utb.

Ingolf Terveer

Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

mit über 300 Aufgaben und Online-Lösungen

5. Auflage

utb 8506

Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn
Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau · Wien · Köln
Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto
facultas · Wien
Haupt Verlag · Bern
Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn
Mohr Siebeck · Tübingen
Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen
Psychiatrie Verlag · Köln
Ernst Reinhardt Verlag · München
transcript Verlag · Bielefeld
Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart
UVK Verlag · München
Waxmann · Münster · New York
wbv Publikation · Bielefeld
Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

Dr. Ingolf Terveer ist Akademischer Oberrat am Institut für Wirtschaftsinformatik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.

Ingolf Terveer

Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

mit über 300 Aufgaben und Online-Lösungen

5., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

UVK Verlag · München

Umschlagabbildung: © Hermann Littich · iStock
Autorinnenbild: © privat

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

DOI: https://doi.org/10.36198/9783838588186

5., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage
4., überarbeitete und erweiterte Auflage 2019
3., überarbeitete Auflage 2012
2., überarbeitete und aktualisierte Auflage 2008 (als „BWL-Crash-Kurs Mathematik")
1. Auflage 2005 (als „BWL-Crash-Kurs Mathematik")

Internet: www.narr.de
eMail: info@narr.de

Einbandgestaltung: siegel konzeption | gestaltung
CPI books GmbH, Leck

utb-Nr. 8506
ISBN 978-3-8252-8818-1 (Print)
ISBN 978-3-8385-8818-6 (ePDF)

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Inhalt

Vorwort zur fünften Auflage

Das vorliegende Lehrbuch soll Ihnen, liebe Studienanfängerinnen und -anfänger der Wirtschaftswissenschaften, eine Einführung in die mathematischen Grundlagen der Analysis und linearen Algebra geben. Es kann entweder als Begleitlektüre einer ein- bis zweisemestrigen Einführungsveranstaltung in die Wirtschaftsmathematik genutzt und dann „linear“ gelesen werden oder verschiedene Teilveranstaltungen unterstützen, wobei die inhaltlichen Abhängigkeiten in Abbildung 0.1 berücksichtigt werden sollten:

- Die „Analysis in einer Variablen“ wird in den Kapiteln 2 bis 9 behandelt.
- Die „Lineare Algebra“ ist Gegenstand der Kapitel 10 bis 13. Für Abschnitte 12.4 und 12.5 sollte man sich etwas mit der Betragsfunktion und den trigonometrischen Funktionen auszukennen und ggf. Abschnitte 6.4 und 6.5 erarbeiten.
- Die „Analysis in mehreren Variablen“ ist Thema der Kapitel 14 und 15 und erfordert die die Kenntnis von Ableitungen in einer Variablen - empfehlenswert ist es deshalb, zuvor die Analysis in einer Variablen erarbeitet zu haben. Bei Aussagen zu Ableitungen, die Vektoren oder Matrizen verwenden, sollte man die entsprechenden Notationen aus Kapitel 12 und 13 kennen. Die meisten Aussagen werden aber explizit auch für Funktionen von zwei Variablen ohne Matrix- und Vektorkalkül formuliert und anhand von dazu passenden Beispielen besprochen.

Meine Erfahrung mit Studierenden im ersten Semester zeigt, dass elementare Themen wie Terme und Gleichungen sowie deren Umformungen – alles in allem unerlässliche Basiskompetenzen für die Themen der Analysis und linearen Algebra – in der Schule oft nicht explizit behandelt geschweige denn ausreichend geübt wurden:

- Zum einen mögen landesspezifische Unterschiede in den inhaltlichen Vorgaben sowie in der Unterrichtsdurchführung für diese Defizite verantwortlich sein.
- Studierende, die Mathematik „nur“ als Grundkurs oder nicht einmal als Abiturfach hatten, bringen oft besonders wenig Grundlagenkenntnisse mit ins Studium.
- Schließlich scheint auch der überzogene Gebrauch von CAS-Rechnern in der Schule dazu zu führen, dass die genannten Grundkenntnisse vernachlässigt wurden und an der Universität erst mühsam erarbeitet werden müssen.

Neben dem unmittelbaren Nutzen dieser Grundkenntnisse, aber auch anderen der im Lehrbuch behandelten Themen, werden Sie später feststellen, dass die hartnäckige Beschäftigung mit den sehr oft unangenehm komplexen Begriffen und Methoden Ihr Abstraktionsvermögen auch dann im Studium unterstützt, wenn es einmal nicht primär um mathematische Anwendungen geht.

Wenn Sie sich jetzt möglicherweise in einer der oben erwähnten „Gruppen mit Nachholbedarf“ wiederfinden, so kann Ihnen das einführende (und neu in dieser Auflage hinzugefügte) Kapitel 1 dieses Lehrbuchs einen Einstieg geben, an den Grundkenntnissen zu arbeiten. Beim ersten Lesen kann dieses Kapitel gegebenenfalls übersprungen werden; sollten Sie aber während der Lektüre der anderen Kapitel mit den entsprechenden Techniken Schwierigkeiten haben, insbesondere eben beim Umformen von Termen, Umgang mit Brüchen und Variablen und dem Auflösen von Gleichungen, so sollten Sie

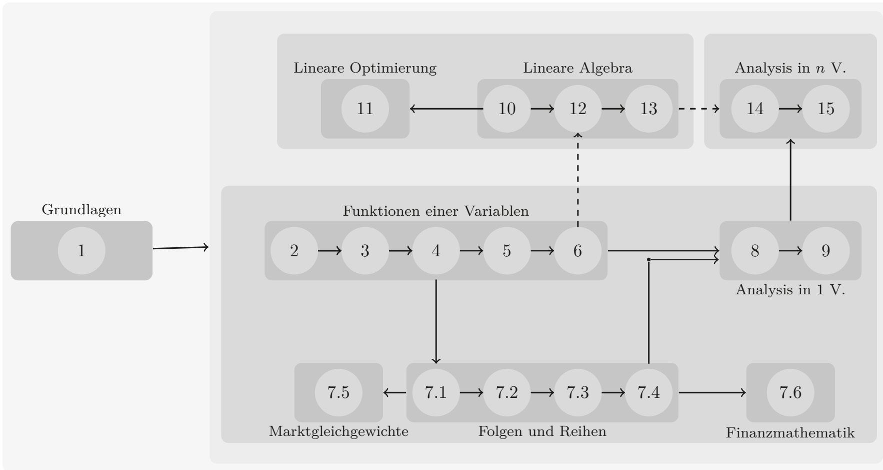


Abbildung 0.1: Abhängigkeiten zwischen den Themenblöcken im Lehrbuch

Kapitel 1 doch noch einmal lesen und insbesondere die Übungsaufgaben darin bearbeiten, ehe Sie mit der Lektüre der anderen Kapitel fortfahren. Überhaupt werden Sie erst durch die eigenständige Bearbeitung von Übungsaufgaben die erforderliche Kompetenz im Umgang mit mathematischen Konzepten erhalten. Das Buch enthält deshalb über 300 Aufgaben (40 mehr als in der vergangenen Auflage) mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, gerade bei Standardaufgaben oft mit parallelen Teilaufgaben. Hinzu kommen noch fünf Übungsklausuren.

Dateien mit Lösungsvorschlägen zu den Aufgaben sind online frei zugänglich unter
`https://www.wi.uni-muenster.de/de/institut/statistik/personen/ingolf-terveer/zusatzmaterial-mawiwi`

In der Darstellung wird Ihnen vielleicht auffallen, dass einige Passagen wie im vorliegenden Absatz in zurückgenommener Weise formatiert sind. Es handelt sich dabei oft um Herleitungen, in denen die Grundideen der zugehörigen mathematischen Beweise zusammengefasst sind (welche dann mit dem Symbol □ enden) oder die einen Ausblick bzw. eine Verallgemeinerung geben. Auch wenn dieses Lehrbuch Mathematik behandelt, so ist es doch in erster Linie nicht für Mathematikerinnen und Mathematiker geschrieben, so dass Sie die genannten Passagen vielleicht erst einmal überschlagen möchten; für die weitere Lektüre bedeutet dies keinen Nachteil. Auch die als Exkurs gekennzeichneten Abschnitte können erst überschlagen bzw. bei Interesse/Bedarf gelesen werden.

