Dietmar Herrmann

# Die antike Mathematik

Geschichte der Mathematik
in Alt-Griechenland und im Hellenismus

*3. Auflage*

Springer Spektrum

# Die antike Mathematik

Dietmar Herrmann

# Die antike Mathematik

## Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus

3. Auflage

Springer Spektrum

Dietmar Herrmann
FH München
Anzing, Bayern, Deutschland

ISBN 978-3-662-68477-1 ISBN 978-3-662-68478-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-68478-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



Planung/Lektorat: Frau Nikoo Azarm
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recyclebar.

# Vorwort

*Von demjenigen nun, der die Geschichte irgendeines Wissens überliefern will, können wir mit Recht verlangen, dass er uns Nachricht gebe, wie die Phänomene nach und nach bekannt geworden, was man darüber phantasiert, gewähnt, gemeint und gedacht habe.*[1]

Auch wenn die *Geschichte der Mathematik* kein prüfungsrelevantes Vorlesungsfach an deutschen Hochschulen ist, kann ein ergänzendes Buch von Interesse sein. Es bietet für alle Mathematik-Lehrenden und -Interessierten eine ganz neuartige Sicht auf die vielfältigen Problemstellungen, die im Laufe von elf Jahrhunderten in der antiken griechischen Mathematik entwickelt wurden. Aus Umfangsgründen können es nur Facetten der verschiedenen Werke sein, die sich jedoch zu einem Kaleidoskop der Wissenschaft zusammensetzen. Ein breites Spektrum von Aufgaben, Konstruktionen und historischen Abbildungen setzt sich zusammen zu einem neuen Gesamtbild, das mehr Einsicht verschafft als herkömmliche summarische Beschreibungen.

Die vielseitigen Methoden, die die griechischen Forscher erdacht haben, ringen auch dem heutigen Betrachter Respekt und Anerkennung ab. Diese erstaunlichen Leistungen sind ohne jegliche Hilfsmittel wie Rechenmaschinen und moderne Kommunikation entstanden. Es wurde Wert darauf gelegt, die ganze Bandbreite der griechischen Mathematik zu schildern, insbesondere mit Hilfe von literarische Quellen und einer gelungenen Bilderauswahl auch den Kontext der pythagoreisch-platonischen Philosophie einzubringen. Es gibt drei Möglichkeiten einer historischen Aufarbeitung: streng chronologisch, biografisch-personenbezogen oder sachgebunden mithilfe spezieller Themenkreise. Die vorliegende Darstellung wählt eine Mischung der beiden letztgenannten.

Ein erstes Problem bei der Darstellung antiker Mathematik wird von dem berühmten Artikel *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics* von *Sabetai Unguru* aufgeworfen. Der Verfasser äußert darin die Auffassung, dass es prinzipiell unangemessen sei, antike Erkenntnisse mit modernen Formeln darzustellen. Der Formel- und Begriffsapparat der modernen Mathematik beinhaltete Konzepte und Abstraktionen, die

[1] J.W. von Goethe: Aus dem Vorwort der Farbenlehre (1810).

das Authentische am historischen Vorgehen möglicherweise verschleiern. Als Beispiel sei die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gewählt. In der modernen Mathematik gilt sie für alle abstrakten Elemente eines kommutativen Rings; eine solche Begriffsbildung ist einem Euklid völlig fremd. Ein Produkt zweier Zahlen oder ein Quadrat ist bei Euklid stets mit einem Flächeninhalt verbunden und kann nur mit Größen gleicher Dimension verknüpft werden. Das griechische Wort ἀριθμός *(=arithmos)* muss im pythagoreisch-platonischen Umfeld gesehen werden und kann nicht mit dem Wort *Zahl* adäquat übersetzt werden. Um die Darstellungen lesbar zu machen und kompakt zuhalten, wird die gewöhnliche Formelsprache verwendet und die lesende Person darauf hingewiesen.

