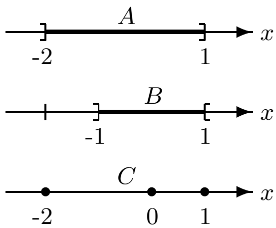
$A = \{x \mid -2 < x \leq 1\}$, $B = \{x \mid |x| < 1\}$, $C = \{x \mid x(x+2)(x-1) = 0\}$.

Man bestimme $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cap B = \underline{\underline{B}}$. Es ist $C = \{-2, 0, 1\}$ und folglich:

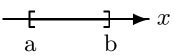
$A \cap B \cap C = B \cap \{-2, 0, 1\} = \underline{\underline{\{0\}}}$ und

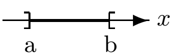
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) = B \cup \{0, 1\} \\ &= \underline{\underline{\{x \mid -1 < x \leq 1\}}}. \end{aligned}$$

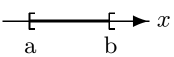


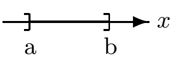
Häufig benutzte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die **Intervalle**. Man veranschaulicht sie auf der Zahlengeraden und unterscheidet folgende Typen:

Beschränkte Intervalle:


$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$: *abgeschlossenes* Intervall, die Randpunkte gehören dazu.


$]a,b[= \{x \mid a < x < b\}$: *offenes* Intervall, die Randpunkte gehören nicht dazu.


$[a,b[= \{x \mid a \leq x < b\}$: linker Randpunkt gehört dazu, rechter Randpunkt gehört nicht dazu.


$]a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$: linker Randpunkt gehört nicht dazu, rechter Randpunkt gehört dazu.

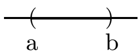
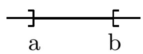
Unbeschränkte Intervalle:

$$]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$$

$$]-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \qquad \text{speziell:} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} =]0,\infty[= \{x \mid x > 0\} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} = [0,\infty[= \{x \mid x \geq 0\} \end{array}$$

$$]a,\infty[= \{x \mid x > a\}$$

Schreibweisen: Wenn keine Missverständnisse – z.B. mit dem geordneten Paar (a,b), siehe Seite 23 – zu befürchten sind, schreibt man auch:

$]a,b[= (a,b)$, $]a,b] = (a,b]$ usw. und skizziert:  statt  usw.

1.3 Vollständige Induktion

Der stufenweise Aufbau der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beginnt mit der unendlichen Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Das Axiomensystem von **Peano** für die natürlichen Zahlen enthält das

wichtige **Induktionsaxiom**: $\boxed{\text{Enthält eine Teilmenge } A \subseteq \mathbb{N} \text{ die Zahl 1 und mit jedem } k \text{ auch } k+1, \text{ dann ist } A = \mathbb{N}.}$

Will man nun zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen richtig ist, muss man beweisen, dass die Aussage für 1 richtig ist und dass sie, falls sie für k richtig ist, auch für $k+1$ richtig ist.[4]

[4]Dann gilt sie für 1 und, da für 1, auch für 2, da für 2 auch für 3, usw.
Das Induktionsaxiom besagt, dass man so *alle* natürlichen Zahlen erhält und die Aussage folglich für *alle* natürlichen Zahlen richtig ist.

Vollständige Induktion	
Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage über die natürliche Zahl n und sind die beiden folgenden Aussagen richtig:	formal
1) Die Aussage gilt für 1.	1) $A(1)$
2) Gilt die Aussage für k, so auch für $k+1$.	2) $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$
Dann gilt die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.	

1.11 *Für jede natürliche Zahl n gilt:* $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1) Die Aussage gilt für 1: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ist offensichtlich richtig.

2) Gilt die Aussage für k, ist also $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, so folgt:

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Also gilt die Aussage für 1 und – falls sie für k gilt – auch für $k+1$.

Obige Aussage gilt also für alle natürlichen Zahlen.