Vor allem wurde der nach der zweiten Auflage in den „Analysis-Brückenkurs“ ausgelagerte und dort weiter entwickelte Bereich „Analysis in einer Variablen“ nun wieder eingebunden, so dass alle relevanten Themen jetzt in einem Lehrbuch vereint sind. Dabei wurden viele Passagen beider Lehrbücher - auch infolge von Anregungen aus meinen Lehrveranstaltungen - überarbeitet und ergänzt, insbesondere erfuhren sämtliche Grafiken und Schaubilder, deren Zahl jetzt bei über 200 liegt, eine Sonderbehandlung. Schließlich wurden durch zahlreiche Querverweise Bezüge zwischen den zusammengeführten Inhalten hergestellt. Bisher aufgefallene Fehler der vierten Auflage wurden beseitigt, neue sind bei der Überarbeitung hoffentlich nicht dazugekommen.

Münster, im August 2023 Ingolf Terveer

Aus den Vorworten früherer Auflagen

(**August 2005**) Dieses Lehrbuch richtet sich an Sie, die Studienanfängerinnen und -anfänger der Wirtschaftswissenschaften. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die ich an der Universität Münster für Erstsemester im Fachbereich Wirtschaftswissenschaften halte, und behandelt die Grundlagen der linearen Algebra und der Analysis mit der Ausrichtung auf wirtschaftliche Anwendungen, wie sie in einer ein- bis zweisemestrigen Veranstaltung vermittelt werden. (...)

(**August 2007**) Mit der zweiten Auflage des Lehrbuches wurde einige Themen aus Kapitel 6 (Folgen und Reihen) zugunsten einer ausführlicheren Behandlung von Gleichgewichtspreisen beschnitten. Damit verbunden findet sich in Kapitel 7 jetzt eine kurze Einführung in die Wohlfahrtsrechnung als Anwendung der Integralrechnung. Kapitel 8 behandelt die Optimierung unter Nebenbedingungen jetzt in einer organischeren Form: zunächst werden die notwendigen Bedingungen behandelt, so dass der Einstieg in die Lagrange-Methode etwas einfacher fallen sollte; die komplizierteren hinreichenden Bedingungen wurden in einem anschließenden Abschnitt zusammengefasst; das Konzept des Randwertvergleichs wurde dabei auf ökonomische Standardsituationen abgestimmt.

Neben den etwas gestrafften Übungsaufgaben finden Sie nun drei Übungsklausuren, die jeweils den Inhalt des Buches abdecken und für eine Klausurdauer von 120 bis 180 Minuten konzipiert sind. (...)

(**Oktober 2012**) In der dritten Auflage wurden größere „Umbauten“ vorgenommen (...)

- In der linearen Algebra ist vor allem der Abschnitt über Vektoren recht umfassend neugestaltet worden, die Konzepte Linearkombination, lineare Unabhängigkeit und Basis wurden deutlicher herausgestellt; zudem findet sich in diesem Kapitel jetzt auch ein Abschnitt über Projektionen.
- Das Thema Folgen und Reihen wurde um spezifische Aspekte der Finanzmathematik ergänzt.
- (...)
- Bei der Optimierung ohne Nebenbedingungen finden Sie jetzt eine kurze Darstellung numerischer Verfahren; bei der Optimierung unter Nebenbedingungen schließlich illustrieren mehr typische Beispiele die Herangehensweise beim Randwertvergleich.

(...) Die Aufgaben wurden überarbeitet, ergänzt und finden sich jetzt nach jedem Abschnitt, hervorgehoben durch ?. Wenn Sie den Stoff des Buches systematisch erarbeiten wollen, so empfehle ich Ihnen, die Aufgaben eines jeden Abschnittes zunächst weitgehend zu lösen, bevor Sie den nächsten Abschnitt angehen. Einige Kapitel schließen zusätzlich mit vertiefenden Aufgaben. Ausführliche Lösungen sind im Web-Auftritt zum Buch verfügbar,(...)

(**Februar 2019**) Mit dem neuen Kapitel „Lineare Optimierung“ (Simplex-Algorithmus, Zweiphasenmethode) weist die vierte Auflage eine größere Erweiterung auf. Hierzu wurden auch die Übungsklausuren angepasst. Im Detail gibt es auch in folgenden Teilen inhaltliche Änderungen:

- In Kapitel 4.4 wird die Leibniz-Regel anhand von $3x3$-Matrizen erklärt und nachfolgend genutzt, um die Determinantenregeln bei Zeilenumformungen zu erläutern.
- Kapitel 5.5 enthält nun eine kurze Herleitung der Grenzwertformel für die stetige Verzinsung.
- In Kapitel 7.4 wurden einige Beispiele ersetzt, insbesondere das einführende Beispiel zum Envelope-Theorem in Abschnitt 7.4.1.

(...) Die Übungsaufgaben werden in einem zweispaltigen Format dargestellt. Matrizen haben nun runde anstatt eckiger Klammern. (...)

1 Einordnung und Grundlagen

Übersicht

Zu Beginn wollen wir einige grundlegende mathematische Begriffe und Techniken besprechen, die in der Wirtschaftsmathematik vielfach verwendet werden.

1.1 Einordnung

Die Mathematik ist für die Wirtschaftswissenschaften eine Hilfswissenschaft, die immer dann herangezogen wird, wenn sich im ökonomischen Kontext ein quantitatives Problem ergibt. Dabei nimmt die Mathematik in der Problemlösung eine operative Rolle ein, wie sie in Abbildung 1.1 dargestellt wird. Man versucht zunächst, das konkrete Problem in ein mathematisches Modell zu überführen, welches gleich einer Karikatur die wesentlichen Aspekte des Problems erfasst. Aus dem realen Problem wird somit ein mathematisches Problem, für welches die Mathematik ein Verfahren bzw. einen Algorithmus zur Verfügung stellt, oft unter Verwendung informatischer Techniken, mit welchem zunächst eine mathematische Aussage gewonnen wird. Diese Ausssage muss im nächsten Schritt in das reale Problem zurücktransportiert werden. Die gewonnene Antwort wird dann dahingehend geprüft, ob sie für die Problemstellung eine zufrieden stellende Lösung ist. Manchmal stellt sich heraus, dass dies nicht der Fall ist, etwa weil eine wichtige Anforderung im realen Problem übersehen wurde. Dann beginnt man von neuem mit einer konkretisierten Problemstellung, passt das mathematische Modell an, findet eine modifizierte mathematische Aussage hierzu und überträgt diese wieder zurück in die Realität. Diese Schritte müssen oft mehrfach iteriert werden, wie wir im folgenden Beispiel illustrieren:

Beispiel 1.1 (Produktmengenplanung)
Für ein Produkt liegen Bestellungen an fünf aufeinanderfolgenden Tagen vor:

Tag	1	2	3	4	5
Absatz	4	12	11	11	6

[1] **Problemstellung**: Das Produkt kann täglich produziert und auch für den Absatz an einem folgenden Tag gelagert werden, dabei können täglich jeweils höchstens 10 Stück produziert und gelagert werden. Angenommen wird, dass das Lager am Tag 1 leer ist. Es fällt auf, dass an den Tagen 2 bis 4 mehr benötigt wird als produziert werden kann, so dass am Tag 1 auch für das Lager und nicht nur für die Nachfrage am Tag 1 produziert werden muss. Zu klären ist hier, wieviele Einheiten tatsächlich täglich hergestellt werden müssen. Im folgenden soll die Lösungsfindung anhand des Schemas in Abbildung 1.1 beschrieben werden:

[2] **Mathematisches Modell**: Dazu gehören gehören neben den Tagesabsätzen

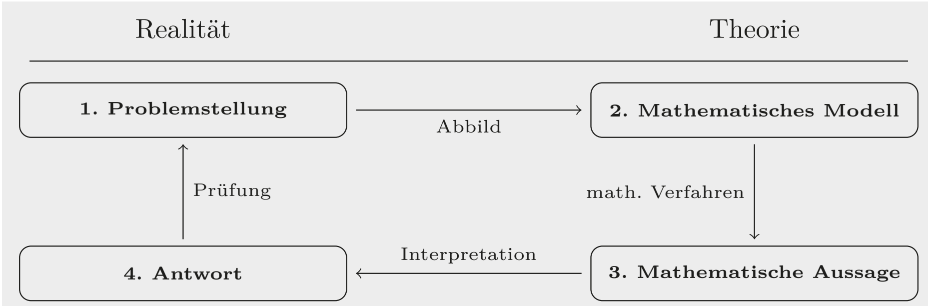


Abbildung 1.1: Operative Rolle der Wirtschaftsmathematik

noch „Entscheidungsvariablen" $p_1, \dots, p_5$ für die Tagesproduktion sowie Variablen $\ell_1, \dots, \ell_5$, welche den Lagerbestand am Ende von Tag 1,...,5 beschreiben. Die Lagerbestände ändern sich dabei durch Auffüllen mit der Produktion und Abgreifen der Absatzmenge. Konkret gilt:

$$\begin{array}{lcccccc} \ell_1 & = & & & p_1 & - & 4 \\ \ell_2 & = & \ell_1 & + & p_2 & - & 12 \\ \ell_3 & = & \ell_2 & + & p_3 & - & 11 \\ \ell_4 & = & \ell_3 & + & p_4 & - & 11 \\ \ell_5 & = & \ell_4 & + & p_5 & - & 6 \end{array}$$

