

Jürgen Ulm

Mathematische Methoden der Elektrotechnik



utb 5777



Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn

Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau Verlag · Wien · Köln

Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto

facultas · Wien

Haupt Verlag · Bern

Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn

Mohr Siebeck · Tübingen

Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen

Ernst Reinhardt Verlag · München

transcript Verlag · Bielefeld

Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart

UVK Verlag · München

Waxmann · Münster · New York

wbv Publikation · Bielefeld

Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

Prof. Dr. Jürgen Ulm lehrt Elektrotechnik und leitet das Institut für Digitalisierung und elektrische Antriebe (IDA) am Campus Künzelsau der Hochschule Heilbronn.

Jürgen Ulm

Mathematische Methoden der Elektrotechnik

expert verlag · Tübingen

Umschlagabbildung: © Jürgen Ulm

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2021 · expert verlag GmbH
Dischingerweg 5 · D-72070 Tübingen

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung
außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages
unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen,
Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Alle Informationen in diesem Buch wurden mit großer Sorgfalt erstellt. Fehler können dennoch
nicht völlig ausgeschlossen werden. Weder Verlag noch Autoren oder Herausgeber übernehmen
deshalb eine Gewährleistung für die Korrektheit des Inhaltes und haften nicht für fehlerhafte
Angaben und deren Folgen.

Internet: www.expertverlag.de
eMail: info@verlag.expert

Einbandgestaltung: Atelier Reichert, Stuttgart
CPI books GmbH, Leck

utb-Nr.: 5777
ISBN 978-3-8252-5777-4 (Print)
ISBN 978-3-8385-5777-9 (ePDF)
ISBN 978-3-8463-5777-4 (ePub)



Vorwort

Die Mathematik ist für den Naturwissenschaftler das universelle Werkzeug,

„...denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens“

(David Hilbert, dt. Mathematiker, 1862–1943).

Dem Erlernen der Anwendung des Werkzeugs gilt daher eine besondere Aufmerksamkeit. Wie so oft steht die Erkenntnis der Notwendigkeit gepaart mit der Motivation des Anwenders im Vordergrund. Ist das erklärte Ziel, physikalische Zusammenhänge mittels der Mathematik zu beschreiben, so ist hierzu nicht notwendigerweise eine mathematische Strenge vonnöten.

Wohl dürfte die Anwendung einer mathematischen Strenge diesem Anliegen kontraproduktiv gegenüberstehen. Des Weiteren gilt zudem der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz der Mathematik, welcher sogar der Mathematik selbst ihre Schranken zeigt.

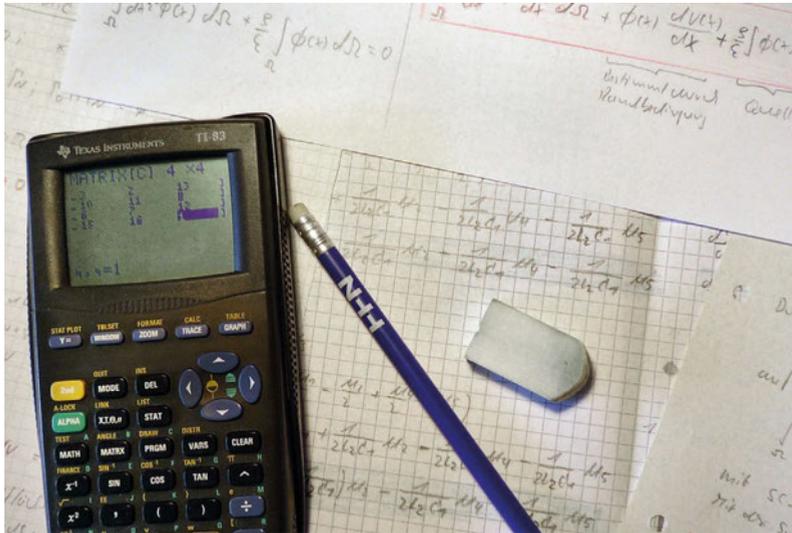
Erfahrungsgemäß ist ein Bestreben der Anwender zur mathematischen Strenge dann zu beobachten, wenn diese von der Mathematik und deren Möglichkeiten überzeugt und begeistert sind. Aus diesem Grund sollte der mathematischen Strenge zu Beginn nicht die höchste Priorität eingeräumt werden. Mathematik lebt aus der Freude ihrer Anwender und Anwendungen!

„Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so“

(Richard Feynman, Physiker und Nobelpreisträger, 1918–1988),
denn

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“

(Galileo Galilei, 1564–1642).



Taschenrechner, Papier, Bleistift und Radiergummi in Kombination mit Kaffee bilden eine gute Basis.

Das universelle Werkzeug der Elektrotechnik ist die Mathematik. Mit ausgewählten mathematischen Methoden werden ebenso ausgewählte Themengebiete der Elektrotechnik bearbeitet. Die Bearbeitung erfolgt durch Vorstellen der Grundlagen, Aufgabenbeschreibung und ausführliche Aufgabenlösung. Aus dem Vorgehen resultiert auch die Zielgruppe der Leser. Diese sind aus Sicht des Autors:

- Studierende der Ingenieurwissenschaften, welche naturwissenschaftliche Themenstellungen mittels mathematischer Methoden bearbeiten möchten.
- Softwareingenieure, welche Differenzialgleichungen in Matrizenform in Mikroprozessoren implementieren möchten.
- Simulationsingenieure, die gerne mal „was zu Fuß“ nachrechnen möchten.
- Messtechnikingenieure, welche einen Messwert von einem Ort benötigen, an welchem kein Sensor adaptiert werden und für diese Stelle nur gerechnet werden kann.
- Mathematikerschrockene, bleich im Gesicht, überlebt und es nun nochmals mit Mathe probieren möchten.

Da unsere Wissenschaft spiegelbildlich aufgebaut ist, lohnt sich beispielsweise das vertiefte Einarbeiten in eine wissenschaftliche Disziplin. Hier sei vorzugsweise die Elektrotechnik empfohlen. Durch Auswechseln der Koeffizienten einer Differenzialgleichung erobert sich der begeisterte Leser dieses Buches eine weitere wissenschaftliche Disziplin (daher die Verwendung des Begriffs „spiegelbildlich“). Wer beispielsweise elektrische Netzwerke (Maschen) lösen kann, kann demzufolge auch thermische, magnetische, mechanische und hydraulische Netzwerke lösen. Die mathematischen Grundlagen umfassen Rechenregeln, Definitionen, Matrizen, gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen sowie Koordinatensysteme. Sie bieten den Zugang zum Verständnis der gewählten mathematischen Methoden und Anwendungen in der Elektrotechnik. Eine elementare Anwendung in der Elektrotechnik bildet der LCR-Schwingkreis, welcher mit Differenzialgleichungen beschrieben wird und dessen Eigenschaften vorgestellt werden. Die Bildung des inneren Produkts zur Lösung von Differenzialgleichungen haben die Integraltransformation, die Momentenmethode und die Green'sche Methode gemeinsam. In die beiden zuletzt genannten Methoden wird ausführlich mit Hilfe von Beispielen eingeführt. Mit der Momentenmethode erfolgt die Überleitung zur Finite-Element-Methode (FEM) und Finite-Differenzen-Methode (FDM) anhand von Anwendungsbeispielen. Anhand der Momentenmethode wird zudem in die Eigenwertproblematik eingeführt. Die Entwicklung von unendlichen Reihen durch wechselweise Anwendung des Durchflutungs- und des Induktionsgesetzes führt auf Besselfunktionen sowie auf das Phänomen der Feldverdrängung mit Wirkung der Stromverdrängung im Leiter. Ausgewählte Normen sollen dem Leser Hinweise zur Erstellung von wissenschaftlichen Dokumentationen liefern. Es sei noch ein Hinweis zur erweiterten Nutzung des Buches gestattet: Neue Übungsaufgaben lassen sich durch einfaches Abändern der gestellten und bereits gelösten Originalaufgabe generieren. Die Abänderung der Originalaufgabe soll in der Weise vorgenommen werden, dass deren Lösung bereits im Voraus bekannt ist. Damit besteht die Möglichkeit, die Ergebnisse zu vergleichen und die Einarbeitung weiter zu vertiefen. Denn immer gilt

„Unsicher sind die Berechnungen der Sterblichen“

(Weisheitsliteratur).

