

Wolfgang Schneider
Petra Küspert | Kristin Krajewski

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen

3. Auflage



Standard
Wissen
Lehramt

Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn

Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau Verlag · Wien · Köln

Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto

facultas · Wien

Haupt Verlag · Bern

Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn

Mohr Siebeck · Tübingen

Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen

Ernst Reinhardt Verlag · München

transcript Verlag · Bielefeld

Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart

UVK Verlag · München

Waxmann · Münster · New York

wbv Publikation · Bielefeld

Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

StandardWissen Lehramt

Die Bände zur Pädagogischen Psychologie werden herausgegeben von Wolfgang Schneider

Bislang sind außerdem erschienen in der Reihe:

Mündliche Kommunikation in der Schule von R. W. Wagner (utb 2810)

Elternhaus und Schule von E. Wild/F. Lorenz (utb 3418)

Verhaltensstörungen und Lernschwierigkeiten in der Schule von N. Berger/
W. Schneider (utb 3470)

Emotion, Motivation und selbstreguliertes Lernen von T. Götz/A. C. Frenzel/
M. Dresel/R. Pekrun (utb 3481)

Psychologie des Unterrichts von M. Kunter/U. Trautwein (utb 3895)

Lernen mit Medien von G. Nieding/P. Ohler/G. D. Rey (utb 4001)

Interkulturalität und Schule von K. Göbel/P. Buchwald (utb 4642)

WOLFGANG SCHNEIDER / PETRA KÜSPERT / KRISTIN KRAJEWSKI

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen

3., aktualisierte und erweiterte Auflage

BRILL | SCHÖNINGH

Der Herausgeber: **Prof. Dr. Wolfgang Schneider** war bis 2016 Professor für Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie am Institut für Psychologie der Universität Würzburg. Seine Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der Lese-Rechtschreibforschung, der frühen Förderung von schulischen Fertigkeiten, der Lehr-Lernforschung, der Gedächtnis- und Metakognitionsentwicklung bei Kindern und Jugendlichen sowie der Hochbegabungs- und Expertiseforschung.

Dr. Petra Küspert, Diplom-Psychologin, ist langjähriges Mitglied der Forschergruppe von Prof. Dr. Wolfgang Schneider am Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie der Universität Würzburg. In ihren Forschungsarbeiten konzentrierte sie sich auf Lern-Leistungsstörungen wie Legasthenie und Dyskalkulie und entwickelte Test- und Fördermaterialien für den Vorschul- und Grundschulbereich. Derzeit ist sie in eigener Praxis lerntherapeutisch tätig, führt Fortbildungen für pädagogisches Personal durch und betont die Verknüpfung aktueller wissenschaftlicher Erkenntnisse und pädagogisch-psychologischer Praxis auch in ihrer universitären Lehrtätigkeit und der Ausbildung integrativer Lerntherapeuten.

Prof. Dr. Kristin Krajewski ist Professorin für Psychologie an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg. Ihre Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der Mathematikforschung, der Entwicklung, Diagnostik, Prävention und Intervention von Lern- und Verhaltensstörungen sowie der entwicklungs- und ressourcenorientierten Lernförderung vom Kindergarten- bis ins Jugendalter. Ihre Forschung und Lehre zielt auf die Verknüpfung entwicklungs-, lern- und gedächtnispsychologischer Inhalte und deren Anwendung in der Lernpraxis.

Online-Angebote oder elektronische Ausgaben sind erhältlich unter **www.utb-shop.de**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

3., aktualisierte und erweiterte Auflage 2021

© 2013 Brill Schöningh, Wollmarktstraße 115, D-33098 Paderborn, ein Imprint der Brill-Gruppe (Koninklijke Brill NV, Leiden, Niederlande; Brill USA Inc., Boston MA, USA; Brill Asia Pte Ltd, Singapur; Brill Deutschland GmbH, Paderborn, Deutschland; Brill Österreich GmbH, Wien, Österreich)
Koninklijke Brill NV umfasst die Imprints Brill, Brill Nijhoff, Brill Hotei, Brill Schöningh, Brill Fink, Brill mentis, Vandenhoeck & Ruprecht, Böhlau, Verlag Antike und V&R unipress.

Internet: www.schoeningh.de

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Printed in Germany.

Herstellung: Brill Deutschland GmbH, Paderborn
Einbandgestaltung: Atelier Reichert, Stuttgart

UTB-Band-Nr: 3899

ISBN 978-3-8252-5747-7

ISBN 978-3-8385-5747-2 (E-Book)

Vorwort zur Reihe

StandardWissen Lehramt – Studienbücher für die Praxis

Wie das gesamte Bildungswesen wird sich auch die künftige Lehramtsausbildung an Kompetenzen und Standards orientieren. Damit rückt die Frage in den Vordergrund, was Lehrkräfte wissen und können müssen, um ihre berufliche Praxis erfolgreich zu bewältigen. Das Spektrum reicht von fachlichen Fähigkeiten über Diagnosekompetenzen bis hin zu pädagogisch-psychologischem Wissen, um Lehren als Unterstützung zur Selbsthilfe und Lernen als eigenaktiven Prozess fassen zu können.

Kompetenzen werden nicht in einem Zug erworben; Lehrerbildung umfasst nicht nur das Studium an einer Hochschule, sondern ebenso das Referendariat und die Berufsphase. Die Reihe StandardWissen Lehramt bei UTB bietet daher Lehramtsstudierenden, Referendaren, Lehrern in der Berufseinstiegsphase und Fortbildungsteilnehmern jenes wissenschaftlich abgesicherte Know-How, das sie im Rahmen einer neu orientierten Ausbildung wie auch später in der Schule benötigen. Fachdidaktische und pädagogisch-psychologische Themen werden gleichermaßen in dieser Buchreihe vertreten sein – einer Basisbibliothek für alle Lehramtsstudierenden, Referendarinnen und Referendare, Lehrerinnen und Lehrer.

Inhalt

Seite	11	VORWORT ZUR 3. AUFLAGE
	13	VORWORT
	15	1 ENTWICKLUNG DES ZAHLENVERSTÄNDNISSES UND MODELLE DER ZAHLENVERARBEITUNG
	16	1.1 Erste Schritte auf dem Weg zum Verständnis der Zahlen und der Zahlenstruktur
	18	1.2 Klassische Modelle zum frühen Umgang mit Mengen und Zahlen
	18	1.2.1 Das „logical-foundations“-Modell nach Piaget
	20	1.2.2 Das Skill-Integration-Modell der Zahlbegriffsentwicklung
	25	1.3 Neuere Entwicklungsmodelle des Erwerbs früher mathematischer Kompetenzen
	27	1.3.1 Das Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell) nach Krajewski
	38	1.3.2 Das Modell der mathematischen Kompetenzentwicklung nach Fritz und Ricken
	41	1.3.3 Die integrative Theorie der Zahlentwicklung von Siegler und Kollegen
	43	1.4 Neuropsychologische Modelle der numerischen Kognition
	43	1.4.1 Das Modell der Zahlenverarbeitung und des Rechnens
	45	1.4.2 Das Modell des bevorzugten Eingangsmodus
	46	1.4.3 Das multiple Transkodiermodell
	47	1.4.4 Das Modell der drei Repräsentationsformen
	51	1.4.5 Das Entwicklungsmodell der Zahlenverarbeitung nach von Aster und Kollegen
	55	2 VORLÄUFERFERTIGKEITEN MATHEMATISCHEN VERSTÄNDNISSES UND IHRE DIAGNOSTIK
	56	2.1 Allgemeine Probleme bei der Identifikation relevanter Ursachenfaktoren
	57	2.1.1 Schwache Mengen-Zahlen-Kompetenz als Symptom von Rechenschwierigkeiten