[3] **Mathematische Aussage**: Wir versuchen nun ein möglichst einfaches Verfahren: An jedem Tag wird die maximal mögliche Menge hergestellt, die mathematische Aussage hierzu ist $p_1 = \cdots = p_5 = 10$; damit ergeben sich die Lagerbestände

$$\begin{array}{lcccccccc} \ell_1 & = & & & 10 & - & 4 & = & 6 \\ \ell_2 & = & 6 & + & 10 & - & 12 & = & 4 \\ \ell_3 & = & 4 & + & 10 & - & 11 & = & 3 \\ \ell_4 & = & 3 & + & 10 & - & 11 & = & 2 \\ \ell_5 & = & 2 & + & 10 & - & 6 & = & 6 \end{array}$$

[4] **Antwort**: Die Auftragserbringung ist durch maximale Produktion möglich, die maximale Lagerkapazität wird nicht überschritten.

Die Prüfung der Antwort ergibt, dass das Lager am Ende nicht leer ist, was zusätzliche und vermeidbare Kosten verursacht.

[1] **Problemstellung**: In der bisherigen Problemstellung soll das Lager am Ende ebenfalls leer sein, um vermeidbare Kosten zu reduzieren.

[2] Mathematisches Modell: das bestehende Modell wird um eine Bedingung an ℓ_5 erweitert:

$$\begin{array}{lcccccc} \ell_1 & = & & & p_1 & - & 4 \\ \ell_2 & = & \ell_1 & + & p_2 & - & 12 \\ \ell_3 & = & \ell_2 & + & p_3 & - & 11 \\ \ell_4 & = & \ell_3 & + & p_4 & - & 11 \\ \ell_5 & = & \ell_4 & + & p_5 & - & 6 \\ \ell_5 & = & 0 & & & & \end{array}$$

[3] **Mathematische Aussage**: Man verringert die Produktion am letzten Tag so, dass das Lager leer ist, indem am letzten Tag 6 Einheiten weniger produziert werden, die restlichen Produktionen bleiben erhalten: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 10, p_5 = 6$. Daraus ergeben sich die Lagerbestände

$$\begin{array}{lcccccccc}
\ell_1 & = & & & 10 & - & 4 & = & 6 \\
\ell_2 & = & 6 & + & 10 & - & 12 & = & 4 \\
\ell_3 & = & 4 & + & 10 & - & 11 & = & 3 \\
\ell_4 & = & 3 & + & 10 & - & 11 & = & 2 \\
\ell_5 & = & 2 & + & 4 & - & 6 & = & 0
\end{array}$$

[4] **Antwort**: Durch Ausschöpfen der Produktionskapazität an Tag 1,...,4 und eine Restproduktion von vier Einheiten an Tag 5 können die Absatzmengen erfüllt werden und das Lager ist am Ende leer.

Die Prüfung der Antwort führt zu der Frage, ob die Lagerhaltungskosten auch an den anderen Tagen nicht noch reduziert werden können.

[1] **Problemstellung**: Es wird festgestellt, dass die Einlagerung einer Einheit zu 5 Geldeinheiten pro Tag erfolgt. Die bisher gefundene Lösung hat dann Lagerkosten $5 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 65$ Geldeinheiten. In Ergänzung suchen wir nun nach Tagesproduktionen, welche die gesamten Lagerkosten verringern bzw. möglichst minimieren.

[2] **Mathematisches Modell**: Wir suchen nach einer Lösung des bisherhigen Problems, für die die Gesamtkosten $5\ell_1 + 5\ell_2 + 5\ell_3 + 5\ell_4 + 5\ell_5$ minimal werden.

[3] **Mathematische Aussage**: Für Optimierungsprobleme dieser Art steht das Simplex-Verfahren zur Verfügung, vgl. Kapitel 11. Dieses berechnet für die Tagesproduktionen die folgende Lösung, welche die Lagerkosten minimiert: $p_1 = 8, p_2 = p_3 = p_4 = 10, p_5 = 6$. Die Lagermengen sind dann

$$\begin{array}{lcccccccc}
\ell_1 & = & & & 8 & - & 4 & = & 4 \\
\ell_2 & = & 4 & + & 10 & - & 12 & = & 2 \\
\ell_3 & = & 2 & + & 10 & - & 11 & = & 1 \\
\ell_4 & = & 1 & + & 10 & - & 11 & = & 0 \\
\ell_5 & = & 0 & + & 6 & - & 6 & = & 0
\end{array}$$

Der Minimalwert ist $5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 35$.

[4] **Antwort**: Die minimalen Lagerkosten betragen 35.

Die vorgegebene Problemstellung ist damit beantwortet. Weitere Fragen könnten die Sensitivität dieser Lösung betreffen, z.B. die Änderung des Optimalwertes und der Optimallösung bei Anpassung von Bestimmungsgrößen wie den Absatzmengen oder den Tages-Lagerkosten. Hierauf soll jetzt nicht weiter eingegangen werden.

Das im Beispiel vorgestellte Problem gehört zu einer Reihe von Themen der Wirtschaftswissenschaften, in denen diverse Bereiche der Mathematik Anwendung finden ⇨ vgl. Abbildung 1.2 . Der Übersicht kann man auch entnehmen, dass innerhalb der mathematischen Themenbereiche gewisse Grundlagen essentiell sind, nämlich die Lineare Algebra und die Analysis, die zudem auch direkt in den Wirtschaftswissenschaften benötigt werden und daher mit Recht am Anfang eines Wirtschaftsstudium stehen sollten. Deshalb stellt dieses Buch genau die Methoden und Konzepte der Analysis und linearen Algebra bereit. Ein Teil dieser Konzepte und Techniken wurde bereits in der Schule behandelt, allerdings in erheblich einfacherer Form, und auch zahlreiche grundlegenden Sprechweisen und Hilfsmittel werden nach meinen Erfahrungen dort nicht mehr in der Weise verinnerlicht, dass man an der Hochschule darauf bauen kann. Gerade in der Analysis werden etwa Techniken wie Termumformungen, das Lösungen von Gleichungen und Ungleichungen, aber auch die Logik von Aussagen und das grundlegende Arbeiten mit Mengen in erheblichem Umfang eine Rolle spielen und das

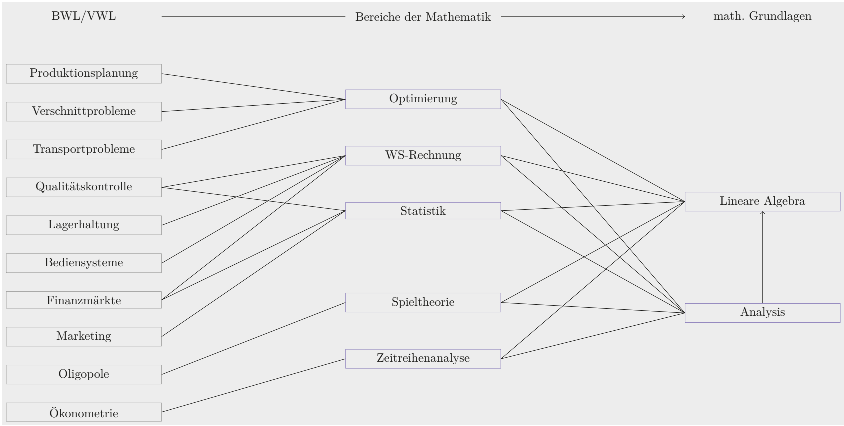


Abbildung 1.2: Bereiche der Wirtschaftswissenschaften, in denen mathematische Verfahren zur Anwendung kommen

Verständnis und die Nutzung der eigentlichen Konzepte unterstützen. Deshalb sollen diese grundlegenden Themen zunächst noch einmal besprochen werden.