Mit freundlichen Grüßen
der Autor
im Herbst 2021



HHN

HOCHSCHULE HEILBRONN
Reinhold-Würth-Hochschule
Campus Künzelsau

Campus Künzelsau Reinhold-Würth-Hochschule

Studieren in der Region der Weltmarktführer

Technik

- Automatisierungstechnik und Elektro-Maschinenbau*
- Elektrotechnik*
- Wirtschaftsingenieurwesen-Energiemanagement*
- Wirtschaftsingenieurwesen*

* Studienmodell studierbar

Studienmodelle der HHN

Kooperatives Studienmodell

- *Ausbildung und im Anschluss gleich ins Studium*

Studium mit vertiefter Praxis

- *Studieren, aber mit Unternehmensanbindung*



www.hs-heilbronn.de/campus-kuenzelsau

www.hs-heilbronn.de/campuskuh

Weitere Infos über die Institute siehe auch Anhang B.

Inhaltsverzeichnis

1	Erforderliche mathematische Grundlagen	1
1.1	Matrizen	1
1.1.1	Rechenoperationen mit Matrizen	2
1.1.2	Addition und Subtraktion zweier Matrizen	2
1.1.3	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	2
1.1.4	Quadratische Matrix	3
1.1.5	Einheitsmatrix	3
1.1.6	Determinante	3
1.1.7	Unterdeterminante oder Minor	5
1.1.8	Adjunkte oder algebraisches Komplement	5
1.1.9	Inverse Matrix	6
1.1.10	Transponierte einer Matrix	7
1.1.11	Komplex konjugierte Matrix	7
1.1.12	Hermiteische konjugierte Matrix	8
1.1.13	Hermiteische Matrix – selbstadjungierte Matrix	9
1.1.14	Orthogonalmatrix	9
1.1.15	Unitäre Matrix	10
1.1.16	Normalmatrix – Normale Matrix	11
1.1.17	Norm einer Matrix	11
1.1.18	Konditionierte Matrixgleichung und Konditionszahl	12
1.1.19	Eigenwert, Eigenvektor	13
1.1.20	Quadratische Matrizen – eine Zusammenfassung	15
1.2	Integral-, Differenzialgleichungen	17
1.2.1	Definitionen	17
1.2.2	Differenzierung skalarer Funktionen	18
1.2.3	Gewöhnliche Differenzialgleichungen höherer Ordnung	18

1.2.4	Partielle Differenzialgleichungen	20
1.2.5	Partielle Integration	22
1.2.6	Klassifikation von Differenzialgleichungen	22
1.2.7	Anfangswertaufgabe	23
1.2.8	Randwertaufgabe	24
1.2.9	Lineare Operatoren	25
1.2.10	Inneres Produkt	27
1.2.11	Starke Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	30
1.2.12	Schwache Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	30
1.3	Vektor-Klassifikation	31
1.4	Differenziationsregeln für Vektoren	31
1.5	Vektoroperatoren	32
1.5.1	Nabla- und Laplace-Operator	32
1.5.2	Vektoroperator Gradient	33
1.5.3	Vektoroperator Divergenz	34
1.5.4	Vektoroperator Rotation	35
1.5.5	Gegenüberstellung der Vektoroperatoren	35
1.5.6	Rechenregeln für den Nabla-Operator	36
1.5.7	Gegenüberstellung Skalar- und Vektorprodukt	37
1.6	Maxwell'sche Gleichungen	38
1.6.1	Beziehung zwischen Kreis- und Flächenintegral	38
1.6.2	Beziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral	39
1.6.3	Maxwell'sche Gleichungen – Differenzialform	40
1.6.4	Maxwell'sche Gleichungen – Integralform	40
1.6.5	Richtungszuordnung beteiligter Vektorfelder	40
1.7	Dirac'sche Deltafunktion	41
2	Koordinatensysteme	43
2.1	Kartesisches Koordinatensystem	43
2.2	Zylinderkoordinatensystem	45
2.3	Kugelkoordinatensystem	47
3	LCR-Parallel- und Reihenschwingkreis	51
3.1	Schwingkreise, Impedanzen und Resonanzen	51
3.2	Eigenfrequenz – Fehlerrechnung	55