Seite	59	2.2	Frühe Vorhersage mathematischer Kompetenzen
	60	2.2.1	Unspezifische Prädiktoren von Schulleistungen in Mathematik
	71	2.2.2	Spezifische Vorhersagemerkmale der Mathematikleistung
	74	2.2.3	Untersuchungen zum Einfluss spezifischer und unspezifischer Vorläufermerkmale auf die Entwicklung der schulischen Mathematikleistungen
	81	2.3	Testverfahren zur Erfassung von Vorläuferfertigkeiten der Grundschulmathematik
	89	2.4	Förderung von Vorläuferfertigkeiten
	105	3	ENTWICKLUNG MATHEMATISCHER KOMPETENZEN IM SCHULALTER
	107	3.1	Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Grundschulalter
	107	3.1.1	Der Zusammenhang zwischen sprachlichen und mathematischen Kompetenzen
	112	3.1.2	Stufen des mathematischen Kompetenzerwerbs in der Grundschule
	118	3.1.3	Ergebnisse nationaler und internationaler Studien zur mathematischen Kompetenzentwicklung in der Grundschule
	126	3.2	Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe
	133	3.2.1	Ergebnisse nationaler und internationaler Studien zur mathematischen Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe
	143	3.2.2	Individuelle Unterschiede in der schulischen Entwicklung mathematischer Kompetenzen
	157	4	DIAGNOSTIK VON SCHULLEISTUNGEN IM BEREICH MATHEMATIK
	161	4.1	Testverfahren zur Erfassung früher mathematischer Kompetenzen
	165	4.2	Testverfahren zur Erfassung mathematischer Leistungen im Grundschulalter
	165	4.2.1	Testverfahren zur Erfassung curricularer Schulleistungen
	171	4.2.2	Testverfahren zur Erfassung arithmetischer Grundlagen

Seite	180	4.2.3	Testverfahren auf Basis entwicklungspsychologischer Theorien
	184	4.2.4	Testverfahren auf Basis neuropsychologischer Theorien
	190	4.3	Testverfahren zur Erfassung mathematischer Leistungen in der Sekundarstufe
	207	5	MERKMALE SCHWACHER RECHNER
	208	5.1	Definitionsprobleme
	212	5.1.1	Exkurs: Probleme mit dem Diskrepanzkriterium der Dyskalkulie
	213	5.2	Typische Verlaufssymptomatik der Rechenschwäche
	215	5.3	Theoretische Annahmen zur Entstehung von mathematischen Kompetenzen und Rechenschwäche
	222	5.4	Empirische Befunde zur typischen Symptomatik und zu kognitiven Defiziten bei Rechenschwäche und Dyskalkulie
	222	5.4.1	Typische Symptomatik
	225	5.4.2	Kognitive Defizite bei Rechenschwäche
	235	6	FÖRDERMASSNAHMEN IM SCHULISCHEN BEREICH
	237	6.1	Möglichkeiten schulischer Interventionen und deren Effektivität
	237	6.1.1	Probleme bei der Einschätzung außerschulischer Förderangebote
	239	6.1.2	Voraussetzungen für eine effektive schulische Förderung
	244	6.1.3	Förderprogramme für den Unterricht mit Evaluationsbedarf
	252	6.1.4	Evaluierte Förderprogramme für den Unterricht
	262	6.2	Empfehlungen für die Praxis
	269	7	FAZIT UND AUSBLICK
	275		Literaturverzeichnis
	313		Register

Vorwort zur 3. Auflage

Ein knappes Jahrzehnt nach der Veröffentlichung der Erstauflage dieses Buches kann konstatiert werden, dass sich im Bereich der mathematischen Kompetenzentwicklung seither enorm viel getan hat. Diese Einschätzung betrifft alle in unserem Buch abgehandelten Teilbereiche. Konnte man noch zu Beginn dieses Jahrtausends den Eindruck gewinnen, dass die Forschungslage und der Erkenntnisgewinn im Bereich der mathematischen Kompetenzentwicklung und der Dyskalkulie im Vergleich mit der Forschungssituation im Bereich des Schriftspracherwerbs und der Dyslexie/Legasthenie eher überschaubar schien, so hat sich das Bild mittlerweile deutlich verändert. Es lassen sich nicht nur interessante Weiterentwicklungen im Bereich der theoretischen Modellbildung verfolgen, sondern auch zahlreiche (vielfach längsschnittlich angelegte) empirische Arbeiten zu Aspekten vorschulischer und schulischer mathematischer Kompetenz und deren Relevanz für die weitere mathematische Leistungsentwicklung identifizieren. Ein ähnlich positiver Trend lässt sich für die Forschungsbefunde zur atypischen Entwicklung der Zahlenverarbeitung und der Rechenleistung nachweisen, also für Arbeiten zur Rechenschwäche/Dyskalkulie. In diesem Kontext hat sich die Anzahl einschlägiger diagnostischer Testverfahren zur Erfassung mathematischer Kompetenzen im Vorschul- und Schulalter deutlich erhöht. Dabei wurde praktisch wichtigen Aspekten wie etwa den Gütekriterien von Tests immer größere Aufmerksamkeit geschenkt. Demgegenüber ist die Zahl verfügbarer, empirisch evaluierter und langfristig wirksamer Trainings- und Interventionsansätze immer noch sehr begrenzt. Eine vor wenigen Jahren publizierte und im Buch skizzierte (S3-) Leitlinie zur Diagnostik und Behandlung von Rechenstörungen gibt Praktikern und Wissenschaftlern wertvolle Hinweise zur Qualität verfügbarer Tests und Interventionsverfahren.

In der Neuauflage unseres Buchs haben wir versucht, die enormen Fortschritte der letzten Jahre in den Text zu integrieren, was zu Erweiterungen der meisten Kapitel führte. Im Grundsatz ist die Zielsetzung des Buches aber unverändert geblieben. Es geht uns darum, die wesentlichen theoretischen Hintergründe für den mathematischen Kompetenzerwerb herauszuarbeiten und den typischen Entwicklungsverlauf in Vorschule und Schule möglichst präzise darzustellen. Die Präsentation bewährter und aktueller

diagnostischer Testverfahren zur Erfassung von Rechenleistungen soll nicht zuletzt dem Zweck dienen, Schulpsychologen wie auch Lehrkräften Hilfestellung für die Auswahl geeigneter Tests zu geben. Die meisten der beschriebenen Verfahren eignen sich dabei nicht nur für die Feststellung von Leistungen und Leistungsentwicklungen in Schulklassen, sondern können auch Hinweise auf das Vorliegen einer Rechenstörung/ Dyskalkulie im Einzelfall geben. Die Übersicht über verfügbare Trainings- bzw. Interventionsverfahren belegt, dass die in der Erstauflage noch erahnten positiven Entwicklungen nun tatsächlich beobachtbar sind.