Ein zweites Ziel ist die Schilderung des politisch-kulturellen Umfelds, in dem sich der griechische Wissenschaftler befindet. Das kulturelle Erblühen Athens in einer Phase relativen Friedens zwischen den Perserkriegen – aufgrund ihrer Führungsrolle im Bündnis gegen die Perser – ermöglichte den Bau einer Akademie, die Bildungswillige – wie Aristoteles – aus ganz Griechenland anzog. Alexander befreite Ägypten von der persischen Besatzung und bewirkte eine Machtverschiebung nach Südosten. Die nach seinem Tod durch die Reichsteilung entstehende ägyptisch-syrische Provinz wurde mit ihrer Hauptstadt Alexandria intellektuelles und wirtschaftliches Zentrum des Mittelmeerraums. Die dort gegründeten Schulen am Museion und Serapeion überstanden den Zusammenbruch des Ptolemäerreichs und gediehen auch unter der römischen Besatzung. Erst das Aufkommen des Christentums als Staatsreligion beendet das Schicksal der noch an der platonischen Lehre hängenden Wissenschaftler, wie man am Schicksal der Hypatia sieht.

Ein weiteres Anliegen ist das Einbeziehen von neuen, kritischen Gesichtspunkten im Vergleich zur älteren Literatur. Geschichten, dass der Vegetarier Pythagoras bei der Entdeckung eines Lehrsatz mehrere Stiere geopfert oder dass Archimedes mit Brennspiegeln die Segel der römischen Flotte in Brand gesetzt hat, kann man als Märchen abtun. Eine moderne Interpretation von Diophantos, Kritisches zum Werk des Klaudios Ptolemaios und Heron, sowie neue Übersetzungen von Nikomachos und Theon von Smyrna liefern eine neuartige Sicht auf die griechische Mathematik. Das umfangreiche Werk von Pappos wird völlig neu bewertet. Die verwendeten Methoden setzen meist nur mittlere Kenntnisse voraus.

Die Geometrie tritt gegenwärtig in der Ausbildung etwas in den Hintergrund; dies ist aber kein hinreichender Grund, die Euklidische Geometrie ganz abzuschaffen nach dem Motto von J. Dieudonné (Mitglied des Bourbaki-Kreises) *Euclid must go!*

**Zur 2. Auflage:**
Der Autor ist dem Verlag zu Dank verpflichtet für die Herausgabe des Buchs nunmehr in der 2., verbesserten Auflage. So konnte ein eigenes, neuartiges Kapitel zur römischen Mathematik eingebracht und mit neuem Bildmaterial illustriert werden. Auch das dem Fortwirken der hellenistischen Mathematik in Byzanz und Bagdad gewidmete Kapitel wurde aktualisiert und erweitert.

Ferner bedanke ich mich bei Herrn Prof. Lothar Profke für die hilfreichen Kommentare zur 1. Auflage. Ein besonderer Dank gebührt der Programmplanerin Frau Dr. Annika Denkert für ihre Unterstützung des Projekts!

**Zur 3. Auflage:**
Der Autor dankt dem Verlag für die Neuauflage des Buchs. Dadurch konnten zahlreiche Verbesserungen und Aktualisierungen eingebracht werden. Auch eine Reihe von neuen Abbildungen wurde aufgenommen. Neu hinzugekommen sind Abschnitte über Anaximander (Abschn. 3.3), Archytas (Abschn. 6.7), Porphyrios (Abschn. 9.2) und Pytheas (Abschn. 16.5). Erstmals in deutscher Sprache wird die zum Boethius zugeschriebene Geometrie behandelt (Abschn. 26.2).

Ferner danke ich der Programmplanerin Frau Nikoo Azarm für ihre freundliche Unterstützung! Das Buch behandelt die griechische Mathematik von 585 v. Chr. (Sonnenfinsternis des Thales) bis 529 n.Chr. (Schließung der Athener Akademie). Dieser Zeitraum brachte ganz erstaunliche und bewundernswerte mathematische Erkenntnisse. Lasst sie uns nützen und daran erfreuen! Gemäß dem Zitat *aut prodesse aut delectare* von Horaz (*Ars Poetica,* Z. 333) wünscht der Autor „Nutzen und Vergnügen“ bei der Lektüre!

München Dietmar Herrmann

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

# 1

Das einleitende Kapitel beschreibt eine Grundsatzfrage der gegenwärtigen mathematikgeschichtlichen Diskussion, die die Forscher in zwei Gruppen teilt: Die einen, traditionell orientiert, versuchen die antiken Fragestellungen mit Hilfe der modernen Formelsprache zu behandeln; die anderen, angeführt von Sabatai Unguru, verwerfen dieses Vorgehen grundsätzlich und lehnen Begriffsbildungen wie *Algebra* für die Mathematik vor Diophantos strikt ab. Eine generelle Tendenz in der Mathematik ist die *Bourbakisierung:* Geometrie ist angewandtes Rechnen in linearen Räumen, Euklid historisches Beiwerk. Als Beispiel der neueren Literatur wird das Buch „New History of Greek Mathematics" (2022) von Reviel Netz, der als früherer Student von Sabatai Unguru ein Kritiker der „alten" Historiker ist.