3.3	Spannungsverläufe LCR-Reihenschwingkreis bei Frequenzvariation . . .	56
3.3.1	Spannungsverlauf über der Induktivität	57
3.3.2	Spannungsverlauf über Induktivität und Widerstand	59
3.3.3	Spannungsverlauf über dem Widerstand	61
3.3.4	Spannungsverlauf über der Kapazität	62
3.4	Gedämpfter, erzwungener LCR-Reihenschwingkreis	64
3.5	Gedämpfter, freier LCR-Reihenschwingkreis	67
3.6	Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis	69
3.7	Gedämpfter, erzwungener LCR-Parallelschwingkreis	70
3.8	Gedämpfter, freier LCR-Parallelschwingkreis	76
3.9	Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis	79
4	Stromverdrängung im Leiter	81
4.1	Stromverdrängung im Leiter – Modellbildung	82
4.2	Stromverdrängung im Leiter – Berechnungsergebnis	86
4.3	Stromverdrängung im Leiter – Simulationsergebnis	87
4.4	Stromverdrängung im Leiter – Zusammenfassung	89
5	Besselgleichung und Besselfunktion	91
5.1	Zur Person Wilhelm Friedrich Bessel	92
5.2	Besselgleichung des LCR-Parallelschwingkreises	93
5.3	Besselgleichung der Felddiffusionsgleichung	94
5.4	Besselfunktion zur Berechnung der Feldverteilung in einem Kondensator	97
5.4.1	Modellanordnung	97
5.4.2	Herleitung der Besselfunktion	98
5.5	Besselfunktion zur Berechnung der Flussdichteverteilung in einer Spule	101
5.5.1	Modellanordnung	101
5.5.2	Herleitung der Besselfunktion	101
5.6	Besselfunktion aus allgemeiner Form der Besselgleichung	104
6	Lösung von Differenzialgleichungen mittels Green'scher Funktionen	109
6.1	Zur Person George Green	109
6.2	Green'sche Integralsätze	112
6.3	PDE – Auf-, Integrationspunktanordnungen	114
6.4	PDE – Vorbereitung zur Lösung nach Green – Differenzialform	116
6.5	PDE – Vorbereitung zur Lösung nach Green – Integralform	118

6.5.1	Umstellen der PDE nach der zu lösenden Variable	118
6.5.2	Homogene Randbedingungen	120
6.5.3	Inhomogene Randbedingungen	121
6.5.4	Dirichlet-Randbedingungen	121
6.5.5	Neumann-Randbedingungen	121
6.6	PDE – Lösung der Poisson’schen DGL	122
6.6.1	Aufgabenbeschreibung	122
6.6.2	Lösungsweg	123
6.7	PDE – Lösung der Laplace’schen DGL	125
6.7.1	Aufgabenbeschreibung	125
6.7.2	Lösungsweg	126
6.8	ODE – Vorbereitung zur Lösung mit der Green’schen Funktion	128
6.8.1	Homogene Randbedingungen	130
6.8.2	Inhomogene Randbedingungen	130
6.8.3	Kontinuitäts- und Diskontinuitätsbedingungen	131
6.9	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)	133
6.9.1	Aufgabenbeschreibung	133
6.9.2	Lösungsweg I	134
6.9.3	Lösungsweg II	137
6.10	ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = \operatorname{cosec} x$	140
6.10.1	Aufgabenbeschreibung	140
6.10.2	Lösungsweg	140
6.11	ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = f(x)$	142
6.11.1	Aufgabenbeschreibung	142
6.11.2	Lösungsweg	142
6.12	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)	144
6.12.1	Aufgabenbeschreibung	144
6.12.2	Lösungsweg	145
6.13	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = x$	148
6.13.1	Aufgabenbeschreibung	148
6.13.2	Lösungsweg	148

7 Differenzialgleichungen und Finite Elemente 153

7.1	Beispiele aus der Physik für Differenzialgleichungen 1’ter Ordnung . . .	153
7.2	Beispiele aus der Physik für Differenzialgleichungen 2’ter Ordnung . . .	154