1.2 Mengen

Mengen fassen Objekte (oft Zahlen) zu Bündeln zusammen. Die Objekte, die in einer Menge liegen, heißen **Elemente** der Menge. Mengen sind im Sachzusammenhang oft vorgegeben und es gibt für die gängigen Mengen eine feste Symbolik, wie z.B. die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen oder die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder aber Intervalle $[a; b]$.

Im Sachzusammenhang interessiert man sich oft für Elemente der Menge, die nicht genau bestimmt sind, sondern von denen man nur weiß oder annimmt, dass sie bestimmte Eigenschaften haben. Ist beispielsweise $\mathbb{D}$ der Definitionsbereich einer Gewinnfunktion, so möchte man wissen, für welches Element in $\mathbb{D}$ der Gewinn maximal wird. Solange diese Elemente aber nicht bekannt sind, kann man keine konkreten Werte verwenden, sondern verwendet für sie einen Platzhalter, den man **Variable** nennt; am häufigsten wird x als Variable verwendet (z.B. für das Argument einer Funktion $f(x)$). Die Systematik von Begriffen und Sachverhalten wird mit Variablen meist wesentlich verbindlicher und auch effizienter formuliert als unter Verwendung der korrekten Werte für diese Begriffe oder Sachverhalte. Deshalb werden wir immer wieder auf Variablen zurückgreifen, und es geht auch schon gleich los:

Liegt ein Objekt x in einer Menge A oder enthält A das Objekt x, so schreibt man dafür $x \in A$. Enthält A das Element nicht, so schreibt man $x \notin A$.

Mengen werden meist mit Großbuchstaben, ihre Elemente mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Einige ausgezeichnete Mengen erhalten besondere meist doppelt-gestrichene Symbole wie die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen oder aber die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer oder mehrerer bestimmter Gleichungen.

Beispiele für Mengen in der Ökonomie sind Definitions- und Wertebereiche ökonomisch motivierter Funktionen oder Bereiche, in denen Funktionen bestimmte Eigenschaften haben, z.B. die Gewinnzone oder die Phasen eines Ertragsgesetzes. Mengen haben oft die Form von Intervallen reeller

Zahlen, worauf wir später noch eingehen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bündeln Mengen bestimmte Ergebnisse von Zufallsexperimenten, diese Mengen nennt man dann Ereignisse.

Die Darstellung einer Menge erfolgt oft durch Aufzählen der Elemente oder Beschreibung der Eigenschaften der Elemente in der Menge innerhalb des Klammerpaars $\{,\}$.

Beispiel 1.2

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der **natürlichen Zahlen** inklusive Null, ein typisches Beispiel, dass die Aufzählung aller Elemente oft nicht möglich ist, sondern durch Angabe „typischer" Elemente zusammen mit $\dots$ die Systematik erklärt wird. Lässt man 0 weg, so bezeichnet man diese Menge mit $\mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $B = \{10, 0, 8, 2, 4, 6\}$ stimmt mit A überein, weil - anders als bei Tupeln - die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente bei Mengen keine Rolle spielt. Die Elemente einer Menge können auch wiederholt aufgezählt werden.
- $C = \{0, 2, 4, \dots\}$, die Menge aller geraden natürlichen Zahlen inklusive Null.

Die Menge, die überhaupt kein Element enthält, wird folgerichtig als $\{\quad\}$ notiert, sie heißt **leere Menge**. Eine andere Notation dafür ist $\emptyset$.

Die obigen Beispiele zählen die Elemente der Mengen auf. Vorteilhafter ist es, die in der Menge liegende Systematik durch die Verwendung von Variablen und Bedingungen, welche diese Variablen erfüllen müssen, in einer der folgenden Formen zu beschreiben:

- $M = \{$*„Variable"* $\in$ *„Wertebereich"* : *„Bedingung(en) für die Variable"*$\}$.
- oder $M = \{$*„Term mit Variable"* : *„Variable"* $\in$ *„Wertebereich"*$\}$.
- oder $M = \{$*„Term mit Variable"* : *„Bedingungen für die Variable"*$\}$.

Dabei ist *„Wertebereich"* meist ein Zahlenbereich wie $\mathbb{N}_0$. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist *„Wertebereich"* oft die Grundgesamtheit des Zufallsexperimentes. Die beschreibende Darstellung rechts oder links von „:" benötigt meist Variablen, Terme und Gleichungen oder Ungleichungen, auf die wir später genauer eingehen.

Beispiel 1.3

- $C = \{0, 2, 4, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0 : n = 2m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0\} = \{2m : m \in \mathbb{N}_0\}$. Dafür schreibt man auch $C = 2\mathbb{N}_0$ (alle Elemente aus $\mathbb{N}_0$ werden mit 2 multipliziert).
- $D = \{n \in \mathbb{N}_0 : \text{es gibt } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = 2m + 1\} = \{2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 1 + 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ ist die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen. Hier könnte man auch schreiben $D = 2\mathbb{N}_0 + 1$ oder $D = C + 1$ mit der obigen Menge C.
- $E = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 4, x \leq 18\} = \{4, 5, 6, \dots, 16, 17, 18\}$. Durch Komma getrennte Bedingungen müssen gleichzeitig gelten.
- Statt des Kommas in der Bedingung kann auch auch das logische „und" oder das Symbol $\wedge$ verwendet werden, z.B. $F = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 6 \wedge x \leq 8\} = \{6, 7, 8\}$.
- $G = \{x \in \mathbb{N}_0, x \geq 15 \wedge x \leq 20\} = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.
- $H = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 6 \text{ oder } x \geq 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 \dots\}$. Das logische

„oder" wird mit dem Symbol $\vee$ geschrieben, d.h. $H = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 6 \vee x \geq 9\}$

Mengen stehen oft in einer Teilmengenbeziehung zueinander, die auch **Inklusion** genannt wird. Die Teilmengenbeziehung $A \subseteq B$ bedeutet, dass die Elemente einer Menge A sämtlich auch in B liegen. Eine strikte Inklusion wird als $A \subset B$ oder $A \subsetneq B$ geschrieben, d.h. dann enthält B Elemente, die nicht in A liegen.

Beispiel 1.4
Für die oben genannten Mengen haben wir folgende Inklusionen:

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \subset C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$. Natürlich gilt hier auch $A \subseteq C$, dies unterschlägt aber die Information, dass es Elemente in C gibt (z.B. 12), die nicht in A liegen. Dass die Teilmengenbeziehung $A \subseteq B$ gilt, prüft man, indem man nachweist, dass jedes Element von A auch in B vorliegt. Hier ist das durch visuelle Markierung illustriert. Ergänzend mit den Aussagen $12 \in B$ und $12 \notin A$ ergibt sich die strikte Inklusion $A \subset B$.
- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \subset \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$. Dies gilt nicht nur für A, sondern für jede der Mengen B, C, D, E, F, G, H.
- $F = \{6, 7, 8\} \subset E = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 16, 17, 18\}$
- Für jede Menge M gilt $\{\} \subseteq M$. Ist $M \neq \{\}$, so ist die Inklusion strikt, d.h. es gilt $\{\} \subset M$, denn es gibt ein Element in M und dieses ist sicher nicht in $\{\}$.

Eine banale, aber praktisch sehr wichtige Eigenschaft ist, dass zwei Mengen M_1, M_2 genau dann gleich sind, wenn beide Inklusionen $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$ gelten.