## 1.1 Zum Inhalt des Buchs

**Kap.** 2 schildert das Aufkommen einer neuen griechischen Kultur, die zu einem Neubeginn der griechischen Zivilisation führt, die später in ganz Europa bestimmend wird. Mit dem Aufkommen der Wissenschaften entwickelt sich auch die Mathematik**.**

Die **Kap.** 3 bis **5** behandeln die Anfänge der Mathematik durch die Pioniere Thales, Pythagoras und Hippokrates, die allesamt von den ionischen Inseln bzw. Küstenstädten stammen.

Die **Kap.** 6 bis **8** berichten, wie Athen durch Errichtung der Akademie und des Lykeions zum wissenschaftlichen Zentrum wird. Obwohl Platon und Aristoteles keine eigentlichen Mathematiker waren, gingen von ihnen ganz entscheidende Impulse für die Mathematik aus.

Nach dem Tod von Alexander d. Gr. zerfiel sein Herrschaftsbereich in einzelne Diadochenreiche. Wie die Symbiose aus griechischer und ägyptischer Kultur unter dem



D. Herrmann, *Die antike Mathematik,* https://doi.org/10.1007/978-3-662-68478-8_1

Herrscherhaus der Ptolemäer aus der neuen Hauptstadt Alexandria ein Handels- und Wissenschaftszentrum macht, schildert **Kap.** 9. Alexandria bot eine ideale Wirkungsstätte für eine ganze Reihe berühmter Mathematiker wie Euklid (**Kap.** 10) und Eratosthenes (**Kap.** 13). Auch Archimedes (**Kap.** 12) fand seine Briefpartner in Alexandria.

Die drei klassischen Probleme wie Würfelverdopplung, Winkeldreiteilung und Quadratur des Kreises sind als Themenbereiche in **Kap.** 11 zusammengefasst. Angeschlossen sind noch die Konstruierbarkeit der regulären Polygone und die Quadratur der sog. Möndchen, die Hippokrates kunstvoll entwickelte, um damit die Quadratur des Kreises zu finden.

**Kap.** 14 bietet einen allgemeinen Überblick über die Geometrie der Kegelschnitte, die sich nicht mehr in den Lehrplänen der weiterführenden Schulen findet. Es dient als Vorbereitung für das folgende Kapitel zu Apollonios von Perga (**Kap.** 15).

Auch nach der Eingliederung ins Römische Reich wirkte Alexandria noch lange als Ausbildungszentrum und Werkstatt berühmter Naturwissenschaftler. Zu nennen sind hier Astronomen wie Aristarchos und Hipparchos (**Kap.** 16) sowie Klaudios Ptolemaios (**Kap.** 18), Ingenieure wie Ktesibios und Heron (**Kap.** 17) und die Mathematiker Menelaos, Diophantos (**Kap.** 21), Pappos von Alexandria (**Kap.** 22). Besprochen werden auch die Gelehrten wie Nikomachos von Gerasa (**Kap.** 19), Theon von Smyrna (**Kap.** 20) und Theon von Alexandria (**Kap.** 23), die keine primären Mathematiker waren.

Seit der zweiten Auflage enthält **Kap.** 25 die Geschichte der römischen Mathematik. Das abschließende Kap. 26 berichtet das Weiterleben der griechischen Mathematik in Byzanz, im Islam und im frühen Mittelalter.

Wie schon im ersten Teil der Einleitung ausgeführt, ist es problematisch, antike Mathematik mit modernen Formeln zu beschreiben; die Leserin bzw. der Leser wird durch den Hinweis *in moderner Schreibweise* an den Sachverhalt erinnert. Aus Gründen der Lesbarkeit und Straffung des Textes werden an wenigen Stellen des Buchs Hilfsmittel der Differenzialrechnung eingesetzt; im Kap. 11 wird jedoch auf den Begriff der algebraischen Körpererweiterung verzichtet. Die Verwendung der den Griechen unbekannten trigonometrischen Funktionen konnte nicht ganz vermieden werden, da die ausschließliche Verwendung der Sehnenfunktion das Lesen des Textes erschwert.