7.3	Finite Elemente	158
8	Von der Momentenmethode zur Galerkin-Methode	161
8.1	Grundprinzip der Momentenmethode (MOM)	161
8.2	Anmerkungen zur Momentenmethode	163
8.2.1	Matrix (l_{jk})	163
8.2.2	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktionen ϕ_n und w_k	164
8.3	Zur Person Boris Galerkin	164
8.4	Galerkins Idee	165
9	Traditionelle Galerkin-Methode	167
10	Galerkin-Methode – Lösung von $du/dx = u$	169
10.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	169
10.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion .	170
10.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	171
10.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	171
11	Galerkin-Methode – Lösung von $-d^2u/dx^2 = 4x^2 + 1$	175
11.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	175
11.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion .	176
11.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	176
11.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	178
12	Galerkin-Methode – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)	181
12.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	182
12.2	Schwache Formulierung der Differentialgleichung	182
12.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	183
12.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	183
13	Galerkin-Methode – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)	185
13.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	185
13.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion .	186
13.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	187
13.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	188

14 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz	191
14.1 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz Innenbereich des Leiters	193
14.1.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	193
14.1.2 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	194
14.1.3 Lösung des linearen Gleichungssystems	195
14.2 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz Außenbereich des Leiters	196
14.2.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	196
14.2.2 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	197
14.2.3 Lösung des linearen Gleichungssystems	198
14.3 Gegenüberstellung von FEM- mit Galerkin-Ergebnis	199
15 Galerkin-FEM	201
15.1 Galerkin-FEM – Was wird gelöst?	201
15.2 Galerkin-FEM – Vorgehen zur Lösung	202
16 Galerkin-FEM – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)	205
16.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	206
16.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	207
16.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	207
16.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	209
16.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	210
16.6 Lösung des linearen Gleichungssystems	214
17 Galerkin-FEM – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)	217
17.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	218
17.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	219
17.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	219
17.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	219
17.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	219
17.6 Lösung des linearen Gleichungssystems	220
18 Galerkin-FEM – Elektrostatische Feldberechnung	223
18.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	223
18.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	224
18.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	224
18.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	224

18.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	226
18.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	228
19	Galerkin-FEM – Ortsabhängige Temperaturberechnung	231
19.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	231
19.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	233
19.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	233
19.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	233
19.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	234
19.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	235
19.7	Diffusionsvorgang vollendet	238
20	Galerkin-FEM – Ortsabhängige Magnetfeldberechnung	241
20.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	241
20.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	243
20.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	243
20.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	243
20.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	244
20.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	245
21	Einführung in die Finite-Differenzen-Methode	251
21.1	Numerische Notation der linearen Felddiffusionsgleichung	251
21.2	Zu den Personen Crank und Nicolson	252
21.3	Lösung mit impliziter Methode nach Crank-Nicolson	252
21.3.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixgleichung	253
21.3.2	Lösung der Matrixgleichung	254
21.3.3	Anwendungsbeispiel	257
21.4	Lösung mit expliziter Methode	260
21.4.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixgleichung	260
21.4.2	Lösung der Matrixgleichung	261
21.4.3	Anwendungsbeispiel	262
22	Anwendungen der FEM zur Produktentwicklung	269
22.1	Analyse eines Proportionalmagnets	269
22.1.1	Preprocessing	270
22.1.2	Processing	271

22.1.3	Postprocessing	272
22.2	Synthese eines planaren Asynchron-Scheibenläufermotors	273
22.2.1	Preprocessing	273
22.2.2	Processing	273
22.2.3	Postprocessing	274
22.2.4	Musterbau des planaren Asynchronmotors	274
23	Virtuelle Produktentwicklung	277
23.1	Kopplung zwischen FEM- und Optimierungstool	277
23.2	Mehrzielloptimierung – Pareto-Optimierung	278
23.3	Optimierungsbeispiel Elektromagnet	279
23.3.1	Monte Carlo-Methode	280
23.3.2	Partikelschwarm-Methode	282
23.3.3	Evolutionäre Methode	282
23.3.4	Diskussion der Ergebnisse	283
24	Eigenwertprobleme	285
24.1	Eigenwertproblem – Einführung	285
24.2	Eigenwertproblem – Momentenmethode	286
24.3	Eigenwertproblem – kanonische Form	287
25	Eigenwertproblem-MOM – Lösung von $-d^2u/dx^2 = \lambda u$	289
25.1	Aufgabenbeschreibung	289
25.2	Lösungsweg und Lösung	290
25.3	Lösung für 1’ter Ordnung	290
25.4	Lösung für 2’ter Ordnung	294
26	Gemeinsamkeiten von Methoden zur Lösung von DGLs	297
26.1	Momentenmethode (MOM)	297
26.2	Integraltransformation	299
26.3	Green’sche Methode	300
27	Wissenswertes zur Modellbildung	303
27.1	Kategorien der Modellbildung	303
27.2	Analytik contra Numerik	304
28	Nützliche Normen	307

