

Jürgen Ulm

Numerische Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzial- gleichungen

- Finite-Elemente-Methode (FEM)
- Finite-Differenzen-Methode (FDM)
- Aufgaben mit Lösungen

Jürgen Ulm

Numerische Lösung
gewöhnlicher und partieller
Differenzialgleichungen

Numerische Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen

Finite-Elemente-Methode (FEM) –
Finite-Differenzen-Methode (FDM) –
Aufgaben mit Lösungen

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm

Mit 46 Bildern und 20 Tabellen



Kontakt & Studium
Band 707

Herausgeber:
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Wilfried J. Bartz
Dipl.-Ing. Hans-Joachim Mesenholl
Dipl.-Ing. Elmar Wippler

expert  **verlag**®

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://www.dnb.de> abrufbar.

Bibliographic Information published by Die Deutsche Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available on the internet at <http://www.dnb.de>

ISBN 978-3-8385-5169-2

Bei der Erstellung des Buches wurde mit großer Sorgfalt vorgegangen; trotzdem lassen sich Fehler nie vollständig ausschließen. Verlag und Autoren können für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.
Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Autoren dankbar.

© 2018 by expert verlag, Wankelstr. 13, D-71272 Renningen
Tel.: +49 (0) 71 59 - 92 65 - 0, Fax: +49 (0) 71 59 - 92 65 - 20
E-Mail: expert@expertverlag.de, Internet: www.expertverlag.de
Alle Rechte vorbehalten
Printed in Germany

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Vorwort

Wenn Sie wissen möchten, wie Sie mit einem Taschenrechner (Abb. 1) gewöhnliche oder partielle Differenzialgleichungen lösen, Temperaturverläufe oder elektrische und magnetische Felder berechnen können, dann treffen wir uns auf den kommenden Seiten wieder.



Abbildung 1: Ihr Taschenrechner kann mehr als Sie ihm zutrauen!

Es sei noch ein Hinweis zur erweiterten Nutzung des Skriptes gestattet: Neue Übungsaufgaben lassen sich durch einfaches Abändern der gestellten und bereits gelösten Originalaufgabe generieren. Die Abänderung der Originalaufgabe soll in der Weise vorgenommen werden, dass deren Lösung bereits im Voraus bekannt ist. Damit besteht die Möglichkeit, die Ergebnisse zu vergleichen und die Einarbeitung weiter zu vertiefen.

Denn

„Unglück kommt von mangelhaften Berechnungen“

(aus Bertolt Brecht, „Das Leben des Galilei.“)

Mein Dank gilt meinen Institutsmitarbeitern Herrn Wilhelm Feucht, Herrn Reinhardt Erli, Herrn Oliver Vogel und Herrn Dimitri Delkov für die Bereitstellung der Bilder, Simulationsergebnisse und Grafiken. Für die kritische Durchsicht dieses Skriptes und fruchtbaren Diskussionen gilt nochmal Herrn Delkov mein Dank. Last but not least ein herzliches Dankeschön an meine Frau Monika und Tochter Natascha für die unendliche Geduld mit meiner Person und meiner fortdauernden Ausrede „hab gerade keine Zeit...“.

Mit freundlichen Grüßen

der Autor

im Herbst 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Erforderliche mathematische Grundlagen	1
1.1	Matrizen	1
1.1.1	Rechenoperationen mit Matrizen	1
1.1.2	Determinante	2
1.1.3	Inverse Matrix	2
1.2	Differenzialgleichungen	2
1.2.1	Definitionen	3
1.2.2	Partielle Differenzialgleichungen	4
1.2.3	Partielle Integration	5
1.2.4	Klassifikation von Differenzialgleichungen	6
1.2.5	Anfangswertaufgabe	7
1.2.6	Randwertaufgabe	7
1.2.7	Inneres Produkt	9
1.2.8	Starke Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	11
1.2.9	Schwache Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	11
1.3	Vektoroperatoren	11
1.3.1	Nabla- und Laplaceoperator	12
1.3.2	Vektoroperator Gradient	12
1.3.3	Vektoroperator Divergenz	13
1.3.4	Vektoroperator Rotation	13
1.3.5	Gegenüberstellung der Vektoroperatoren	13
1.3.6	Nützliche Normen	14
2	Differenzialgleichungen und Finite Elemente	16
2.1	Physik-Beispiele für Differenzialgleichungen erster Ordnung	16

2.2	Physik-Beispiele für Differenzialgleichungen zweiter Ordnung	17
2.3	Finite Elemente	19
3	Von der Momentenmethode zur Galerkin-Methode	21
3.1	Grundprinzip der Momentenmethode	21
3.2	Anmerkungen zur Momentenmethode	23
3.2.1	Matrix $[l_{mn}]$	23
3.2.2	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktionen f_n und w_n	23
3.3	Galerkins Idee	24
3.4	Traditionelle Galerkin-Methode	24
3.5	Galerkin-FEM-Methode	26
3.6	Vorgehen zur Lösung mit der Galerkin-Methode	27
4	Lösung der Gleichung $\frac{dy}{dx} - y = 0$ mit der Galerkin-Methode	29
4.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	29
4.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion	30
4.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	31
4.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	31
5	Lösung der Gleichung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ mit der Galerkin-Methode	33
5.1	Lösung mit linearer Basis- und Wichtungsfunktion	33
5.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	34
5.1.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	35
5.1.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	36
5.1.4	Formulierung der schwache Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	37
5.1.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	38
5.1.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	41
5.2	Lösung mit nichtlinearer Basis- und Wichtungsfunktion	44
5.2.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	44
5.2.2	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	45
5.2.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung	45
5.2.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	45
6	Lösung der Gleichung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ mit der Galerkin-Methode	47
6.1	Lösung mit linearer Basis- und Wichtungsfunktion	48