Für manche Namen gibt es konkurrierende Formen im Griechischen und Lateinischen. Hier werden in der Regel die griechischen Namen verwendet wie *Nikomachos* statt Nicomachus, *Pappos* statt Pappus oder *Ptolemaios* statt Ptolemäus; in Zitaten wird die Original-Schreibweise beibehalten. Gängige Namen werden angewandt, wie Euklid statt *Eukleides* oder Alexandria statt *Alexandreia.* Sofern keine andere Quelle genannt wird, stammen alle Übersetzungen aus dem Lateinischen und Englischen vom Autor. Bei Hinweisen auf Euklid, Apollonius usw. geben die römischen Zahlen stets das Buch an, die lateinischen den Lehrsatz bzw. Paragrafen. Euklid [I, 47] ist der wohlbekannte Satz des Pythagoras im ersten Buch der *Elemente.* Kommentare und Erläuterungen des Autors stehen in eckigen Klammern. Die Platon- und Aristoteles-Hinweise werden in der üblichen Nummerierung nach Stephanus bzw. Bekker gegeben.

Dieses Buch ist aus Aufzeichnungen und Notizen entstanden, die der Autor in mehreren Jahren gesammelt hat in dem Wunsch, das Material in einem gut lesbaren, historisch bebilderten Band in moderner, kritischer Darstellung zu vereinen. Es ist natürlich unmöglich, alle mathematischen Leistungen dieses Jahrtausends aufzuzählen; aus Umfangsgründen erfolgt eine exemplarische Beschränkung auf bestimmte, für den jeweiligen Autoren typische, Fragestellungen. Dabei wird eine Fülle von Konstruktionen, Aufgaben und Algorithmen vorgestellt, die zur Eigenbeschäftigung und zur Verwendung im Unterricht anregen soll. Eine Vielzahl von Abbildungen erleichtert das Verständnis des Stoffs. Wie weit es gelungen ist, das Mosaik der griechischen antiken Mathematik Steinchen für Steinchen zusammenzusetzen und ihre Gelehrten in ihrem sozio-kulturellen, politischen und religiösen Kontext lebendig werden zu lassen, möge die geneigte Leserin bzw. der geneigte Leser entscheiden.

## 1.2 Zum Stand der mathematikgeschichtlichen Forschung

Ich glaube, dass der Versuch Mathematik ohne Bezug auf ihren kulturellen, sozialen, philosophischen und historischen Hintergrund zu lehren, ein schwerwiegender Irrtum und ein strategischer Fehler ist. R.L. Hayes, 6th Intern. Congress Math. Education, Budapest 1988.
It is the task of the historian to give back to the past its sense of the future *(Anonymous).*

Über die sog. *geometrische Algebra* schrieb O. Neugebauer[1]:

> Die Antwort auf die Frage, wo der Ursprung aller grundlegenden Probleme in der geometrischen Algebra liegt [nämlich in den Flächenumwandlungen von Euklid (II,1–10) bzw. Euklid (VI,24–29)], kann heute vollständig gegeben werden: sie liegen einerseits in den Bedürfnissen der Griechen die generelle Gültigkeit ihrer Mathematik im Kielwasser der aufkommenden Irrationalitäten zu sichern, andererseits in der sich ergebenden Notwendigkeit die Resultate der vorgriechischen Algebra zu übersetzen. Ist einmal das Problem auf diese Art formuliert, erweist sich alles als trivial und liefert einen nahtlosen Übergang von der babylonischen Algebra zu den Formulierungen Euklids.

Diese Auffassung, dass Euklids Flächenumwandlungen eine Form von versteckter Algebra darstellen, wurde weitgehend Allgemeingut, wie man den Schriften von H.G. Zeuthen und B.L. van der Waerden entnehmen kann. Zeuthen schreibt ähnlich in seiner Schrift[2] über die Kegelschnitte:

> Obwohl die Griechen nicht den Begriff des Koordinatensystems hatten, würden sie rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten verwenden … Die Theorie der Proportionen

[1] O. Neugebauer: Zur geometrischen Algebra, Quellen u. Studien zur Geschichte d. Mathematik, Abt. B3,254–259.

[2] H.G. Zeuthen: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886.