Literaturverzeichnis	311
A Anhang	317
A.1 MATLAB-Code – Wärmediffusionsskript	317
A.2 MATLAB-Code – Magnetfelddiffusionsskript	321
A.3 Toolvergleich – MATLAB vs. COMSOL	327
B Campus Künzelsau – Inside	329
Index	331

Symbole und Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	Einheit
A	Koeffizient, Matrix	
A	Fläche	m^2
B	Koeffizient, Matrix	
B, \vec{B}	magnet. Flussdichte, Vektor der magnet. Flussdichte	Vs/m^2
B_h	Interpolations-, Ansatzfunktion	
C	Koeffizient, Matrix	
C	Kapazität	As/V
C	Wärmekapazität	J/K
D	Koeffizient, Matrix	
D	Ladungsdichte	As/m^2
D	Diskrimminante	
E	Koeffizient, Matrix	
E, \vec{E}	elektr. Feldstärke, Vektor der elektr. Feldstärke	V/m
\mathcal{E}	Längenbezogene elektrische Feldstärke	V/m^2
F	Koeffizient, Funktion	
F	Kraft	$N, kgm/s^2$
G	Green'sche Funktion	
G	Koeffizient	
H, \vec{H}	magnet. Feldstärke, Vektor des magnet. Feldes	A/m
H_Φ	Interpolations-, Ansatzfunktion	
I	Strom	A
J, \vec{J}	elektr. Stromdichte, Vektor der elektr. Stromdichte	A/m^2

Symbol	Bedeutung	Einheit
K	Konstante	
L	Induktivität	Vs/A
M	Matrix	
N	Anzahl Knoten, Laufvariable, Windungszahl	
P	Leistung	W
P	Polynomfunktion	
Q	Ladung	As
R	Residuum	
R	Radius	m
R	Widerstand	Ω
S	Matrix	
S_P	Scheitelpunkt	
U	Spannung	V
V	Volumen	m^3
W	Wronski-Determinante	
X	Blindwiderstand, Reaktanz	Ω
$Z, \underline{Z} $	Scheinwiderstand, Betrag der Impedanz	Ω
\underline{Z}	Impedanz (komplexe Impedanz)	Ω
a	Koeffizient	
a_0	Beschleunigung	m/s^2
b	Dämpfungskonstante	kg/s
c	Konstante	
c	Federkonstante	N/m
c	Lichtgeschwindigkeit	m/s
c	spezifische Wärmekapazität	$J/(kgK)$
d	Durchmesser	m
e	e-Funktion	
\vec{e}	Einheitsvektor	
f	Hilfsvariable, Funktion, Matrix, Spaltenvektor	
g	Hilfsvariable, Funktion, Matrix	
h	Elementlänge	m

Symbol	Bedeutung	Einheit
i	Laufvariable	
i	Strom	A
j	Laufvariable	
j	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
k, \underline{k}	Konstante, komplexe Konstante	
l	Länge	m
l	Matrix	
m	Laufvariable	
m	Masse	kg
n	Normale, Anzahl Teilintervalle	
p	Impuls	$kg\ m/s$
p	Variable, Funktion	
r	Radius	m
s	Konstante	
t	Zeit	s
u	Funktion, Interpolations-, Ansatzfunktion	
u	Spannung	V
\hat{u}_0	Spannungsamplitude	V
v	Funktion, Interpolations-, Ansatzfunktion	
v	Geschwindigkeit	m/s
w	Gewichts-, Wichtungs-, Test-, Formfunktion	
x	Koordinate, Weg	m
y	Koordinate, Weg	m
y	Funktion	
z	Koordinate	m
Γ	Rand des FEM-Gebietes	
Δ	Delta, differenziell	
Θ	Durchflutung	A
Φ	magnetischer Fluss	Vs
Ψ	verketteter magnetischer Fluss	Vs
Ω	Gebiet, Teilgebiet, Element	