1.12 *Ist $x \geq -1$, so gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Bernoullische Ungl.)*

1) $A(1):\quad 1+x \geq 1+x$ ist richtig.

2) $A(k) \Longrightarrow A(k+1):\quad x \geq -1 \wedge (1+x)^k \geq 1+kx \Longrightarrow$
$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$,
da $kx^2 \geq 0$ ist. Damit ist die Bernoullische Ungleichung bewiesen.

1.13 *Für $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.*

Hier ist eine Aussage für alle $n \geq 5$ zu beweisen. Man verfährt analog wie oben:

1) $A(5)$: $32 = 2^5 > 5^2 = 25 \quad \Longrightarrow$ die Aussage gilt für $n = 5$.

2) Für $k \geq 5$ gilt: $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$:

$k \geq 5 \wedge 2^k > k^2 \Longrightarrow 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > k^2 + k^2 \overset{(\star)}{\geq} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

$(\star)$ Benutzt wird 1.55 (a): $n \geq 3 \Longrightarrow n^2 > 2n+1$.

Gilt die Aussage also für ein $k \geq 5$, so gilt sie auch für $k+1$. Fertig.

1.14 *Auf den* Induktionsanfang, *d.h. auf den Nachweis, dass $A(1)$ oder $A(n_0)$ richtig ist, darf nicht verzichtet werden! Der* Induktionsschritt, *d.h. $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ lässt sich auch für die offensichtlich falsche Behauptung* $1+2+\cdots+n < \frac{n(n+1)}{2}$ *durchführen, siehe* 1.11*:*

$$1+2+\cdots+k < \frac{k(k+1)}{2} \quad\Longrightarrow\quad 1+2+\cdots+k+(k+1) < \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Gilt die Aussage für k, so auch für $k+1$. Natürlich findet man keinen Induktionsanfang, denn die Aussage gilt wegen 1.11 für keine natürliche Zahl!

Weitere Beispiele zur **vollständigen Induktion**: 1.55 – 1.58 auf Seite 40 – 42

1.15 (a) *Sind $x_1, \dots, x_n$ positive Zahlen und ist $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$, so gilt $\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$.*

(b) *Für das* **h***armonische,* **g***eometrische und* **a***rithmetische Mittel positiver Zahlen gilt* $\mathbf{h} \leq \mathbf{g} \leq \mathbf{a}$ *:* $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$.

(a) Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Ist die Aussage für n richtig und ist $x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} = 1$ so ist nach Voraussetzung $x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n$
und also $x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} \geq^{(\star)} n + 1$.

Beweis $(\star)$: $n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} \geq n + 1 \iff x_n(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_{n+1}$.

Fall 1: Alle x_i sind gleich 1. Dann gilt $x_n(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_{n+1}$.

Fall 2: Nicht alle x_i sind gleich 1. Es gibt ein $x_i < 1$ und ein $x_j > 1$.
Sei $x_n > 1$ und $x_{n+1} < 1$. Dann gilt $x_n(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_{n+1}$.

(b) Sei $p := a_1 \cdots a_n$ und $x_k := \frac{a_k}{\sqrt[n]{p}}$. Dann ist $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$ und nach (a) gilt:

$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{p}} \geq n$, also $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$. Für die Kehrwerte gilt $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) \implies \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$.

<u>Alternativer Beweis</u> für $g \leq a$ (Interessante Anwendung des Induktionsbeweises): Benutzt wird, dass mit k auch 2^k gegen Unendlich geht. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile:

(1) Durch v.I. zeigt man, dass die Aussage für alle $n = 2^k$ gilt.
(2) Dann zeigt man: Gilt die Aussage für n, so auch für $n - 1$.

Man überlege, dass so obige Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt ist!

(1) Für $n = 1$, also $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Man benötigt im Laufe des Beweises die Aussage für $n = 2$: $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$:

$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \iff 0 \leq (a - b)^2$, richtig für $a, b \in \mathbb{R}$.