6.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	49
6.1.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	49
6.1.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	49
6.1.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	50
6.1.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	50
6.1.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	50
6.2	Lösung mit nichtlinearer Basis- und Wichtungsfunktion	51
6.2.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	52
6.2.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion	52
6.2.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	53
6.2.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	54
7	Lösung physik. Bsp. DGL 1'ter Ordnung mit Galerkin-Methode	56
7.1	Durchflutungsgesetz gelöst mit nichtlinearer Basis- und Wichtungsfunktion	56
7.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	57
7.1.2	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	59
7.1.3	Lösung des linearen Gleichungssystems	59
7.2	Gegenüberstellung FEM- mit Galerkin-Ergebnis	60
8	Lösung physik. Bsp. DGL 2'ter Ordnung mit Galerkin-Methode	63
8.1	Elektrostatische Feldberechnung	63
8.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	63
8.1.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	64
8.1.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	64
8.1.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	64
8.1.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	66
8.1.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	68
8.2	Ortsabhängige Temperaturberechnung	70
8.2.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	71
8.2.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	72
8.2.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	72
8.2.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	72
8.2.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	73
8.2.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	75

8.2.7	Diffusionsvorgang vollendet	78
8.3	Ortsabhängige Magnetfeldberechnung	79
8.3.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	80
8.3.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	80
8.3.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	81
8.3.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	81
8.3.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung	81
8.3.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	83
9	Einführung in die Finite-Differenzen-Methode	88
9.1	Numerische Notation der linearen Felddiffusionsgleichung	88
9.2	Lösung mit impliziter Methode nach Crank-Nicolson	89
9.2.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixgleichung	89
9.2.2	Lösung der Matrixgleichung	91
9.2.3	Anwendungsbeispiel	94
9.3	Lösung mit expliziter Methode	96
9.3.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixgleichung	97
9.3.2	Lösung der Matrixgleichung	98
9.3.3	Anwendungsbeispiel	99
10	Anwendungen der FEM zur Produktentwicklung	104
10.1	Analyse eines Proportionalmagnetaktors	104
10.1.1	Preprocessing	105
10.1.2	Processing	106
10.1.3	Postprocessing	107
10.2	Synthese eines planaren Asynchron-Scheibenläufermotors	108
10.2.1	Preprocessing	108
10.2.2	Processing	108
10.2.3	Postprocessing	109
10.2.4	Musterbau des planaren Asynchronmotors	109
11	Anwendung der FEM zur Produktoptimierung	111
A		114
A.1	MATLAB-Code – Wärmediffusionsskript	114
A.2	MATLAB-Code – Magnetfelddiffusionsskript	118

A.3 MATLAB-Ergebnisse vs. COMSOL Multiphysics-Ergebnisse	124
Literaturverzeichnis	127

Symbole und Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	Einheit
A	Koeffizient, Matrix, Fläche	
B	Koeffizient, Matrix	
B	Magnetische Flussdichte	Vs/m^2
\vec{B}	Vektor der magnetischen Flussdichte	T
B_h	Interpolations-, Ansatzfunktion	
C	Koeffizient, Matrix	
C	spezifische Wärmekapazität	$J/(kgK)$
D	Koeffizient, Matrix	
E	Koeffizient, Matrix	
\vec{E}	Vektor der elektrischen Feldstärke	V/m
F	Koeffizient, Funktion, Kraft	
G	Koeffizient	
\vec{H}	Vektor des magnetischen Feldes	A/m
H_Φ	Interpolations-, Ansatzfunktion	
\vec{J}	Vektor der elektrischen Stromdichte	A/m^2
K	Konstante	
L	Induktivität	Vs/A
L	Linearoperator	
M	Matrix	
N	Anzahl Knoten	
P	Leistung	W
R	Residuum	
R	Radius	m
R	Widerstand	Ω
S_p	Scheitelpunkt	

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	Koeffizient	
a_0	Beschleunigung	m/s^2
c	Konstante	
f	Hilfsvariable, Funktion	
f_n	Entwicklungs-, Basisfunktion	
g	Hilfsvariable, Funktion, Matrix	
h	Elementlänge	m
i	Laufvariable	
j	Laufvariable	
k	Konstante	
l	Matrix	
m	Laufvariable	
n	Normale, Anzahl Teilintervalle	
r	Radius	m
s	Konstante	
t	Zeit	s
u	Funktion	
u_h	Interpolations-, Ansatzfunktion	
v	Funktion	
w	Gewichts-, Wichtungs-, Test-, Formfunktion	
x	Koordinate, Weg	m
y	Koordinate, Weg, Funktion	m
z	Koordinate	m

Symbol	Bedeutung	Einheit
Γ	Rand des FEM-Gebietes	
Γ_l	linker Rand des FEM-Gebietes	
Γ_r	rechter Rand des FEM-Gebietes	
Δ	Delta, differenziell	
Ω	Gebiet	
Ω_n	Element, Teilgebiete	