> würde ihnen erlauben, die wichtigsten algebraischen Operationen auszuführen. […] Die geometrische Algebra habe zu Euklids Zeiten eine solche Entwicklung erreicht, dass sie dieselben Aufgaben verrichten konnte wie unsere Algebra, solange diese nicht über die Behandlung von Ausdrücken zweiten Grades hinausgeht(!)

Auch B.L. van der Waerden setzt in seinem bekannten Buch *Science Awakening* (p. 119) die obengenannten Flächenumwandlungen von Euklid gleich mit der Anwendung der heutigen binomischen Formeln wie $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Dieser Auffassung bereitete ein grundlegender Artikel[3] des Israelis Sabetai Unguru ein Ende. Ein Großteil seiner Attacke betraf die lang etablierte Lehrmeinung über die griechische *geometrische Algebra.* Einen Vorläufer in dieser Debatte hatte Unguru in Jacob Klein (p. 5), der bereits 1965 schrieb:

> Die meisten Geschichtsdarstellungen versuchen die griechische Mathematik mit Hilfe der modernen Symbolik zu erfassen, als wäre dies nur eine äußere Form, die man für beliebige Inhalte maßschneidern könne. Selbst wenn die Nachforschungen auf einem wahren Verständnis der griechischen Wissenschaft beruhen, wird man erkennen, dass die Untersuchung auf einem Erkenntnisniveau verläuft, das durch moderne Vorstellungen geprägt ist.

Auch A. Szabó, der sich in seinem Buch (p. 457) schon 1969 gegen die Thesen von O. Neugebauer wandte:

> (1) Selbst wenn wir glauben, dass es eine babylonische Algebra wirklich gegeben hat, auch dann hat man bisher noch mit keiner konkreten Aufgabe wahrscheinlich machen können, dass die Griechen in voreuklidischer Zeit eine solche Algebra wirklich gekannt hätten.
> (2) Jene Sätze bei Euklid, die man gewohnt ist, als algebraische Sätze in geometrischem Gewand anzusehen, haben mit der Algebra in Wirklichkeit nur so viel zu tun, dass wir in der Tat sehr leicht unsere algebraischen Äquivalente für diese Sätze angeben können.

Den Begriff der geometrischen Algebra nannte Unguru ein *Fantasiegespinst, ein monströses Zwittergeschöpf, das sich Mathematiker ausgedacht haben, denen jegliches Gefühl für Historie fehlt.* Dieser Begriff dürfe auf keinen Fall auf die babylonische oder griechische Mathematik angewendet werden.

> Diese historiografische Auffassung, die sich hinter dem Begriff „geometrische Algebra“ verbirgt, ist anstößig, naiv und historisch nicht haltbar. Historische Mathematiktexte unter dem Blickwinkel modernen Mathematik zu betrachten, ist die sicherste Methode, das Wesen der antiken Mathematik zu missverstehen, bei der philosophische Voreinstellungen und metaphysische Verflechtungen eine sehr viel grundlegendere und bedeutsamere Rolle gespielt haben als in der modernen Mathematik. Die Annahme, man könne automatisch und unterschiedslos auf jeden mathematischen Inhalt die moderne algebraische Symbolik anwenden, ist der sicherste Weg, die innewohnenden Unterschiede zu missverstehen, die in der Mathematik vergangener Jahrhunderte inbegriffen sind. Geometrie ist keine Algebra!

[3] S. Unguru: On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics: Archive for the History of Exact Sciences 15, 67–114 (1975)

Später ergänzt er an gleicher Stelle

> Es ist beklagenswert und traurig, wenn ein Student der antiken Kulturgeschichte sich erst mit den Bezeichnungsweisen und Operationen der modernen Mathematik anfreunden muss, um zu verstehen, welche Bedeutung und Intentionen moderne Kommentatoren in die alten Texte hineininterpretieren. … Das Ziel dieser sog. Historischen Studien ist wohl zu zeigen, wie die antiken Mathematiker ihre modernen Ideen und Prozeduren verstecken unter einem Deckmantel von unbeholfenen, peinlichen, antiquierten und altmodischen Ausdrucksweisen. Mit anderen Worten ist es wohl Aufgabe eines Mathematik-Historikers, die alten mathematischen Texte zu entwirren, sie in die moderne Sprache der Mathematik umzusetzen, damit sie für alle Interessenten verfügbar werden.