Symbol	Bedeutung	Einheit
α	Koeffizient	
β	Koeffizient	
γ	Koeffizient, Randwert	
δ	Abklingkoeffizient	
ε	Permittivität	$As/(Vm)$
ε_0	Permittivität des Vakuums $[8,8542 \cdot 10^{-12} As/(Vm)]$	$As/(Vm)$
v	Temperatur	$^{\circ}C$
κ	spezifische elektrische Leitfähigkeit	$m/(\Omega mm^2)$
λ	Wärmeleitfähigkeit	$W/(mK)$
λ	Eigenwert	
μ	Permeabilität	$Vs/(Am)$
μ_0	Permeabilität des Vakuums $[4\pi \cdot 10^{-7} Vs/(Am)]$	$Vs/(Am)$
ρ	Dichte	kg/m^3
ρ	Raumladungsdichte	As/m^3
τ	Zeitkonstante	s
v_h	Ansatz-, Testfunktion	
φ	Potenzial	V
φ	Interpolations-, Ansatzfunktion	
ϕ	Entwicklungs-, Basis-, Dreiecksfunktion	
ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz	$1/s$
\mathcal{L}	Linearer Operator	
\mathcal{M}	Linearer Operator	
\mathcal{O}	Null-Operator	
\mathcal{I}	Identitätsoperator	
∇	Nabla-Operator	
Δ	Delta-Operator	

Kapitel 1

Erforderliche mathematische Grundlagen

Die zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen erforderlichen Grundlagen sind in diesem Kapitel zusammengestellt worden. Diese beinhalten im Wesentlichen Matrizen, Definitionen und Klassifikationen von Differenzialgleichungen sowie Anfangs- und Randwertaufgaben und Vektoroperatoren. Hierzu besonders zu empfehlende Literatur sind [3], [51] sowie [57].

1.1 Matrizen

Die Matrixschreibweise fasst die Berechnungen mit Funktionen zusammen und erhöht damit die Übersicht. Hierzu vergleichbar fasst ein Vektoroperator Ableitungen zusammen, welche mit einem einfachen Symbol (Nabla-, Laplace-Operator) gekennzeichnet werden. Die Matrixschreibweise (Matrixgleichungen) ermöglicht mittels den in der Literatur bekannten Lösungsverfahren die numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen. Daher erhalten Matrix und Matrizen eine besondere Aufmerksamkeit. Hier werden ausgewählte Matrizenoperationen vorgestellt. Diese beinhalten die erforderlichen Matrizen-Rechenregeln, die Invertierung, Multiplikation einer Matrix, Matrixtypen sowie Determinantenberechnungsregeln u. a. m. Als empfehlenswerte Literatur sei hier auf [51], S. 268 ff. und [27], S. 12 ff. (Zufallsmatrizen – Neue universelle Gesetze) verwiesen.

1.1.1 Rechenoperationen mit Matrizen

In Tab. 1.1 werden die wichtigsten algebraischen Axiome zusammengefasst.

Tabelle 1.1: Zusammenfassung der wichtigsten Rechenregeln

Assoziativgesetz	$\mathbf{A} (\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB}) \mathbf{C}$
Distributivgesetz	$\mathbf{A} (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
	$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
Transponieren	$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Man beachte, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, was

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

bedeutet.

1.1.2 Addition und Subtraktion zweier Matrizen

Zwei Matrizen gleichen Typs werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre entsprechenden Elemente addiert oder subtrahiert:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ik} \pm b_{ik}) = \mathbf{C},$$

mit $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $k = 1, 2, 3, \dots, n$ und \mathbf{C} die Summen- oder Differenzmatrix. Addition und Subtraktion sind nur für Matrizen gleichen Typs (m,n) definiert.

1.1.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die Multiplikation einer Matrix mit dem Skalar λ erfolgt durch Multiplikation eines jeden einzelnen Matrixelementes mit dem Skalar

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Bei der skalaren Multiplikation findet das Assoziativgesetz und Distributivgesetz Anwendung, da $\lambda = \alpha \cdot \beta$ oder $\lambda = \alpha \pm \beta$ gleichermaßen sein kann.

1.1.4 Quadratische Matrix

Quadratische Matrizen besitzen die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, d. h. $m = n$ mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beispiele für quadratische Matrizen sind die Diagonalmatrizen, die symmetrischen Matrizen, Normalmatrizen, hermitesche Matrizen und die Einheitsmatrizen.