Das Buch eignet sich aus unserer Sicht besonders für Studierende in Lehramtsstudiengängen, aber auch für Studierende der Psychologie und (Sonder-)Pädagogik, für Lehrkräfte und (Schul-)Psycholog*innen. Es richtet sich aber auch an Lern- und Dyskalkulie-Therapeut*innen, Erzieher*innen und interessierte Eltern. Die Darstellung ist so angelegt, dass sie einer ersten Orientierung dienen soll, darüber hinaus aber auch eine vertiefte Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Inhaltsbereichen dieser Thematik ermöglicht. Wir wünschen viel Freude bei der Lektüre und optimalen Lerngewinn!

Frau Nadine Albert und Frau Katrin Tenge-Borkowski vom Brill-Verlag sei für die kompetente fachliche Begleitung bei der Neuauflage dieses Buchs sehr herzlich gedankt.

Würzburg und Ludwigsburg, im April 2021

Wolfgang Schneider, Petra Küspert und Kristin Krajewski

Vorwort

Im vorliegenden Buch wird der Versuch unternommen, die Literatur zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Kindes- und Jugendalter kritisch zu sichten und die wesentlichen Erkenntnisse zusammenzustellen. Am Anfang steht die Diskussion neuerer Modelle des Erwerbs mathematischer Kompetenzen, die gezielt im Vorschulalter ansetzen. Sie sollen ein Verständnis der zentralen Erkenntnisfortschritte junger Kinder in diesem Bereich vermitteln und die Abfolge unterschiedlicher Stufen des Erkenntnisprozesses erläutern. Aus diesen theoretischen Modellen lassen sich relevante Vorläufermerkmale mathematischer Kompetenz ableiten, die in der Folge genauer beschrieben werden und entweder spezifisch für diesen Inhaltsbereich sind oder aber zusätzlich die Leistungen in anderen schulischen Bereichen vorhersagen können. Diese Vorläufermerkmale sind insbesondere für die Beschreibung und Erklärung individueller Unterschiede in den mathematischen Kompetenzen zu Beginn der Schulzeit bedeutsam. Im Folgekapitel wird der typische Entwicklungsverlauf mathematischer Kompetenzen während der Grundschulzeit und der Sekundarstufe erörtert, wobei insbesondere auf die Befunde einschlägiger Längsschnittstudien eingegangen wird.

Da sich diese Kompetenzen objektiv erfassen lassen, präsentieren wir in der Folge bewährte diagnostische Testverfahren zur Erfassung der Rechenleistung, die nicht nur von Schulpsychologen, sondern auch von Lehrkräften problemlos eingesetzt werden können. Sie eignen sich in der Regel auch für die Diagnose von Dyskalkulie, also einer spezifischen Störung in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Die Problematik schwacher Rechner wird dann im fünften und vorletzten Kapitel detaillierter diskutiert, wobei unterschiedliche Verursachungsmöglichkeiten vorgestellt werden und dem Eindruck entgegengearbeitet wird, dass es sich um ein homogenes Störungsbild handelt. Angesichts unterschiedlicher Problemschwerpunkte scheint es nicht trivial, Interventionsmethoden zu entwickeln und einzusetzen, die insgesamt hilfreich sind und nachhaltig wirken. Die derzeit verfügbaren Möglichkeiten in diesem Bereich werden im letzten Kapitel des Buches genauer beschrieben. Wenn auch die Lage im Interventionsbereich nach wie vor nicht optimal scheint, hat es in jüngerer Zeit doch einige vielversprechende Entwicklungen gegeben.

Als Leserschaft sind hauptsächlich Studierende in Lehramtsstudiengängen angesprochen. Das Buch kann aber auch für Studierende der Psychologie und Pädagogik interessant sein, weiterhin für Lehrkräfte, Schulpsychologen sowie für pädagogische wie auch psychologische Fachkräfte, die sich im Bereich der Dyskalkulie und ihrer Behandlung engagieren. Wir haben daher versucht, eine Brücke zwischen theoretischer Grundlegung und Anwendungsmöglichkeiten in der (späteren) Berufspraxis zu schlagen. Einerseits sollen grundlegende theoretische Konzepte vorgestellt, andererseits auch handlungsleitendes Wissen über aktuelle diagnostische Möglichkeiten wie auch Präventions- und Interventionsprogramme vermittelt werden. Die Darstellung kann einer ersten Orientierung dienen, ist aber auch so angelegt, dass eine vertiefte Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Inhalts- und Anwendungsbereichen möglich wird.

Wir hoffen, mit dieser Konzeption zu einer erfolgreichen und interessanten Arbeit mit dem Text beizutragen und wünschen dabei viel Freude und Lerngewinn.

Bei Herrn Dr. Diethard Sawicki und Frau Nadine Albert möchten wir uns für die konstruktive Unterstützung von Verlagsseite bedanken, weiterhin bei Michaela Pirkner für die Bearbeitung und das sorgfältige Korrekturlesen des Manuskripts.

Würzburg und Gießen, im Dezember 2012

Wolfgang Schneider, Petra Küspert und Kristin Krajewski

ENTWICKLUNG DES ZAHLENVERSTÄNDNISSES
UND MODELLE DER ZAHLENVERARBEITUNG

1

1.1 Erste Schritte auf dem Weg zum Verständnis der Zahlen und der Zahlenstruktur

Kinder beschäftigen sich bereits lange vor der Einschulung mit Mengen und Zahlen, sodass der Schuleintritt bei Weitem nicht als „Stunde null“ für den Aufbau mathematischer Kompetenz zu verstehen ist. Im alltäglichen Spiel vergleichen Kleinkinder Mengen, stellen beispielsweise fest, wer „mehr“ oder „weniger“ Gummibärchen hat, sie sagen die Zahlwortreihe auf (anfangs fehlerhaft und unvollständig, später hoch automatisiert), und sie führen Aus- und Abzählhandlungen durch, die im Verlauf des Kleinkindalters zunehmend sicherer und zuverlässiger werden.

Umgang mit
Mengen

Wenn auch die Ausführungen in diesem Kapitel auf die vorschulische Entwicklung von mathematischen Kompetenzen fokussieren, gibt es Belege dafür, dass auch Tiere zwischen groben Mengen differenzieren können. Der Umstand, dass der Umgang mit Mengen nicht an die Beherrschung der Sprache gebunden ist, dokumentiert sich schon darin, dass selbst Tiere nach entsprechendem Training in diesem Bereich beachtliche Leistungen erbringen können. So zeigten sich etwa in der Studie von Jordan und Brannon (2003) Rhesusaffen dazu in der Lage, nach vorhergehender Einübung der Mengen-Anzahl-Korrespondenz bei Kartchen mit zwei resp. acht Elementen die passende Zuordnung zu treffen. Dies funktionierte auch dann, wenn sich die Mengenkarten im Test hinsichtlich Größe, Farbe und räumlicher Anordnung der Elemente von den Trainingskarten unterschieden. Offensichtlich gelang es den Affen, die Zuordnung einzig auf der Basis der Anzahl der dargebotenen Objekte zu treffen und von anderen Merkmalen wie räumlicher Ausdehnung oder Dichte zu abstrahieren. Allerdings bedürfen Primaten eines intensiven Trainings, um solche Abstraktionsleistungen zu erbringen, und ihre Fähigkeit beschränkt sich auf die Unterscheidung geringer Mengen.