Die prominentesten Mengen, die in der Wirtschaftsmathematik (aber nicht nur dort!) verwendet werden sind neben den bereits genannten natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$

- Die Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen**, $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$.
- Die Menge $\mathbb{Q}$ der **rationalen Zahlen**, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$. Jede rationale Zahl kann als nichtabbrechende periodische Dezimalzahl geschrieben werden, z.B. $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ oder $2 = 1,\overline{9}$.
- Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**. Diese entsteht, wenn man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, also die nichtabbrechenden periodischen Dezimalzahlen um die nichtabbrechenden nichtperiodischen Dezimalzahlen erweitert, zu denen z.B. Lösungen von quadratischen Gleichungen wie $x^2 = 2$ oder die Kreiskonstante π gehören.
- Die Menge $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen**.
  Bekanntlich hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine reelle Lösung. Nimmt man an, dass diese Gleichung doch eine Lösung hat, die mit i abgekürzt wird (in der Physik verwendet man statt dessen j, weil i oder I als Symbol für die Stromstärke genutzt wird), so gilt also $i^2 = -1$. Es ist klar, dass i keine reelle Zahl ist, aber man kann mit ihr rechnen wie mit reellen Zahlen, wenn die Gleichung $i^2 = -1$ ausgenutzt wird. Eine komplexe Zahl hat dann die Form $a + b \cdot i$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Man kann komplexe Zahlen addieren, z.B. $(2+3i)+((-1)+2i) = (2+(-1))+(3+2)i = 1+5i$ und multiplizieren, z.B. $(2+3i)((-1)+2i) = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + (2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3)i = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot +(2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3)i = -8 + 1 \cdot i$, sogar Divisionen und Kehrwerte sind möglich.

Zwischen den genannten Mengen besteht folgende Inklusionsbeziehung: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. In der Wirtschaftsmathematik sind vor allem die reellen Zahlen von Bedeutung, weil die Werte ökonomischer Größen sich mit ihnen darstellen lassen. Besondere Teilmengen der rellen Zahlen sind (mit $a, b \in \mathbb{R}$)

[1] abgeschlossene Intervalle

- $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$,

[2] offene Intervalle

- $]a;b[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$,

[3] halboffene Intervalle

- $[a;b[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x < b\}$,
- $]a;b] := \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x \leq b\}$,

[4] uneigentliche abgeschlossene Intervalle

- $[a;\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$,
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

[5] uneigentliche offene Intervalle

- $]a;\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
- $]-\infty; b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Für die Größe von Mengen gibt es mehrere unterscheidende Sprechweisen:

- Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält. Die **Kardinalität** einer endlichen Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente, sie wird mit $\#M$ oder $|M|$ bezeichnet.
- Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn es eine Zuordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 =$ zu den Elementen gibt, so dass jedes Element wenigstens eine Zahl erhält und zwei verschiedene Elemente stets verschiedene Zahlen haben. Insofern sind auch endliche Mengen abzählbar.
- Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

Beispiel 1.5

[1] Die in den obigen Beispielen genannten Mengen A, B, E, F, G sind endlich mit $\#A = \#B = \#G = 6$, $\#E = 15$ und $\#F = 3$. Die Mengen C, D, H sowie $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind nicht endlich.

[2] Die Menge $\mathbb{N}_0$ selber ist abzählbar, jedes Element ist seine eigene Ordnungszahl. Auch die Menge C der geraden natürlichen Zahlen (s.o.) kann über die Darstellung $2n$ auf die Ordnungszahlen $0, 1, 2, \ldots$ zurückgeführt werden und ist deshalb abzählbar. Gleiches gilt für die Menge D der ungeraden natürlichen Zahlen. Auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

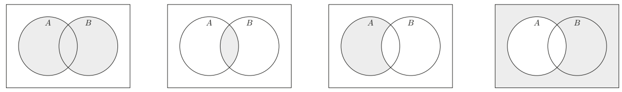
Eine mögliche Abzählung ist $\mathbb{Q} = \{0, 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{1}, \ldots\}$. Dabei werden Brüche $\pm\frac{p}{q}$ mit einer festen Summe $p+q$ gemeinsam systematisch aufgezählt.

[3] Beispiele überabzählbarer Mengen sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und alle Intervalle, deren linke Intervallgrenze kleiner als die rechte Intervallgrenze ist.

Beispielsweise ist das Intervall $]0;1[$ überabzählbar. Wäre es das nicht, so könnte man seine Elemente abzählen als $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$. Jedes x_i lässt sich als Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern darstellen. Hieraus konstruiert man eine weitere Dezimalzahl z, deren i-te Ziffer 1 ist wenn die i-te Ziffer von x_i ungleich 1 ist, ansonsten sei diese Ziffer 2. Das bedeutet aber, dass die i-te Ziffer von z und die i-te Ziffer von x_i verschieden sind, so dass auch z und x_i nicht übereinstimmen. Mit z hat man dann eine weitere Zahl im Intervall $]0;1[$ gefunden, die mit keinem der x_i übereinstimmt und deshalb nicht in der aufgezählten Menge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ enthalten ist. Deshalb kann $]0;1[$ nicht abzählbar sein. Dieser indirekte Beweis geht auf den Mathematiker Georg Cantor zurück.

1.2.1 Operationen mit Mengen

Aus Mengen lassen sich neue Mengen „konstruieren“ mit den Mengen-Operationen **Vereinigung**, **Schnitt** und **Komplement**. Dies kann auch mit Hilfe so genannter Venn-Diagramme illustriert werden ⇨ vgl. Abbildung 1.3



$A \vee B$ $\quad A \wedge B$ $\quad A \setminus B$ $\quad B^c = \Omega \setminus B$

Abbildung 1.3: Venn-Diagramme für Vereinigung, Schnitt und Komplement

- Die Vereinigung $A \cup B$ zweier Mengen A,B besteht aus allen Elementen, die in A oder in B sind, als Formel $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$. Das Symbol $\vee$ wird auch **Disjunktion** genannt und verbindet zwei logische Ausdrücke (s.u.) mit „oder".
- Der Schnitt $A \cap B$ zweier Mengen A, B enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B sind, als Formel $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Das Symbol $\wedge$ wird auch **Konjunktion** genannt und verbindet zwei logische Ausdrücke mit „und".
- Das relative Komplement $A \setminus B$ zweier Mengen A, B enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B sind, als Formel $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Mit Bezug auf eine Obermenge Ω von A schreibt man auch A^c oder $\overline{A}$ für das Komplement $\Omega \setminus A$. Mit dieser Notation gilt für das relative Komplement $A \setminus B = A \cap B^c$.

Beispiel 1.6
Mit den Mengen $A, B, C, D, E, F, G, \mathbb{N}_0$ aus den obigen Beispielen gilt

- $E \cup G = \{4, 5, \ldots, 17, 18\} \cup \{15, 16, 17, 18, 19, 20\} = \{4, 5, \cdots, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- $C \cup D = \{0, 2, 4, \ldots\} \cup \{1, 3, 5, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}_0$
- $D \cap F = \{0, 2, 4, \ldots\} \cap \{4, 5, 6, \ldots, 16, 17, 18\} = \{4, 6, 8, \ldots, 16, 18\}$
- $F \setminus G = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, 16, 17, 18\} \setminus \{6, 7, 8\} = \{4, 5, 9, 10, 11, \ldots, 16, 17, 18\}$

Verbindet man die Mengenoperationen miteinander, sind folgende Regeln zu beachten (hierfür seien A, B, C beliebige Teilmengen einer Menge Ω so dass z.B. $A^c = \Omega \setminus A$):

Kommutativgesetze	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetze	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De-Morgan-Gesetze	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Die Herleitung des ersten Distributivgesetzes und des ersten De-Morgan-Gesetzes mit Venn-Diagrammen ist in Abbildung 1.4 dargestellt.

1.2.2 Aussagen und Aussageformen

In der Mathematik spielen logische Ausdrücke eine Rolle, denen ein bestimmter Wahrheitswert zugewiesen werden kann, manchmal unter zusätzlichen Annahmen. Die möglichen Wahrheitswerte sind „wahr" bzw. „falsch". Besitzt ein logischer Ausdruck unmittelbar einen dieser Wahrheitswerte, so nennt man ihn **Aussage**.

Beispiel 1.7
Der Ausdruck „$3 = 7 - 4$"ist eine wahre Aussage, „$3 = 7 \cdot 2$" ist eine falsche Aussage.