Seine Feststellung, dass diese Vorgehensweise *anachronistisch* und *unhistorisch* ist und deshalb die ganze griechische Mathematik neu geschrieben werden müsse, entfachte wütende Reaktionen. Hans Freudenthal, Andre Weil und B.L. van der Waerden publizierten ihre Antworten in derselben Zeitschrift; der Protest führte dazu, dass die Schriftleitung der Zeitschrift weitere Beiträge Ungurus ausschloss.

In seiner Gegenoffensive hielt sich van der Waerden nicht zurück:

> Unguru, wie viele Nicht-Mathematiker, überschätzt stark die Bedeutung der Symbolik in der Mathematik. Diese Leute sehen unsere Beiträge voller Formeln und meinen, dass diese Formeln den wesentlichen Inhalt des mathematischen Denkens ausmachen. Wir, die tätigen Mathematiker, wissen es besser, dass in vielen Fällen die Formeln nicht den wesentlichen Inhalt darstellen, sondern nur bequeme Hilfsmittel sind.

In einem Brief an den Herausgeber der Zeitschrift formulierte A. Weil[4]:

> Es empfiehlt sich, die Mathematik zu beherrschen, bevor man sich mit ihrer Geschichte abgibt. […] Die Bücher VII bis IX Euklids enthalten keinerlei Algebra und auch keine sog. geometrische Algebra. Es ist natürlich viel praktischer, die algebraischen Operationen mit unseren Algebra-Symbolen zu betreiben, als mit Worten, wie Euklid es macht; genau wie es einfacher ist, mit Dezimalbrüchen (oder wie die Computer im Binärsystem) zu rechnen als mit den Brüchen Archimedes‘, das ändert jedoch nichts am Kern der Sache.

Der Brief Weils schließt mit folgenden Worten, die man wohl selten in einer mathematischen Zeitschrift findet:

> Wenn eine wissenschaftliche Disziplin, die zwischen zwei bereits existierende (seien sie A und B genannt) in gewissem Sinne vermittelnd tritt, sich neu etabliert, so schafft dies oft Raum für das Aufkommen von Parasiten, die unwissend sind in A und B, aber versuchen davon zu leben, indem sie die in A Tätigen einschüchtern, sie würden nichts von B verstehen und umgekehrt. Wir sehen leider, dass genau dies zurzeit passiert in der Geschichte der Mathematik. Lasst uns versuchen, diese Infektion zu stoppen, bevor sie unser Schicksal wird.

---

[4] Andre Weil: *Who Betrayed Euclid? (Extract from a letter to the Editor),* Archive for the History of Exact Sciences 19 (1978), 91–93.

Unguru antwortet vier Jahre später in der Zeitschrift Isis[5]:

> Die Geschichte der Mathematik wurde in der Regel geschrieben, um das Sprichwort „Anachronismus ist keine Sünde“ zu veranschaulichen. Die meisten zeitgenössischen Mathematikhistoriker, Mathematiker seit Studientagen, nehmen schweigend oder auch explizit an, dass mathematische Einheiten aus der Welt der platonischen Ideen stammen, wo sie geduldig darauf warten, von dem genialen Geist eines tätigen Mathematikers entdeckt zu werden. Mathematische Konzepte sowohl konstruktive als auch rechnerische, werden als ewig und unveränderlich angesehen, unbeeinflusst von den ureigenen Merkmalen der Kultur, in der sie auftreten; jedes Einzelne ist in seinen verschiedenen historischen Auftritten eindeutig identifizierbar, da alle diese Auftritte nur verschiedene Verkleidungen derselben platonischen Seinsstufe darstellen. [..] Verschiedene Formen desselben mathematischen Konzepts oder Vorgehens werden nicht bloß als mathematisch äquivalent, sondern auch als historisch gleichwertig betrachtet.

Einen Überblick über die damalige Auseinandersetzung bietet der Überblicksartikel[6] von D.E. Rowe. Andre Weil vertritt hier nach Rowes Ansicht die Philosophie des Bourbaki-Kreises. Er ist der Meinung, dass ein geringes Wissen über Gruppentheorie helfe, den Inhalt der Euklidischen Proportionentheorie (und anderes nebenbei) verständlich zu machen. Sein Ziel ist ein völlig anderes als das, die komplexen Probleme, die in den Büchern V und VII von Euklids *Elementen* auftreten, aufzuzählen. Dieser mathematische Block liefert zahlreiche, subtile Schwierigkeiten für unser Verständnis von griechischen Bezeichnungen von Zahlen, Größen und Verhältnissen und ihren wechselseitigen Wirkungen, Schwierigkeiten, die auch heute noch Experten vor Rätsel stellen. Historiker neigen dazu, sich zu fragen, ob mathematische Konzepte immer eine eindeutige Bedeutung haben – unabhängig von dem kulturellen Umfeld, in dem sie entstehen. Weil ist der Meinung und auch der Überzeugung, dass er und andere Talentierte mit Hilfe der modernen Algebra imstande sind, die rätselhaften Probleme der Mathematikgeschichte zu lösen. Unguru nennt dieses Verhalten *ahistorisch:*