Diese Restriktion unterscheidet sie beträchtlich von Kindern. Es scheint bemerkenswert, dass schon Säuglinge lange vor Einsetzen der Sprache ein basales Verständnis für Mengeneigenschaften zeigen (vgl. Wynn, 1996; Xu & Spelke, 2000). Es hat dabei den Anschein, dass bestimmte Aspekte der numerischen Kognition von Geburt an in ihren Grundzügen angelegt sind. So scheinen beim Menschen sogenannte „Kernsysteme“ (vgl. Spelke & Kinzler, 2007) im Hinblick auf das Verständnis von „Num-

erositäten“ (Anzahl der in einem Set befindlichen Elemente) als genetisch determinierte Basiskompetenzen von Beginn an zu bestehen und in einem bedeutsamen Ausmaß die Grundlage für späteres Zahlenverständnis und Zahlenverarbeitung und deren Anwendung im arithmetischen Kontext zu bilden. In den klassischen Studien von Wynn wurden Säuglinge im Alter von vier bis sechs Monaten im Rahmen eines „Habituation-Dishabituation-Paradigmas“ daraufhin untersucht, über welche Kompetenzen sie schon im numerischen Bereich verfügen. Dieses Paradigma sieht vor, dass den Säuglingen zunächst ein Stimulus (beispielsweise: zwei Objekte) wiederholt solange präsentiert wird, bis eine Gewöhnung stattgefunden hat und sich die Betrachtungszeit der Objekte deutlich verkürzt. Wenn nun eine neue Anzahl (z.B. drei Objekte) präsentiert wird und sich die Blickdauer daraufhin deutlich erhöht, wird daraus geschlossen, dass die Kinder diesen Mengenunterschied wahrgenommen haben. Wie die Studie von Xu und Spelke (2000) zeigen konnte, ist die Wahrnehmung von Numerositäten nicht auf einen kleinen Zahlenraum von bis zu vier Elementen beschränkt. Säuglinge können vielmehr die Veränderung von Numerositäten auch bei größeren Sets bemerken, solange die Relation zwischen den Objekten mindestens 2:1 beträgt, nicht aber dann, wenn sie kleiner ausfällt. So fanden sich Dishabituationseffekte (längere Blickzeiten) als Hinweis auf ein Entdecken der Unterschiede etwa dann, wenn im Anschluss an 16 Elemente nun 32 Elemente präsentiert wurden, nicht aber dann, wenn die neue Anzahl 12 Elemente betrug.

Wahrnehmung von
Numerositäten

Nach wie vor wird in diesem Zusammenhang allerdings kontrovers diskutiert, auf welcher Informationsbasis die Kinder ihre Unterscheidungen überhaupt treffen. Da eine größere Anzahl von Objekten in der Regel auch mit Unterschieden in kontinuierlichen Merkmalen wie Fläche und Volumen assoziiert ist, könnte die vorgenommene Differenzierung entweder auf der Unterscheidung unterschiedlich vieler diskreter Elemente oder aber unterschiedlich großer Mengen bzw. Oberflächen basieren (vgl. ausführlicher Krajewski, 2003). In der Tat scheinen Säuglinge die Unterschiede zwischen Mengen eher an der *räumlichen Ausdehnung der Objekte* festzumachen, nicht jedoch an den unterschiedlichen Anzahlen, also diskreten Merkmalen. So nehmen sie etwa Mengen genau dann *nicht* als verschieden voneinander wahr,

wenn diese sich zwar in der Anzahl (z.B. eine Puppe vs. zwei Puppen), nicht aber in Umfang und Fläche unterscheiden (eine große Puppe wird also nicht als „weniger“ wahrgenommen als zwei kleine Puppen; vgl. Feigenson, Carey & Spelke, 2002; Clearfield & Mix, 1999; Simon, Hespos & Rochat, 1995). Insgesamt scheint die Befundlage zu dieser Frage eher inkonsistent und noch nicht abschließend geklärt, sodass weitere Untersuchungen mit verbesserten experimentellen Ansätzen erforderlich sind.

1.2 Klassische Modelle zum frühen Umgang mit Mengen und Zahlen

Auch wenn schon Säuglinge über erstaunliche Kompetenzen bei der Verarbeitung von Numerositäten verfügen, beginnen Kinder in der Regel erst ab dem Alter von zwei bis drei Jahren die Fertigkeit des Zählens zu erwerben. Das Mathematiklernen beginnt demnach schon im frühen Kindesalter, also deutlich vor Schuleintritt, und wird durch informelle Erfahrungen im Elternhaus und im Kindergarten stimuliert. Wie von Krajewski, Grüßing und Peter-Koop (2009) hervorgehoben wurde, lassen sich im Wesentlichen zwei frühe Modellvorstellungen zum Erwerb des Zahlbegriffs unterscheiden, die in ihren Grundannahmen differieren und im Folgenden genauer beschrieben werden.

1.2.1 Das „logical-foundations“-Modell nach Piaget

Wesentliche Erkenntnisse zur frühen mathematischen Kompetenzentwicklung verdanken wir den klassischen Arbeiten Jean Piagets, der davon ausging, dass sich der Zahlbegriff auf der Basis logisch formaler Operationen entwickelt (vgl. etwa Piaget & Szeminska, 1975). Als zentrale logische Operationen werden das Verständnis für den Erhalt und die Invarianz von Quantitäten, kardinale und ordinale Eins-zu-eins-Zuordnungen sowie additive und multiplikative Kompositionen angenommen.

Über Klassifikationen von Objekten erwirbt das Kind den kardinalen Aspekt von Zahlen, also das Wissen darüber, dass eine Zahl die Anzahl der Elemente einer Menge angibt. Über Reihungsaufgaben (Seriationen) erwirbt das Kind den ordinalen