Im Unterschied zum Begriff Aussage versteht man unter einer **Aussageform** einen logischen Ausdruck, der noch Variablen beinhaltet, so dass der Ausdruck erst durch Belegung aller Variablen mit konkreten Werten zu einer Aussage wird. Für die Variablen

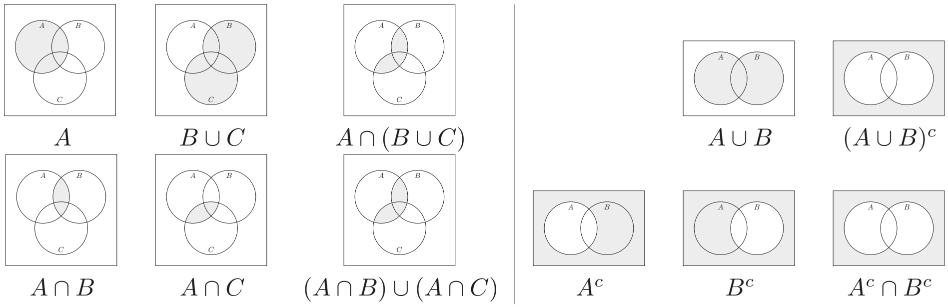


Abbildung 1.4: Venn-Diagramme für $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (links) und $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (rechts)

müssen dabei konkrete Definitionsbereiche gegeben sein, in den meisten Anwendungen sind dies $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Abhängig von der Belegung der Variablen können also prinzipiell Aussagen mit den Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“entstehen. Je nachdem, was möglich ist, nennt man eine Aussageform

- **allgemeingültig**, wenn sie für jede Belegung aller in ihr auftretenden Variablen aus ihren Definitionsbereichen wahr ist,
- **erfüllbar**, wenn es Belegungen aller Variablen gibtt, so dass sie wahr ist,
- **widerlegbar**, wenn es Belegungen („Gegenbeispiele“), für die sie falsch ist,
- **unerfüllbar**, wenn sie für jede Belegung zu einer falschen Aussage wird. Statt unerfüllbar sagt man dann auch **unlösbar**.

Beispiel 1.8

[1] Die Gleichung $x + 6 = 2(x + 3) - x$ ist allgemeingültig in $\mathbb{R}$, d.h. mit $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich für x. Denn die rechte Seite der Gleichung vereinfacht sich zu $2(x+3) - x = 2x + 6 - x = x + 6$, was die linke Seite ist.

[2] Die Gleichung $3 = 7 - x$ ist erfüllbar, denn mit der Belegung $x = 4$ stimmt die rechte Seite $7 - x = 7 - 4 = 3$ mit der linken Seite überein, die Gleichung wird also damit zu einer wahren Aussage.

[3] Die Gleichung $3 + x = 7 - y$ ist erfüllbar, denn sie wird z.B. mit $x = 4, y = 0$ zu einer wahren Aussage. Tatsächlich wird die Gleichung mit beliebigem x und $y = 4 - x$ zu einer wahren Aussage. Ersetzt man also nur y durch $4 - x$, so wird die entstehende Aussageform $3 + x = 7 - (4 - x)$ allgemeingültig.

[4] Die Gleichung $3 = 7 - x$ ist auch widerlegbar, denn z.B. mit der Belegung $x = 0$ stimmt die rechte Seite $7 - x = 7 - 0 = 4$ nicht mit der linken Seite überein.

[5] Die Gleichung $3 = 4 + x^2$ ist unerfüllbar in $\mathbb{R}$. Sie ist allerdings erfüllbar in $\mathbb{C}$, der Menge der komplexen Zahlen mit $x = \pm i$.

Sie haben gesehen, wie Aussageformen zu wahren Aussagen werden, wenn Variablen bestimmte Werte annehmen. Wird eine Aussageform durch das beliebige Belegen einer Variablen x zu einer allgemeingültigen Aussageform, so schreibt man dies durch Voranstellen des sogenannten **Allquantors** $\forall x$. Wird eine Aussageform zu einer allgemeingültigen Aussageform für wenigstens eine Belegung einer Variable x, so kann man dies durch Voranstellen des **Existenzquantors** $\exists x$ darstellen. Wird dadurch die einzige Variable in der Aussageform gebunden, so entsteht jeweils eine Aussage.

Beispiel 1.9

[1] Die Aussageform $3 = 7 - x$ ist erfüllbar in $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\exists x \in \mathbb{R} : 3 = 7 - x$ ist eine wahre Aussage.

[2] Die Aussageform $x + 6 = 2(x + 3) - x$ ist allgemeingültig in $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 6 = 2(x + 3) - x$.

[3] Es können auch mehrere Variablen durch verschiedene Quantoren gebunden werden, wobei die Aussageformen „von innen nach außen"geprüft werden: Betrachtet man die Aussageform $3 + x = 7 - y$, so ist $\exists y : 3 + x = 7 - y$ erfüllbar für jedes $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : 3 + x = 7 - y$ ist eine wahre Aussage.

Die Doppelpunkte hinter den Quantoren werden zuweilen weggelassen, ebenso der Definitionsbereich, für den die Aussageform erfüllbar bzw. allgemeingültig sein soll, wenn dieser aus dem Zusammenhang hervorgeht, z.B. als Menge der rellen Zahlen.

Logische Ausdrücke wie Aussageformen und Aussagen werden mit logischen Operationen verbunden. Dabei kommen die Konjunktion, d.h. die „und"-Verknüpfung $\wedge$, die Disjunktion, d.h. die „oder"-Verknüpfung $\vee$ und die **Negation** $\neg$ zur Anwendung.

Beispiel 1.10

Es sei x eine Variable mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

[1] Die Aussageform $x \geq 0 \wedge x \leq 1$ beschreibt das Intervall $[0; 1]$. Man kann auch sagen, dass die Aussageformen $x \geq 0 \wedge x \leq 1$ und $x \in [0; 1]$ für jede Belegung von x den gleichen Wahrheitswert haben.

[2] Die Aussageform $\neg x \geq 0$ hat für jede Belegung von x den gleichen Wahrheitswert wie $x < 0$.

Logische Ausdrücke können mit logischen Operationen zu neuen Ausdrücken zusammengesetzt werden, wie schon im letzten Beispiel gesehen. Dabei gibt es Rechenregeln, mit denen diese Ausdrücke zusammengefasst werden können. Hierzu seien a, b, c logische Ausdrücke

Kommutativgesetze	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Assoziativgesetze	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
Distributivgesetze	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
De-Morgan-Gesetze	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Sie sehen an diesen Regeln auch, dass die Negation vorrangig aufgelöst wird. Kommen Ihnen diese Regeln bekannt vor? Das liegt daran, dass sie in analoger Weise bereits für Mengen formuliert wurden. Betrachtet man nämlich Mengen A,B und zugehörige logische Ausdrücke $x \in A$ und $x \in B$, so gilt

[1] $x \in A \vee x \in B$ beschreibt genau die Elemente der Menge $A \cup B$, d.h. hat dieselben Wahrheitswerte wie $x \in A \cap B$,

[2] $x \in A \wedge x \in B$ beschreibt genau die Elemente der Menge $A \cap B$, d.h. hat dieselben Wahrheitswerte wie $x \in A \cap B$,

[3] $\neg(x \in A)$ beschreibt genau die Elemente der Menge A^c, d.h. hat dieselben Wahrheitswerte wie $x \in A^c$.

In mathematischen Ausdrucksweisen finden Sie auch oft die **Äquivalenz** $\Leftrightarrow$ und die die **Implikation** $\Rightarrow$. Mit den bisherigen Bezeichnungen kann man auch diese Begriffe formal festlegen:

- Ein logischer Ausdruck a **impliziert** impliziert einen weiteren logischen Ausdruck b, geschrieben $a \Rightarrow b$, wenn der logische Ausdruck $\neg a \vee b$ allgemeingültig ist.
- Zwei logische Ausdrücke a, b sind **äquivalent**, geschrieben $a \Leftrightarrow b$, wenn $a \Rightarrow b$ und $b \Rightarrow a$ allgemeingültig sind.

Um eine Implikation $a \Rightarrow b$ auf Allgemeingültigkeit zu prüfen, nimmt man an, dass der logische Ausdruck a wahr bzw. allgemeingültig ist und rechnet nach, dass dann auch b wahr bzw. allgemeingültig ist. Für eine Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$ muss man entsprechend prüfen, dass $a \Rightarrow b$ und $b \Rightarrow a$ wahr bzw. allgemeingültig sind.

Beispiel 1.11
Es sei x eine reelle Variable

[1] Der logische Ausdruck $\forall x : x \leq 0 \Rightarrow x < 1$ stimmt überein mit dem logischen Ausdruck $\forall x : \neg(x \leq 0) \vee x < 1$. Nach den Regeln für die Negation stimmt dieser Ausdruck für jede Belegung von x mit $x > 0 \vee x < 1$ überein. Dieser ist aber offensichtlich allgemeingültig, jedes $x \in \mathbb{R}$ liegt oberhalb von Null oder unterhalb von Eins (oder beides).