> Wenn Gelehrte fortfahren, die besonderen, spezifischen Eigenheiten einer mathematischen Epoche zu vernachlässigen, sei es aufgrund von explizit gegebenen oder als stillschweigend anerkannten Prinzipien, dann ist ihre Arbeit ahistorisch und sollte als eine solche von der Historikergemeinschaft gekennzeichnet werden.

Als Erwiderung von Unguru meldete sich I. Bashmakova[7] zu Wort, deren moderne Diophantos-Interpretation mehrfach kritisiert worden war. Nach einem Vergleich der chinesischen, indischen und griechischen Mathematik kommt sie mit van der Waerden zu dem Schluss, dass in *allen* erwähnten Mathematiken die binomischen Formeln stets in Form

[5] Unguru S.: History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of Art, Isis 70, 555–565 (1979).

[6] Rowe D.E.: New Trends and Old Images in the History of Mathematics, 1996; im Sammelband Calinger.

[7] Bashmakova I.: A new view of the geometric algebra of the ancients, im Sammelband Bashmakova.

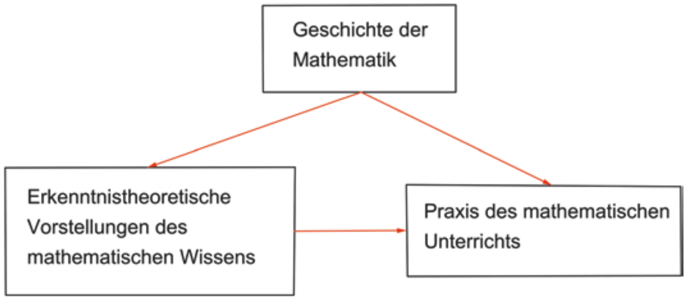


**Abb. 1.1** Diagramm zur Mathematik-Rezeption

von geometrischen Flächenumwandlungen dargestellt worden sind, in Indien und China ohne Zusammenhang mit irgendwelchen geometrischen Theoremen. Nur in Griechenland wurde die Geometrie auf Axiomen aufgebaut und weiter entwickelt, auch als Probleme mit der Inkommensurabilität auftauchten.

Besonders I. Grattan-Guinness ging in einem Vortrag[8] mit Bashmakova hart ins Gericht, sie propagiere folgendes zweistufiges Vorgehen und widerspreche damit Unguru:

> Zuerst werde der [historische] Text in eine zeitgemäße mathematische Ausdrucksweise übersetzt; d. h. es wird ein äquivalentes Modell geschaffen. Dies sei absolut notwendig, um das eigentliche Verständnis des Textes zu entwickeln. Im nächsten Schritt sei es nötig, das betrachtete Werk in den mathematischen Kontext seiner Zeit einzubetten.

Die Bourbaki-Philosophie übte nicht nur Einfluss auf die Rezeption der hier behandelten Mathematikgeschichte aus, sondern bewirkte auch in den Siebziger und Achtziger-Jahren eine beträchtliche „Modernisierung" der Lehrpläne (vgl. Abb. 1.1). Besonders bekannt wurde der Vortrag von J. Dieudonné[9], der unter dem Motto stand: **Euclid must go!** und einige radikale Hypothesen enthält.

> (101) Diese Forderung mag vielleicht für einige ein Schock sein, aber ich möchte Ihnen mit einigen Details starke Argumente aufzeigen, die für diese These sprechen. Lassen Sie mich zuerst versichern, dass ich die tiefste Bewunderung für die Errungenschaften der griechischen Geometrie hege. Ich betrachte deren geometrische Erfindungen als die vielleicht außergewöhnlichste intellektuelle Leistung, die je von der Menschheit erbracht wurde. Dank des griechischen Geistes waren wir imstande, den hochragenden Bau der modernen Wissenschaft zu überblicken.