Aspekt von Zahlen (eine Zahl gibt den Rangplatz in einer geordneten Menge an). Beide Aspekte entwickeln sich Piaget zufolge etwa zur gleichen Zeit und führen zum Verständnis des Zahlbegriffs. Das Verständnis für Zahlen und dafür, wie das Hinzu- und Wegnehmen von Elementen diese verändern, spiegelt sich nach Piaget im Verständnis der Zahlinvarianz wider (s. etwa Piaget & Szeminska, 1975). Mit „Zahlinvarianz“ meinte Piaget die Einsicht, dass sich die Anzahl der Elemente einer Menge nicht ändert, wenn man deren räumliche Ausdehnung ändert. Er sah das Erkennen und bewusste Verstehen der inneren Gesetze von Zahlen in dieser Fähigkeit begründet. Das Verständnis der Zahl begann für ihn demnach mit der Erhaltung des numerischen Ganzen („Zählerhalt“). Zwei Leistungen schienen hierfür und demnach für den Erwerb des Zahlbegriffs bedeutsam, nämlich Kompetenzen zur Klasseninklusion und zur Seriation. „Klasseninklusion“ meint das Zuordnen einer Teilklasse in eine Gesamtklasse und damit Ordnen im Sinne ineinander verschachtelter Teil-Ganzes-Mengen. Piaget glaubte, dass diese Fähigkeit unmittelbar zum *Verständnis des Kardinalaspekts* einer Zahl führt, da das Verständnis dafür, dass „einige“ ein Teil ist von „alle“ und dass eine kleine Menge eingeschachtelt ist in eine größere analog sei dem Verständnis, dass die Klasse, die nur ein Element enthält (und damit die Zahl 1), enthalten ist in der Klasse, die zwei Elemente enthält (und damit die Zahl 2), welche wiederum enthalten ist in der Klasse, die drei Elemente enthält (Zahl 3) usw. Unter „Seriation“ verstand Piaget die Fähigkeit, Elemente nach zunehmender oder abnehmender Größe zu ordnen. Nach seiner Ansicht erhalten die Elemente einer Menge durch eine solche Aufreihung ihre asymmetrische Relation zueinander: Das erste Element (und damit die Zahl 1) ist kleiner als das zweite Element (und damit die Zahl 2), welches aber wiederum kleiner ist als das dritte Element (und damit die Zahl 3) usw. Hierin sah Piaget den *Ordinalitätsaspekt* einer Zahl begründet.

Die Entwicklung des Zahlkonzepts beim Kind vollzieht sich nach seiner Auffassung nun als Verschmelzung von Klasseninklusion (Verständnis für Teil-Ganzes-Beziehungen) und Seriation (Verständnis für Ungleichheitsbeziehungen), weil so das Kind die Zahl als Vereinigung ihrer kardinalen Funktion (Mengenbegriff) und ihrer ordinalen Funktion (Ordnungsbegriff) erwirbt. Nur mit diesem Verständnis sind Piaget zufolge Kinder (in der Regel erst

im Alter von sechs bis sieben Jahren) dazu in der Lage, die natürlichen Zahlen zu erfassen und mathematische Operationen wie die Addition zu verstehen. Zählübungen haben im Ansatz von Piaget keinen operativen Wert und damit auch keinen förderlichen Effekt auf die Entwicklung des Zahlbegriffs. Aus dem Umstand, dass ein Kind schon zählen kann, lässt sich seiner Meinung nach nicht folgern, dass es auch schon hinreichend Wissen über die Funktion von Zahlen besitzt.

Verständnis von
Kardinal- und
Ordinalzahl

Wenn auch der Forschungsansatz von Piaget sicherlich als bahnbrechend angesehen werden kann und viel sinnvolle Forschung angeregt hat, hat sich ab den 70er-Jahren auch deutliche Kritik am Modell und den Befunden artikuliert. So ließ sich etwa die Annahme, dass sich das Verständnis von Kardinal- und Ordinalzahl in etwa gleichzeitig entwickelt, empirisch nicht bestätigen (vgl. etwa Brainerd, 1979). Es gibt mittlerweile viele Belege dafür, dass sich das Verständnis der Ordinalzahl vor dem der Kardinalzahl entwickelt, und dass auch Trainingsprogramme zur Ordinalzahl einen größeren Zuwachs an arithmetischen Kompetenzen produzieren als Trainings, die im Wesentlichen nur auf die Kardinalzahl fokussieren (vgl. Krajewski et al., 2009).

Mehrere Forscher gingen nun aufgrund neuerer Befunde auch davon aus, dass die Fähigkeit zur Zahlinvarianz von Mengen nicht der geeignete Fokus ist, um den Erwerb der Zahl zu erklären, und schrieben im Unterschied zu Piaget vor allem dem Zählen große Bedeutung zu. Es ließ sich weiterhin zeigen, dass entgegen den Grundannahmen Piagets Kinder einen operativen Zahlbegriff schon vor dem Erwerb der konkret-operationalen Stufe (sechs bis sieben Jahre), also deutlich vor Schulbeginn, erwerben.

1.2.2 Das Skill-Integration-Modell der Zahlbegriffsentwicklung

Im Zusammenhang mit der Kritik an Piagets Theorie zur Entwicklung des Zahlbegriffs wurden vor allem im angloamerikanischen Raum alternative Modellvorstellungen generiert, die nach Clements (1984) unter dem Begriff des „Skill-Integration“-Modells zusammengefasst werden können. In diesem Ansatz wird davon ausgegangen, dass Kinder schon frühzeitig über Grundkompetenzen und basale Einsichten im Hinblick auf Zahlen verfügen

und sich die Entwicklung des Zahlbegriffs als Integration unterschiedlicher Fähigkeiten und Fertigkeiten beschreiben lässt. Mittlerweile klassische Arbeiten von Gelman und Gallistel (1978), Fuson (1988) und Resnick (1983, 1989) haben diese Modellentwicklung stark geprägt. Vertretern dieses Ansatzes zufolge beginnt die Kompetenz des Zählens mit dem Erwerb der Zahlwörter. Wie später noch verdeutlicht werden wird, ist hier allerdings einschränkend anzumerken, dass aus einer auswendig gelernten Zahlwortreihenfolge noch nicht eindeutig hervorgeht, ob das Kind schon ein wahres Zahlverständnis erworben hat.

Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel

Gelman und Gallistel (1978; vgl. auch Gelman, 2009) beschreiben genauer, was mit der Kompetenz des Zählkönnens gemeint ist und welche Fähigkeiten für diese Kompetenz beim Kind entwickelt sein müssen. Sie unterscheiden drei Prinzipien, die festlegen, wie richtig gezählt wird, und zwei weitere Prinzipien, die bestimmen, unter welchen Voraussetzungen die ersten drei angewendet werden können.

Kompetenz des
Zählkönnens

Prinzip der Eins-zu-eins-Zuordnung. Um richtig zu zählen, ist es nach Auffassung von Gelman und Gallistel wichtig, eine Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen den Zahlwörtern und den zu zählenden Objekten herstellen zu können. Diese paarweise Zuordnung stellt nach Stern (1996) die Handlungsbasis für das Vergleichen dar und liegt der Zuordnung von Zahlwörtern zu Mengen zugrunde.

Prinzip der stabilen Abfolge. Zum Zweiten muss ein Kind begreifen, dass beim Zählen jede Zahl nur einmal und stets in derselben Position der Zahlenfolge vorkommt. So ist ein Kind, das eine Anzahl von vier Bällen immer wieder mit den Zahlwörtern „eins, zwei, vier, zehn“ belegt, zwar noch nicht mit der genauen Abfolge der Zahlwörter, aber bereits mit dem Prinzip der stabilen Abfolge vertraut.

Kardinalitätsprinzip. Drittens ist es bedeutsam zu erkennen, dass die letzte Zahl beim Auszählen einer Menge deren Anzahl oder Kardinalität angibt. Es ist nicht leicht zu erschließen, ob dieses Prinzip von den Kindern wirklich beherrscht wird. Auch wenn beispielsweise die beiden zuerst genannten Prinzipien verfügbar sind und das Kind die oben erwähnten vier Bälle korrekt abzählt, hat es

möglicherweise noch nicht erfasst, dass eine Menge von insgesamt vier Bällen vor ihm liegt. Das Kardinalitätsprinzip scheint etwa dann noch nicht verstanden zu sein, wenn auf die Frage, wie viele Bälle es denn nun sind, wieder von vorne gezählt wird.