Ist nun $\sqrt[2^k]{x_1 \cdots a_{2^k}} \leq \frac{a_1+\dots+a_{2^k}}{2^k}$, so gilt:

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^k+2^k}}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{a_1+\dots+a_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{a_{2^k+1}+\dots+a_{2^k+2^k}}{2^k}}$$

$$\leq \frac{\frac{a_1+\dots+a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1}+\dots+a_{2^k+2^k}}{2^k}}{2} \text{ (da } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ ist)} = \frac{a_1+\dots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.$$

Also gilt die Aussage, falls n irgendeine Potenz von 2 ist.

(2) Ist $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, so gilt die Aussage auch für $n-1$, denn

$$\begin{aligned}\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} &= \sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}\cdot(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}\,, \quad \text{da } \frac{1}{n-1}=\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n} \text{ ist.}\\ &\le \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}}}{n} \quad \text{nach Voraussetzung.}\end{aligned}$$

Also gilt $\quad (n-1)\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} \le a_1+\cdots+a_{n-1},$

und folglich $\quad \sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} \le \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}.$

Damit ist obige Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen!

1.4 Kartesische Produkte

Sind A und B Mengen und ist $a \in A$ und $b \in B$, so nennt man (a,b) ein **geordnetes Paar**. Bei einem geordneten Paar (a,b) ist im Unterschied zu der Menge $\{a,b\}$ die *Reihenfolge* wesentlich.

Es ist $(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow (a=c \wedge b=d)$. Also ist im allgemeinen $(a,b)\neq(b,a)$, während für die beiden Mengen gilt: $\{a,b\}=\{b,a\}$.

$$A\times B := \{(a,b)\mid a\in A \wedge b\in B\}$$

heißt **kartesisches Produkt** der Mengen A und B.

Entsprechend definiert man $A_1\times\cdots\times A_n$, das kartesische Produkt der Mengen $A_1,\cdots,A_n$, als Menge der geordneten n–Tupel $(a_1,\cdots,a_n)$.

1.16 *Man bilde das kartesische Produkt von $A=\{1,2\}$ und $B=\{a,b,c\}$:*

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in\{1,2\}\wedge y\in\{a,b,c\}\}=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}.$

1.17 *Beispiele kartesischer Produkte:*

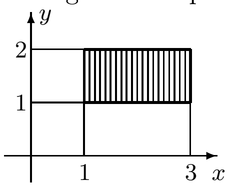
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ist die x,y–Ebene.

$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\}$ ist der dreidim. Raum.

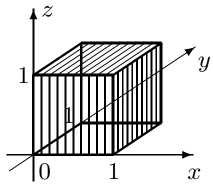
$[1,3]\times[1,2]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 2\}$ ist ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$.

$[0,1]^3=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$ ist der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$.

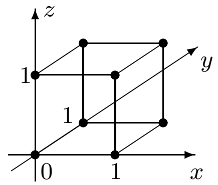
$\{0,1\}^3=\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ ist die Menge der Eckpunkte des Einheitswürfels im $\mathbb{R}^3$.



$[1,3]\times[1,2]$
Rechteck



$[0,1]^3$
Einheitswürfel



$\{0,1\}^3$
Ecken des Einheitswürfels

1.5 Abbildungen, Funktionen

Der Begriff der Abbildung oder Funktion ist ähnlich grundlegend wie der Begriff der Menge und wird hier nur erläutert.

Sind A, B zwei Mengen, so versteht man unter einer

Abbildung, Funktion f *von* A *nach* B, geschrieben: $f : A \to B$

eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ *genau* ein $y \in B$ zuordnet.

Man schreibt $f : x \mapsto y$ oder $y = f(x)$ und nennt:

A	**Definitionsbereich** oder Definitionsmenge,
$f(A)$	**Bildmenge** oder **Wertebereich** oder Wertevorrat,
x	**unabhängige** Veränderliche (Variable) oder Argument,
y	**abhängige** Veränderliche (Variable),
$y = f(x)$	**Funktionsgleichung**.

Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, so definiert man:

$f(A')$	$:= \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$	**Bildmenge** von A',
$f^{-1}(B')$	$:= \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$	**Urbildmenge** von B'.

Beachte:

f^{-1} ordnet *Teilmengen* von B *Teilmengen* von A zu, ist jedoch i.A. *keine* Abbildung von B nach A (siehe jedoch: Umkehrabbildung f^{-1}, falls f bijektiv ist, Seite 30).

Man spricht von einer "Funktion f" oder einer Funktion "$f(x)$" oder auch von einer Funktion "$y = f(x)$", z.B. von der Sinusfunktion oder der Funktion e^x oder von der Funktion $y = \sqrt{x}$.

1.18 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $f(x) = x^2$.
Man bestimme die Bildmengen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[-1, 2]$ *und* $]-1, 2]$,
sowie die Urbildmengen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[-2, 1]$ *und* $]0, 1]$.

$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f([-1, 2]) = f(]-1, 2]) = [0, 4]$.

$f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}([-2, 1]) = [-1, 1]$, $f^{-1}(]0, 1]) = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Gleichheit von Abbildungen (Funktionen)

$$\left.\begin{array}{l} f: \quad A \to B \\ \qquad \text{und} \\ g: \quad C \to D \end{array}\right\} \text{ sind } \textbf{gleich } (f = g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} A = C, \\ B = D \text{ und} \\ f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in A. \end{array}\right.$$

Damit zwei Funktionen gleich sind, müssen sowohl die *Definitionsbereiche*, als auch die *Wertebereiche* und (natürlich) die *Funktionswerte* für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gleich sein !

Man sagt auch, f und g sind **identisch gleich**: $f \equiv g$.

1.19 *Welche der folgenden Funktionen sind gleich?*

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\end{cases},\quad g:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\end{cases},\quad h:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x^2}{x}\end{cases},\quad k:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x^2-x}{x-1}\end{cases}.$$

Keine zwei der angegebenen Funktionen sind gleich!

Aber: Ist $A\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, so stimmen alle Funktionen auf A überein!

Die Angabe von Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion ist wichtig, jedoch manchmal lästig. Folgende Verabredung erleichtert die Arbeit:

Definitionsbereich und Wertebereich

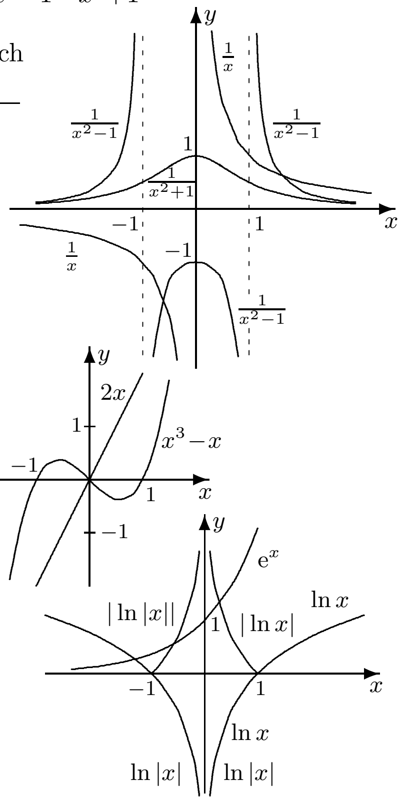
Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der *größtmögliche* Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.

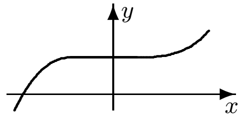
Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die *Bildmenge* $f(D)$ des Definitionsbereiches gemeint.