Sie werden aus Anwendungssicht mit Recht den Einwand erheben, dass die Überführung in den Ausdruck $\neg(x \leq 0) \vee x < 1$ die Argumentation recht sperrig macht. Mit dem eingangs Gesagten würde man wie folgt schließen: Wenn $x \leq 0$ ist, so folgt auch $x \leq 0 < 1$, d.h. indem man den Anfang und das Ende der Ungleichungskette in Beziehung setzt, $x < 1$.

[2] Der logische Ausdruck $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$ stimmt überein mit dem logischen Ausdruck $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0) \wedge (-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0)$. Wir untersuchen die Erfüllbarkeit der beiden geklammerten Ausdrücke getrennt:

- $(x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0)$ ist $(\neg(x \geq 0) \vee -x \leq 0)$ Dabei stimmt aber $\neg(x \geq 0)$ mit $x < 0$ überein und $-x \leq 0$ mit $x \geq 0$. Deshalb stimmt $(x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0)$ mit $x < 0 \vee x \geq 0$ überein. Diese Aussageform ist aber offenbar allgemeingültig, denn eine relle Zahl ist entweder < 0 oder ≥ 0.

  Eine etwas handlichere Begründung lautet: Wenn $x \geq 0$ ist und man diese Ungleichung mit -1 multipliziert, so dreht sich das Ungleichungszeichen um, d.h. es gilt $-x \leq 0$.
- Entsprechend ist auch $(-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0)$ allgemeingültig.

Zwei durch $\wedge$ verknüpfte allgemeingültige Aussageformen sind aber ebenfalls allgemeingültig. Deshalb ist die obige Aussageform allgemeingültig und damit sind die beiden Aussageformen äquivalent.

Übungen zu Abschnitt 1.2

?

1. Geben Sie für jede der Inklusionen in $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ein Beispiel dafür an, dass sie strikt ist.

2. Erläutern Sie die Regeln $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^C$ mit Venn-Diagrammen.

3. Bestimmen Sie

a) $\mathbb{N} \cap]-3; 3[$,

b) $]-2; 7[\cup \Big([3; \infty[\cap]-\infty; 8]\Big)$,

c) $(]-\infty;5]\cup]7;\infty[)^c$,

d) $[3;9]\ \setminus\ [0;5]$.

4. Es sei $\mathbb{S}$ die Menge der BWL-Studierenden im Hörsaal, $\mathbb{P}$ die Menge der Prüfungsordnungen, gemäß derer Studierende, welche den Kurs belegen, eingeschrieben sind.

a) Welche Eigenschaft(en) hat die Aussageform „s studiert BWL“?

b) Was würde gelten, wenn die Aussageform unerfüllbar wäre?

c) Bestimmen Sie p, so dass die folgende Aussageform wahr wird:
$\forall x$ „x studiert BWL im ersten Fachsemester“ $\Rightarrow$ „x studiert nach Prüfungsordnung p“

1.3 Terme und Gleichungen

Reelle Terme und Gleichungen und deren Umformungen gehören zu den wichtigsten elementaren Hilfsmitteln der Analysis und linearen Algebra. Da sich Gleichungen aus Termen aufbauen, besprechen wir hier erst Terme und deren Umformungen.

1.3.1 Terme und Termumformungen

Ein (reeller) **Term** ist ein Ausdruck, der für eine reelle Zahl steht und aus Zahlen, Variablen sowie mathematischen Operationen auf diesen Zahlen und Variablen zusammengesetzt ist, wobei

- die auftretenden Variablen mit Werten aus $\mathbb{R}$ oder einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ belegt werden können,
- zwischen den Operationen gewisse Vorrangregeln gelten, z.B. „Punktrechnung vor Strichrechnung“, „Exponentiation vor Punktrechung“ usw.
- für den Fall, dass Vorrangregeln bewusst aufgehoben werden sollen, Klammerpaare eingesetzt werden

Terme können auch konkrete Zahlen sein oder nur aus Zahlen und Rechenoperationen gebildet eine bestimmte Zahl ergeben. Für jede in einem Term eingesetzte Variable muss es einen Definitionsbereich geben, beispielsweise, indem man die Variablenwerte ausschließt, für welche die Terme undefiniert sind (z.B. weil man sonst durch Null teilen würde).

Eine **Termumformung** ist die Überführung eines Terms t_1 in einen Term t_2, so dass der logische Ausdruck, der aus den beiden Termen und der zwischen ihnen ausgeführten Umformung gebildet wird, eine wahre Aussage bzw. allgemeingültige Aussageform ist: Meist handelt es sich bei Termumforumungen um

- **Gleichungsumformungen** $t_1 = t_2$,
- **Ungleichungsumformungen** $t_1 \leq t_2$ bzw. $t_1 < t_2$ bzw. $t_1 \geq t_2$ bzw. $t_1 > t_2$. Man spricht dann auch von **Abschätzungen**.

Die wichtigsten Gleichungsumformungen (mit Termen t_1, t_2, t_3, t_4) aufgrund der Grundrechenarten $+, -, \cdot, /$ sind die folgenden:

[tg1] Kommutativität (Vertauschung):

- bei Addition von Termen $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$
- bei Multiplikation von Termen $t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1$

[tg2] Assoziativität (Klammersetzung):

- bei Addition von Termen: $(t_1 + t_2) + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3)$
- bei Multiplikation von Termen $(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$

[tg3] Distributivität: $t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3$. Dreht man die Gleichung um und schreibt $t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 + t_3)$, so bezeichnet man diesen Vorgang als **Faktorisierung**.

[tg4] Brüche gleichnamig machen: $\frac{t_1}{t_2} \pm \frac{t_3}{t_4} = \frac{t_1 \cdot t_4 \pm t_2 \cdot t_3}{t_2 \cdot t_4}$ wenn $t_2 \neq 0, t_4 \neq 0$. Auch die umgekehrte Gleichung kommt vor, bei gebrochen rationalen Termen spricht man dann auch von Partialbruchzerlegung.

[tg5] Neutrale Elemente Null und Eins:

- Addition: $0 + t_1 = t_1$ und $t_1 + (-t_1) = t_1 - t_1 = 0$
- Multiplikation: $1 \cdot t_1 = t_1$ und für $t_1 \neq 0$ ist $\frac{t_1}{t_1} = 1$

Daraus resultieren die folgenden Termerweiterungen:

- Addititiv: $t_1 = t_1 + t_2 - t_2$. Weil $t_2 - t_2 = 0$, wird diese Vorgehensweise auch als „fette Null“ bezeichnet.
- Multiplikativ: Erweitern/Kürzen von Brüchen $\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1 \cdot t_3}{t_2 \cdot t_3}$. Hier muss man bei den Definitionsbereichen Vorsicht walten lassen, da dies nur für $t_3 \neq 0$ richtig ist.

[tg6] Umgang mit dem Minuszeichen bei Klammern: $t_1 + t_2 = t_1 - (-t_2)$ und $t_1 - t_2 = t_1 + (-t_2)$

Die wichtigsten Abschätzungen von Termen sind

[tu1] Additiv: ist $t_2 \geq 0$ so ist $t_1 \leq t_2 + t_3$. Für $t_2 > 0$ ist $t_1 < t_1 + t_2$.

[tu2] Multiplikativ: Sind $t_1 \geq 0, t_2 \geq 1$, so ist $t_1 \leq t_1 t_2$. Sind $t_1 > 0, t_2 > 1$, so ist $t_1 < t_1 t_2$.

Die genannten Termumformungen umfassen nur den Umgang mit den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Weitere Termumformungen („Rechenregeln“), insbesondere Abschätzungen werden wir noch besprechen, wenn die verschiedenen Funktionstypen behandelt werden. Termumformungen sollen in den dazu beitragen, dass ein vorhandener Term

- vereinfacht wird, wobei das durchaus abhängig vom Sachzusammenhang auf verschiedene Arten erfolgen kann,
- so dargestellt wird, dass man ein bestimmtes Verhalten ablesen kann (z.B. wann der Term Null oder ein anderer vorgegebener Wert wird).

1.3.2 Gleichungen und Ungleichungen

Eine **Gleichung** ist eine Aussage oder eine Aussageform $t_1 = t_2$ mit Termen t_1, t_2. Treten Variablen in einer Gleichung auf, so erhält die Gleichung aller Variablen durch Belegung mit konkreten Werten einen logischen Wert. Ist dieser Wert stets „wahr“, so ist die Gleichung allgemeingültig, man spricht auch von einer **Tautologie**. Ist die Gleichung als Aussageform erfüllbar, so heißt sie **lösbar**. Die Menge aller Belegungen der Variablen, die zu einer wahren Aussage führen, nennt man die **Lösungsmenge** einer Gleichung. Ist sie unerfüllbar, so heißt sie auch **unlösbar**.