Die genannten Prinzipien werden dann korrekt angewendet, wenn zum einen von der Qualität der zu zählenden Objekte abstrahiert wird (z.B. Bälle gezählt werden, die sich in ihrer Größe und Farbe voneinander unterscheiden), zum anderen dann, wenn erkannt worden ist, dass man mit dem Auszählen einer Gruppe von Objekten an jeder beliebigen Stelle (z.B. links, rechts, Mitte) beginnen kann, weil sich die Gesamtzahl der Objekte nicht verändert, solange man jedes Objekt nur einmal zählt.

Gelman und Gallistel beziehen sich bei ihrer Betrachtung des Zählens auf die Fähigkeit des *Aus-* bzw. *Abzählens* von Elementen. Wie schon erwähnt ist das Zählen jedoch nicht zwangsläufig immer schon bewusst mit dahinterstehenden Mengen (Anzahlen) verknüpft (Krajewski, 2005). Kleine Kinder erlernen die Folge der Zahlwörter zunächst oft wie das Nachsprechen eines Kinderreimes, der noch keinen Bezug zu (m Auszählen von) Elementen aufweist. Daher ist ein weiterer entwicklungspsychologischer Ansatz zur Entwicklung des Zählens interessant, in dem Karen Fuson (1988) die Entwicklung des Zahlwortgebrauchs beschreibt.

Entwicklung des Zahlwortgebrauchs nach Fuson

Struktur der
Zahlwörter

Grundlegend für den Erwerb der Zahlreihenfolge (1, 2, 3, ...) ist nach Ansicht der Autorin, dass ein Kind zunächst zwischen Zahlwort und Nichtzahlwort unterscheidet und ausschließlich Zahlwörter benutzt, wenn es zum Zählen aufgefordert wird. Weiterhin ist es notwendig, dass die Struktur der Zahlwörter erkannt wird. Durch deren Irregularität ist dies im Zahlenraum bis 20 schwer möglich (es heißt z.B. „elf“ statt „einszehn“, „zwölf“ statt „zweizehn“, „zwanzig“ statt „zweizig“), weshalb Kinder die Zahlen bis 20 zunächst ohne tieferes Verständnis auswendig lernen müssen. Erst wenn das Kind die Zahlen in der richtigen Folge aufsaugen kann, ist es schließlich fähig, ein tieferes Verständnis im Umgang mit den Zählzahlen zu erlangen. Diese Weiterentwicklung vollzieht sich nach Fuson auf fünf Ebenen. Um dem zählvorwissenden Leser einen besseren Eindruck zu vermitteln, dass Schwierigkeiten in den einzelnen Phasen auftreten können, sind

zur Veranschaulichung den Zahl-Ketten (kommentarlos) analoge Buchstaben-Beispiele nachgestellt (vgl. Krajewski, 2003).

1) **Undifferenziertes Wortganzes:**

„einszweidreivierfünfsechssiebenachtneunzehn“

„abcdefghijklmnopqrstuvwxy^z“

Das Kind durchläuft die gesamte automatisierte Zählprozedur von Anfang bis Ende und nimmt die Zahlen nicht als getrennt voneinander wahr; die Zahlkette kann nur vollständig wiedergegeben werden. Eine Eins-zu-eins-Zuordnung von Zahlwort zu Objekt ist nicht möglich. Dies ist eine sehr kurze Phase, die man schon bei Kindern im Alter von etwa zwei Jahren vorfinden kann, die aber nicht immer zu beobachten ist.

2) **Unzerbrechliche Kette:**

„eins-zwei-drei-vier-fünf-sechs-sieben-acht-neun-zehn“

„a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-m-n-o-p-q-r-s-t-u-v-w-x-y-z“

Das Kind zählt immer noch von Anfang bis Ende. Es nimmt die Zahlen aber nun als separate Wörter wahr, die jedoch immer noch als unzertrennliches Ganzes aneinanderhängen, weshalb das Zählen jedes Mal mit „eins“ begonnen werden muss. Durch eindeutiges Zuordnen von Zahlwort und Objekt wird korrektes Abzählen möglich. Das Ende des Zählvorganges bzw. der Kette wird als Kardinalwert („10 Objekte“) bewusst.

3) **Aufgebrochene Kette:**

„**sieben** - acht - neun - zehn“ → „zehn - neun - acht - **sieben**“

„**k** - l - m - n - o - p - q - r - s - t“ → „t - s - r - q - p - o - n - m - l - **k**“

Etwa im Alter von vier Jahren kann das Kind irgendwo in der Reihe mit dem Zählen beginnen. Der Kardinalwert dieser Startzahl wird als Teilmenge bewusst (d.h. wenn man bei der Sieben zu zählen beginnt, schließt das schon sieben Objekte ein). Die Zahlwörter werden einzeln wahrgenommen, was das Kind beispielsweise befähigt, Zahlen genau vor, genau nach oder zwischen anderen Zahlen anzugeben. Später kann auch rückwärts gezählt werden.

4) **Numerische Kette:**

$5+3$ → „**fünf** ... sechs-sieben-**acht**“

$e+c$ → „**e** ... -f-g-**h**“

Nun zeigt sich nach Fuson ein erstes numerisches Verständnis, da die Zahl als einzelne Einheit im numerischen Sinn gesehen wird. (Dies wird besonders darin deutlich, dass ab dieser Stufe die Analogie mit der Buchstabenfolge vom „praktischen“ Sinn her fehlschlägt: „e+c“ macht keinerlei Sinn, wenn man sich die Buchstaben nicht – wie dies die LeserInnen sicherlich automatisch tun – als Repräsentanten von Zahlen vorstellt.) Jede Teilkette („eins-zwei-drei“) kann als numerische Situation wahrgenommen werden, welche gezählt und mit anderen verglichen werden kann. Durch Abzählen an den Fingern wird Rechnen möglich. Diese Form des Rechnens geschieht durch Hoch- und Herunterzählen, was noch kein wahres Verständnis der Rechenoperationen impliziert.

5) **Vorwärts-Rückwärts-Kette:**

$$8 - 5 = 3 \rightarrow 3 + 5 = 8 \quad \text{sowie} \quad 3 + 5 = 7 + 1 = 6 + 2 = 4 + 4$$

$$h - e = c \rightarrow c + e = h \quad \text{sowie} \quad c + e = g + a = f + b = d + d$$

Auf der letzten Ebene, die wohl kaum vor Schuleintritt zu erwarten ist, wird dem Kind schließlich nach Ansicht von Fuson die Umkehrbarkeit von Addition und Subtraktion bewusst. Es kann genauso leicht rückwärts wie vorwärts zählen und mit dem numerischen Teil-Ganzes-Schema operieren (Zerlegen von Zahlen in verschiedene Komponenten). Zählen wird als eine, aber nicht einzige Strategie des Rechnens erkannt. Fuson spricht hier von wahren numerischen Zählen.