1.20 *Man bestimme den Definitionsbereich D und Wertebereich $f(D)$ folgender Funktionen. Skizze?*

$2x,\ x^3-x,\ \mathrm{e}^x,\ \ln x,\ \tan x,\ \arctan x,\ \dfrac{1}{x},\ \dfrac{x}{x},\ \dfrac{1}{x^2-1},\ \dfrac{1}{x^2+1},\ \ln|x|,\ \big|\ln x\big|,\ \big|\ln|x|\big|.$

Funktion	Definitionsbereich D	Wertebereich $f(D)$
$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^3-x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{>0}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\pi+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\frac{x}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\{1\}$
$\frac{1}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\mathbb{R}\setminus]-1,0]$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$]0,1]$
$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\lvert\ln x\rvert$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$
$\lvert\ln\lvert x\rvert\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$





f monoton wachsend

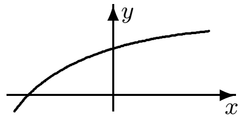
Eine Funktion $f : A \to B$, wobei $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sind[3], heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

streng monoton wachsend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Entspechend wird (*streng*) *monoton fallend* definiert.



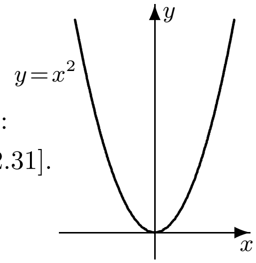
f streng mon. wachsend

1.21 *Man untersuche $y = x^2$ auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ auf Monotonie.*

$y = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ offensichtlich nicht monoton!

$y = x^2$ $(x \leq 0)$ ist streng monoton fallend,
denn (Rechnen mit Ungleich. Seite 47):
$a < b \leq 0 \Longrightarrow a^2 > ab \geq b^2 \Longrightarrow a^2 > b^2$. Ebenso zeigt man:

$y = x^2$ $(x \geq 0)$ ist streng monoton wachsend, siehe auch [2.31].



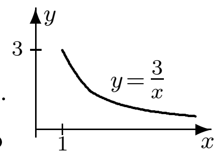
Beachte: Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend!

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *beschränkt*,

wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ (Schranke) gibt, mit $|f(x)| \leq S$ für alle $x \in A$.

Die reelle Funktion f ist also genau dann *beschränkt*, wenn die Funktionswerte in einem beschränkten Intervall liegen, z.B. im Intervall $[-S, S]$.

1.22 *Die Funktion $y = \dfrac{3}{x}$, $x \geq 1$ ist beschränkt.*



$x \geq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{3}{x} \leq 3$, also $|\frac{3}{x}| \leq 3$ für alle $x \geq 1$.

Oder: $f(x) = \frac{3}{x}$ ist für $x \geq 1$ positiv und monoton fallend, also liegen alle Funktionswerte zwischen $3 = f(1)$ und 0, also ist f beschränkt.

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, so nennt man $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion einer bzw. zweier (reeller) Veränderlicher. Diese Funktionen lassen sich bekanntlich als *Kurven* in der (x, y)–Ebene bzw. als *Flächen* im (x, y, z)–Raum darstellen (veranschaulichen):

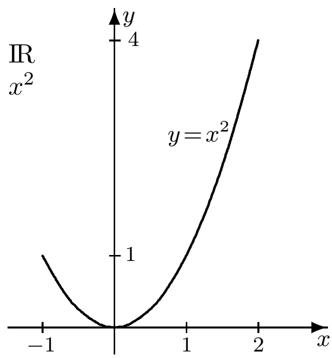
1.23 *Man stelle die Funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ als Kurve in der (x, y)–Ebene dar.*

Schreibweisen für diese Funktion: $f : \begin{cases} [-1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$

kurz: $f(x) = x^2$ oder $y = x^2$, für $-1 \leq x \leq 2$.

Die zugehörige Kurve in der (x, y)–Ebene,
d.h. der *Graph* der Funktion, ist die Menge:

$\{(x, y) \mid x \in [-1, 2] \,,\, y = x^2\}$,
also ein Teil der *Normalparabel* $y = x^2$.



[3]Wichtig, da $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ geordnet ist.