1.1.5 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix \mathbf{E} ist eine Diagonalmatrix, in welcher alle außerhalb der Hauptdiagonalen liegenden Elemente verschwinden

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und $a_{ii} = 1$ ist. Die Einheitsmatrix wird gelegentlich auch als Identitätsmatrix bezeichnet. Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix. Sie ist trotz ihrer Schlichtheit bedeutend. Beispielsweise ist das Ergebnis einer Multiplikation von der Einheitsmatrix mit einer Matrix wieder die Matrix selbst.

1.1.6 Determinante

Die Determinante erlaubt die Untersuchung von Matrizen nach „Mustern“, beispielsweise zur Untersuchung von Lösungen von Differenzialgleichungen (siehe hierzu die Wronski-Determinante). Determinanten werden von quadratischen Matrizen berechnet. Die Determinante einer 2-reihigen, quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ ist die reelle Zahl

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Eine Determinante wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem die Elemente einer einzigen Zeile mit dem Skalar multipliziert werden:

$$\lambda \det \mathbf{A} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{12} a_{21}.$$

Unter der Determinante einer quadratischen (3,3)-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ versteht man die Zahl

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die 3-reihige Determinante wird nach der Regel von Sarrus

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

berechnet. Eine Determinante nimmt den Wert Null an, wenn

- alle Elemente gleich Null sind,
- zwei Zeilen oder Spalten gleich sind,
- zwei Zeilen oder Spalten zueinander proportional sind,
- eine Zeile oder Spalte als Linearkombination der übrigen Zeilen oder Spalten darstellbar ist.

Ein Beispiel hierzu ist

$$\det \mathbf{D} = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -816$$

die Determinante des Dürer-Quadrates aus seinem Kupferstich *MELENCOLIA I*.

1.1.7 Unterdeterminante oder Minor

Werden bei einer n -reihigen Determinante m beliebige Zeilen und m beliebige Spalten gestrichen, so entsteht eine $(n - m)$ -reihige Determinante, die als Unterdeterminante ($n - m$)-ter Ordnung oder Minor bezeichnet wird. Ein Beispiel hierzu ist die Determinante \mathbf{A} , deren Minor $\mathbf{M}_{1,2}$ gesucht wird. Dieser wird durch Streichen der ersten Zeile und zweiten Spalte erreicht:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M}_{1,2} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-4 \cdot 1) = 13.$$

Unterdeterminanten werden beispielsweise zur Berechnung der inversen Matrix erforderlich und bilden die Vorstufe zur Berechnung der Adjunkte.

1.1.8 Adjunkte oder algebraisches Komplement

Die Adjunkte oder das algebraische Komplement \mathbf{A}_{adj} entsteht durch Unterdeterminantenbildung der Matrix \mathbf{A} nach der in Abb. 1.1 dargestellten Vorgehensweise. Eine anschließende Multiplikation der Elemente mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+k}$, der i -ten Zeile und k -ten Spalte, welche in der Abb. 1.1 fettgedruckt dargestellt sind sowie das Transponieren führt zur Adjunkte \mathbf{A}_{adj} der Matrix \mathbf{A} .

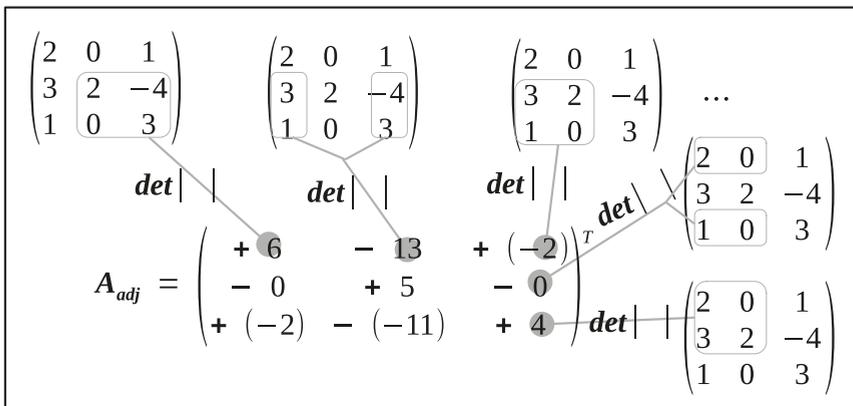


Abbildung 1.1: Vorgehensweise zur Entwicklung der Adjunkte