Diese fünf Ebenen unterscheiden sich qualitativ voneinander – eine neue Ebene spiegelt zunehmende Kompetenzen beim Umgang mit der Zahlreihenfolge wider. Da sich dieser Entwicklungsprozess für größere Zahlen noch lange fortsetzt, nachdem ein Kind die ersten Zahlwörter richtig aufgesagt hat, ist es möglich, dass es sich für verschiedene Teile der Zahlwortreihe gleichzeitig in verschiedenen Entwicklungsphasen (also auf verschiedenen Ebenen) befindet.

Kopplung von Zählprozedur und protoquantitativen Schemata nach Resnick

Lauren Resnick (1989) stellt heraus, dass es besonders wichtig ist, die Fähigkeit zum Zählen auch in engem Zusammenhang mit

dem Mengenverständnis zu betrachten. Sie sieht die Kopplung der Zählprozedur mit dem Verständnis für Mengen und Mengenbeziehungen als bedeutsamste Notwendigkeit für den Erwerb mathematischer Kompetenzen. Grundlage des mathematischen Verständnisses ist nach ihrer Theorie die Kopplung der exakten Zähl-Zahlen an die bereits verfügbaren quantitativen Begriffe des Kindes wie „viel“ und „wenig“, „größer (als)“ und „kleiner (als)“, welche nur unpräzise Beschreibungen von Mengen wiedergeben.

Aus der Sicht von Landerl, Vogel und Kaufmann (2017) kommt dem Erwerb des verbalen Zählens bei der frühen Entwicklung mathematischer Kompetenzen eine zentrale Rolle zu. Einmal stellt die Zuordnung von Zahlwörtern zu den korrespondierenden Numerositäten (Mengen) eine erste symbolische Repräsentation von Mengen dar. Die zweite gängige symbolische Repräsentationsform von Mengen, nämlich arabische Ziffern, wird von der Mehrzahl von Kindern erst später im schulischen Kontext erworben. Zum anderen dient das Zählen als Voraussetzung für die Herausbildung von Rechenoperationen wie Addition und Subtraktion und damit als Voraussetzung für die arithmetische Kompetenz.

Erwerb des verbalen
Zählens

1.3 Neuere Entwicklungsmodelle des Erwerbs früher mathematischer Kompetenzen

Bereits seit mehr als 50 Jahren beschäftigt sich die kognitionspsychologische Forschung mit der Zahlenverarbeitung und der arithmetischen Kompetenz Erwachsener, und es wurde deutlich, dass sich Rechenfertigkeiten aus einer ganzen Reihe von – teils voneinander unabhängigen – Teilkompetenzen speisen (für einen Überblick siehe Landerl et al., 2017). Dabei zeigen Studien, in denen bildgebende Verfahren eingesetzt werden, dass durchaus von Unterschieden in den zentralen Aktivierungsmustern bei Erwachsenen und Kindern auszugehen ist (z.B. Ansari & Dithal, 2006). In neuerer Zeit hat sich demnach die Auffassung verfestigt, dass Ergebnisse aus der Forschung mit Erwachsenen keinesfalls ungeprüft auf Kinder übertragen und als Basis für die Ableitung von Entwicklungsmodellen genutzt werden dürfen. Es besteht von daher die Notwendigkeit, eigene Modelle für die frühe Entwicklung mathematischer Kompetenzen zu formulieren.

Vorläuferfertigkeiten
mathematischer
Kompetenz

Im (elementar-)pädagogischen Alltag zeigt sich eine kritisch zu betrachtende Tendenz, die dahin geht, basale Kompetenzen (etwa Figur-Grund-Unterscheidung, Raum-Lage-Wahrnehmung, Links-Rechts-Unterscheidung oder visuo-motorische Koordination etc.) ohne ausreichende Datenbasis zu spezifischen Vorläuferfertigkeiten mathematischer Kompetenz zu erheben (vgl. Milz, 1997), und damit deren vorschulische Förderung als primäre Maßnahme zur Prävention von Rechenschwäche zu empfehlen. Selbstverständlich ist davon auszugehen, dass diese unspezifischen Variablen den vorschulischen Aufbau spezifischer mathematischer Vorkenntnisse beeinflussen. Entsprechende Förderempfehlungen sollten jedoch erst dann ausgesprochen werden, wenn in Längsschnittuntersuchungen ein kausaler Wirkungszusammenhang eindeutig belegt werden konnte. In Analogie zur klassischen Legasthenieforschung lässt sich durchaus erwarten, dass die Bedeutung solcher unspezifischer Vorläuferfertigkeiten für den Aufbau spezifischer mathematischer Kompetenzen deutlich relativiert werden muss.

Erfassung mathe-
matischer Basis-
kompetenzen

Erst in jüngerer Zeit ist es gelungen, unter Berücksichtigung von Einzelkonzepten verschiedener Forschergruppen und anhand der oben beschriebenen Erkenntnisse von Piaget und Szeminska (1975), Gelman und Gallistel (1978) sowie Fuson (1988) und Resnick (1989) erste fundierte und empirisch belastbare *Entwicklungsmodelle* zu entwickeln. Das erste in dieser Hinsicht bedeutsame Modell wurde von Krajewski (2003, 2005, 2007) generiert und wird in der Folge genauer dargestellt. Seine Relevanz verdankt dieses Modell nicht zuletzt der Tatsache, dass es mit längsschnittlichen Befunden zur mathematischen Kompetenzentwicklung von Vorschulkindern gut kompatibel ist (vgl. etwa Krajewski & Schneider, 2006, 2009a und 2009b). Es diente auch als Grundlage für die Erstellung von vier Testverfahren zur Erfassung mathematischer Basiskompetenzen, die den gesamten Altersbereich vom Kindergartenalter bis zum Ende der Schulzeit abdecken (MBK-0; Krajewski, 2018; MBK-1; Ennemoser, Krajewski & Sinner, 2017; MBK 2-4; Krajewski & Ennemoser, in Vorb.; MBK 4-13+; Ennemoser & Krajewski, in Druck) sowie eines in seiner Wirksamkeit vielfach empirisch bestätigten Trainings mathematischer Kompetenzen im Vor- und Grundschulalter (Mengen, zählen, Zahlen; Krajewski, Nieding & Schneider, 2007).

1.3.1 Das Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell) nach Krajewski

Krajewski entwickelte ein Modell (2003, 2005, 2007), das den gesamten Entwicklungsbereich ab der Geburt bis ins Grundschulalter umspannt und von ihr jüngst auch ins Sekundarstufenalter übertragen wurde. Im Verlauf der hier betrachteten Zeitspanne durchlaufen Kinder verschiedene Phasen oder „Meilensteine“, die durch eine zunehmend tiefere Verknüpfung von Zahlwörtern und Ziffern mit Mengen bzw. Größen gekennzeichnet sind (s. Abb. 1, Krajewski, 2007, 2013). Der in ihren Arbeiten ursprünglich verwendete Begriff des „Mengen- und Zahlenwissens“ bzw. „mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens“ (Krajewski, 2003, 2005) wurde