Beispiel 1.12

[1] Die Gleichung $3 = 7 - x$ ist erfüllbar in $x \in \mathbb{R}$ mit $x = 4$.

[2] Die Gleichung $x + 6 = 2(x + 3) - x$ ist eine Tautologie.

[3] Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist (in $\mathbb{R}$) unlösbar.

Gleichungen, die man durch Gleichungsumformungen zwischen zwei Termen erhält, sind Tautologien. Haben zwei Gleichungen $t_1 = t_2$ und $t_3 = t_4$ dieselbe Lösungsmenge, so sind sie äquivalent und man schreibt $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_3 = t_4$ (in Übereinstimmung mit der obigen Definition von Äquivalenz). Gilt für jede Lösung d der Gleichung $t_1 = t_2$, dass sie auch Lösung der Gleichung $t_3 = t_4$ ist, so sagt man, dass die Gleichung $t_1 = t_2$ die Gleichung $t_3 = t_4$ impliziert und schreibt $t_1 = t_2 \Rightarrow t_3 = t_4$.

Beachten Sie: Wenn Sie Gleichungsumformungen an einem Term t_1 durchführen und dabei eine Gleichungkette $t_1 = t_2 = t_3 = \cdots$ erhalten, so dürfen Sie hierfür nicht $t_1 \Leftrightarrow t_2 \Leftrightarrow t_3 \ldots$ und auch nicht $t_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t_3 \ldots$ schreiben. Wenn Sie unbedingt mit Äquivalenzen arbeiten wollen, so müssten in diesem Fall Sie $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_3 \ldots$ schreiben. Man schreibt also nicht $2 + (3 + x) \Rightarrow (2 + 3) + x \Rightarrow 5 + x$, sondern $2 + (3 + x) = (2 + 3) + x = 5 + x$

Die Hauptaufgabe im Zusammenhang mit Gleichungen besteht darin, die Lösungsmenge zu finden. Hat die Gleichung nur eine Variable, etwa x, so besteht die Vorgehensweise darin, Äquivalenzumformungen durchzuführen, bis die Variable alleine auf einer (meist der linken) Seite steht. Man sagt auch, die Variable wird **freigestellt**. Der Wert auf der rechten Seite stellt dann die Lösung für x dar. Gibt es mehrere Variablen in der Gleichung, so versucht man oft, nach einer der Variablen freizustellen und verwendet die gewonnene Gleichung, um eine Abhängigkeit zwischen der Variablen auf der linken und der bzw. denen auf der rechten Seite zu erklären. Diese wird dann als Funktion interpretiert. Oft entstehen beim Auflösen Fallunterscheidungen, die zu mehreren Lösungszweigen und dann auch mehreren Lösungen führen (z.B. bei quadratischen Gleichungen). Es treten - beispielsweise in der Analysis mehrerer Variablen oder in der linearen Algebra - auch Situationen ein, in denen die Lösungsmenge durch mehrere Gleichungen in mehreren Variablen beschrieben wird. Äquivalenzumformungen zur Bestimmung der Lösungsmenge beziehen sich dann oft auf jeweils eine der Gleichungen, wobei die anderen Gleichungen als Voraussetzungen verwendet werden können.

Folgende Äquivalenzumformungen werden beim Lösen von Gleichungen oft verwendet, dabei seien t_1, t_2, t_3 Terme:

[g1] Vertauschung: $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_1$

[g2] Addition: $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 + t_3 = t_2 + t_3$

[g3] Multiplikation: Ist $t_3 \neq 0$, so gilt $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_3$. Wenn man $t_3 \neq 0$ nicht voraussetzen kann, so gilt nur $t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_3$. Hierdurch kann sich die Lösungsmenge vergrößern, etwa wenn der Term t_3 durch eine Belegung der darin vorkommenden Variable x zu Null wird und die Tautologie $t_1 \cdot 0 = t_2 \cdot 0$ entsteht.

[g4] Einsetzen durch Transitivität: Ist $t_2 = t_3$, so gilt $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_3$. Dies entspricht der Gleichungskette von Termumformungen $t_1 = t_2 = t_3$.

Finden Sie den Aufwand, der hier betrieben wird, um das Umformen von Gleichungen zu beschreiben, zu hoch? Sich die einzelnen Schritte genau zu vergegenwärtigen und die zulässigen Umformungen zu kennen, verhindert immer wieder beobachtete Fehler beim Lösen von Gleichungen. Nach einiger Zeit gehen Ihnen die obigen Konzepte „in Fleisch und Blut“ über, die Fehlerquote sinkt deutlich und Sie können sogar parametrische Gleichungen behandeln.

Beispiel 1.13
Wir lösen die Gleichung $3 = x - 5$ mit den genannten Umformungen. Natürlich sieht man durch Ausprobieren hier schnell, dass $x = 8$ die einzige Lösung ist. Bei komplizierteren Gleichungen ist das aber nicht mehr so einfach. Löst man die Gleichung nur mit den genannten Umformungen unter Verwendung von Termumformungen, so gilt

$$3 = x - 5 \overset{[g1]}{\Leftrightarrow} x - 5 = 3 \overset{[g2]}{\Leftrightarrow} (x-5) + 5 = 3 + 5 \overset{[tg2]}{\Leftrightarrow} x + (-5 + 5) = 3 + 5 \Leftrightarrow x = 8$$

Eine **Ungleichung** ist eine Aussage(-form) vom Typ $t_1 \leq t_2$, $t_1 < t_2$, $t_1 \geq t_2$ oder $t_1 > t_2$ mit Termen t_1, t_2. Auch hier können Variablen in den Termen vorkommen, so dass man wie bei Gleichungen die Eigenschaften der Lösbarkeit und Unlösbarkeit sowie das Konzept einer Lösungsmenge erklären kann; folgende Äquivalenzumformungen gibt es (dabei seien wieder t_1, t_2 Terme):

[u1] Vertauschung:

- $t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow t_2 \geq t_1$ und $t_1 \geq t_2 \Leftrightarrow t_2 \leq t_1$,
- $t_1 < t_2 \Leftrightarrow t_2 > t_1$ und $t_1 > t_2 \Leftrightarrow t_2 < t_1$.

[u2] Addition:

- $t_1 \lesseqgtr t_2 \Leftrightarrow t_1 + t_3 \gtreqless t_2 + t_3$
- $t_1 \lessgtr t_2 \Leftrightarrow t_1 + t_3 \gtrless t_2 + t_3$

[u3] Multiplikation mit $t_3 > 0$

- $t_1 \lesseqgtr t_2 \Leftrightarrow t_1 t_3 \lesseqgtr t_2 t_3$
- $t_1 \lessgtr t_2 \Leftrightarrow t_1 t_3 \lessgtr t_2 t_3$

[u4] Multiplikation mit $t_3 < 0$

- $t_1 \lesseqgtr t_2 \Leftrightarrow t_1 t_3 \gtreqless t_2 t_3$
- $t_1 \lessgtr t_2 \Leftrightarrow t_1 t_3 \gtrless t_2 t_3$

Beispiel 1.14
Wir lösen die Ungleichung $3 \leq x - 5$ mit den genannten Umformungen.

$$3 \leq x - 5 \overset{[u1]}{\Leftrightarrow} x - 5 \geq 3 \overset{[u2]}{\Leftrightarrow} (x-5) + 5 \geq 3 + 5 \overset{[tg2]}{\Leftrightarrow} x \geq 8$$

Übungen zu Abschnitt 1.3

?

5. Versuchen Sie, die folgenden Terme zu vereinfachen, wenn für x, y die angegebenen Zahlen eingesetzt werden. Warum ist dies im zweiten Fall nicht möglich?

a) $\frac{xy}{x + \frac{x}{y}}$ für $x = -8, y = 4$

b) $\frac{x^2 - y}{x + 2}$ für $x = -2, y = 4$

6. Welche Terme sind gleich?

a) $x^2 + 14x - 4$,

b) $x^2 - 4$,

c) $(x + 7)^2 - 53$,

d) $(x - 2)x + 2x - 4$

7. Vereinfachen Sie die Terme so weit wie