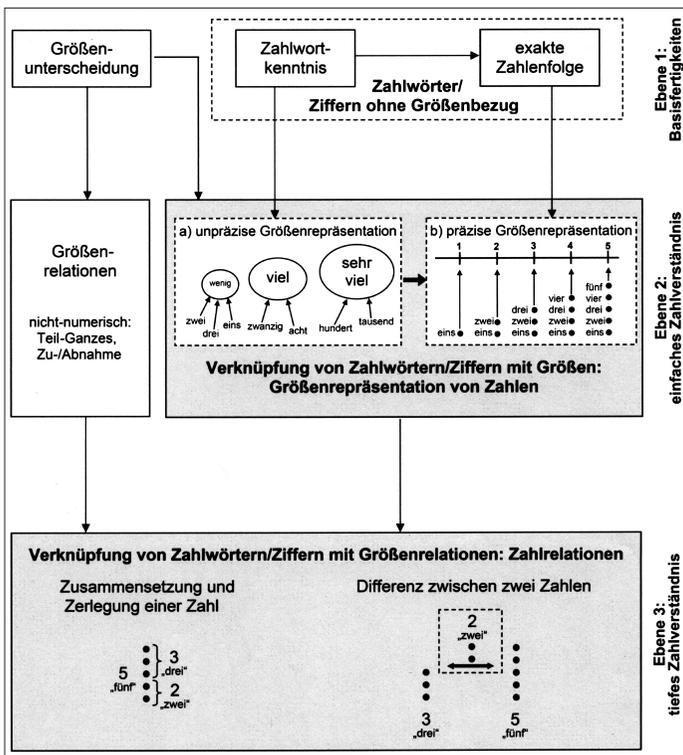


Abbildung 1 | Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung nach Krajewski (2013)

von der Autorin später unter der Bezeichnung „Mengen-Zahlen-Kompetenzen“ (2007) erweitert und neu strukturiert und nunmehr mit dem Begriff „Zahl-Größen-Kompetenzen“ (2013) belegt. Hierbei impliziert der Begriff der „Größe“ im Vergleich zum vormals verwendeten Mengenbegriff eine inhaltliche Erweiterung und umfasst nun nicht mehr nur Größen wie Fläche und Volumen (vgl. „Mengen“), sondern schließt weitere Größen wie etwa Gewicht oder Zeit mit ein. Da Abzählbarkeit von Elementen unter dem von Krajewski streng gefassten Mengen- und Größenbegriff keine Rolle spielt (es ist hier von „numerisch unbestimmten“ Mengen und Größen die Rede; vgl. Krajewski 2003, 2005), impliziert dieser auch nicht, dass bei Urteilen und Operationen, die sich auf Mengen, Zeit und Gewicht beziehen, zwangsläufig ein Zahlbezug hergestellt wird. Vielmehr können nach ihrem Verständnis Urteile und Operationen mit diesen Größen auch ohne die Verwendung von Zahlwörtern vollzogen werden. So kann etwa eingeschätzt werden, welche von zwei betrachteten Größen „mehr“ oder „weniger“, „leichter“ oder „schwerer“, „länger“ oder „kürzer“, „tiefer“ oder „höher“ etc. ist, ohne dass für eines dieser Urteile ein Bezug zu Zahlen zwangsläufig erforderlich wäre (vgl. Krajewski & Ennemoser, 2013). Im Folgenden sollen die drei Kompetenzebenen des Modells beschrieben werden.

Kompetenzebene 1: Zahlwörter und Ziffern ohne Mengenbezug/Größenbezug

Wie die Abbildung erkennen lässt, bezieht sich die erste Phase auf zwei unterschiedliche Basisfertigkeiten, nämlich einerseits die Wahrnehmung von Mengen- bzw. Größenunterschieden und andererseits das Aufsagen von Zahlwörtern, die zu diesem frühen Zeitpunkt noch *keinerlei Beziehungen zueinander* aufweisen.

Mengen- bzw. Größenwahrnehmung

Unpräzise Mengen- bzw. Größenunterscheidung. Erste Fähigkeiten lassen sich im Umgang mit Mengen ausmachen, die natürlich noch pränumerisch, also ohne jeglichen Bezug zu Zahlen wahrgenommen werden. Wie schon erwähnt sind Säuglinge bereits kurz nach der Geburt dazu in der Lage, grobe Unterschiede zwischen Mengen zu erkennen, die auf Unterschieden in Ausdehnung, Fläche und Volumen der Mengen gründen.

Zahlwortfolge

Aufsagen von Zahlwörtern/Erwerb der exakten Zahlwortfolge. Mit dem Einsetzen verbalsprachlicher Äußerungen verwenden

Kleinkinder etwa ab dem zweiten Lebensjahr auch zunehmend Zahlwörter. Sie sprechen durch Erwachsene vorgegebene Reihenfolgen nach und sagen nach einiger Übung auch selbstständig Zahlenreihen auf. Dieses Aufsagen der Zahlwortreihe geschieht anfangs gegebenenfalls noch fehler- und lückenhaft („eins, zwei, drei, fünf, sieben, sechs ...“), später zunehmend exakt und bis zum Grundschulalter natürlich auch immer weiter (z.B. vier-fünf-sechsen-sieben; zweitausendvierhundsieben-zweitausendvierhundertacht-zweitausendvierhundertneun). Dabei bringen die Kinder die benutzten Zahlwörter in dieser frühen Entwicklungsphase noch nicht mit Mengen und Größen in Verbindung, selbst wenn sie die Zahlwörter gegebenenfalls bereits in ihre arabische Ziffernschreibweise übersetzen können (4-5-6-7; 2407-2408-2409). Sie sagen die Zahlwörter lediglich als auswendig gelernte Wörter auf und können hier zunehmend auch Zahlwörter benennen, die in der Zahlwortfolge vor oder nach einer anderen Zahl kommen (Vorgänger/Nachfolger) oder die Folge auch rückwärts aufsagen. Diese Leistung ist vergleichbar mit dem Aufsagen des Alphabets (und dem Benennen von Buchstaben, die in der Folge vor oder nach einem anderen Buchstaben kommen), das ebenfalls als phonetisch geordnete Folge verinnerlicht ist. Es bleibt festzuhalten, dass Kinder schon sehr früh über eine Mengen- bzw. Größenwahrnehmung verfügen und basale Fertigkeiten hinsichtlich der Zahlwortfolge aufbauen, dabei jedoch noch keinerlei Zahl-Größen-Bezüge verstehen können oder gar selbst herstellen. Eine erste Annäherung beider Bereiche kennzeichnet nach Krajewski das Erreichen der Kompetenzebene 2.

Kompetenzebene 2: Verknüpfung von Zahlwörtern und Ziffern mit Mengen/Größen (Größenrepräsentation von Zahlen)

Als wichtigster Meilenstein wird im Modell die Verknüpfung von Zahlwörtern (und ggf. Ziffern) mit Mengen bzw. Größenrepräsentationen gesehen. Hierbei lassen sich auf dieser Ebene ganz entscheidende Zugewinne verzeichnen, die sich als entstehende und sich schließlich verfestigende „*Mengen-/Größenbewusstheit von Zahlen*“ bzw. Größenrepräsentationen von Zahlen beschreiben lassen. Diese Entwicklung beginnt ab etwa drei Jahren und läuft nach Krajewski in zwei Phasen ab. In der ersten Phase bildet sich das sogenannte „unpräzise Anzahlkonzept“ bzw. die unprä-

unpräzises
Anzahlkonzept