---

[8] Grattan-Guinness I.: History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education, im Sammelband Van Brummelen.

[9] Dieudonné J.: *New Thinking in School Mathematics, Organization for European economic cooperation, 1961.*

(102) Bis heute sind die grundlegenden Begriffe der Geometrie selbst ausgiebig analysiert worden, besonders seit der Mitte des 19. Jahrhunderts. Dies ermöglichte uns, für das Euklidische Werk einfache und robuste Grundlagen zu schaffen und so deren Bedeutung in Bezug auf die moderne Mathematik neu zu formulieren; dabei werden ihre Fundamente getrennt von der ungeordneten Menge von Resultaten, die keinerlei Relevanz haben, außer, dass sie verstreute Relikte von unzulänglichen Methoden oder einer veralteten Herangehensweise sind.

(103) Das Ergebnis mag vielleicht ein wenig bestürzend sein. Lasst uns annehmen – um die Argumentation zu vereinfachen -, dass die Euklidische Geometrie der Ebene für Fremde aus einer anderen Welt gelehrt werden soll, die noch nie davon gehört haben oder nur Einblick haben wollen in mögliche Anwendungen der modernen Forschung. Dann, denke ich, könnte der ganze Kurs in zwei bis drei Stunden in Angriff genommen werden – eine Stunde wird benötigt mit der Beschreibung des Axiomensystems, eine weitere mit nutzbaren Konsequenzen und die dritte möglicherweise mit einigen leichten, interessanten Übungen.

(104) Alles andere, das nun ganze Bände elementarer Geometrie füllt und dabei meine ich, zum Beispiel alles über Dreiecke (es ist vollkommen durchführbar und erwünscht, die ganze Theorie zu erläutern, ohne dabei überhaupt ein Dreieck zu definieren!), fast alles über Kreisinversionen, Büschel von Kreisen und Kegelschnitten usw., all dies hat so viel Relevanz für das, was (reine und angewandte) Mathematik heute ausmacht, wie Magische Quadrate oder Schachprobleme!

**Ergänzung zur 2. Auflage:**

Man will es kaum glauben, dass nach 45 Jahren die Diskussion über die sog. „geometrische Algebra“ immer noch voll im Gange ist; J. Høyrup[10] formuliert es härter: …*sometimes in disputes so hot that one would believe it to be blood.*

In seinem Grundsatz-Artikel nimmt Høyrup eine neutrale Stellung zwischen Unguru und den „Älteren“ Autoren, er prüft, ob die gemachten Zitate der verschiedenen Autoren korrekt sind und der Kontext verstanden wurde. Dabei stellt sich bei aller Kritik an Zeuthen heraus, dass niemand sein Buch über die Kegelschnitte ausreichend studiert und verstanden hat. Er erinnert an den Text von H. Freudenthal[11]:

> Wer mit dem Lesen der griechischen Mathematik beginnt, ist beeindruckt von großen Teilen, die offenkundig algebraisch sind, sowie von anderen Teilen, in denen sich die Algebra scheinbar unter einer geometrischen Hülle verbirgt. [...]. S. Unguru hat diese Ansicht kürzlich in Frage gestellt. Alle, die über griechische Mathematik geschrieben haben, haben sich geirrt, behauptet er. Aus welchen Gründen? Hat er sensationelle, neue Fakten entdeckt? Nein, nichts! Er hat nicht einmal alte Tatsachen neu interpretiert. Er sagt einfach, dass sie falsch sind, und tut dies mit klarer rhetorischer Betonung. Wenn die Rhetorik nicht beachtet wird, besteht der Rest aus großen Auszügen aus der Arbeit anderer, die mit zahlreichen Ausrufezeichen und Fragezeichen versehen sind, und einigen präziseren Aussagen, die ordnungsgemäß einer Analyse unterzogen werden können.

[10] Høyrup J.: What is „geometric algebra“ and what has it been in historiography? AIMS Mathematics, 2(1), 128–160 (2017)

[11] Freudenthal H.: What Is Algebra and What Has It Been in History? *Archive for History of Exact Sciences* **16**, 189–200 (1977).

Als Zitat Nr. 64 bringt er B.L. van der Waerden:

> Unguru bestreitet die Existenz einer babylonischen Algebra. Stattdessen spricht er unter Berufung auf Abel Rey von einem arithmetischen Stadium (der ägyptischen und babylonischen Mathematik), in der die Argumentation weitgehend elementar-arithmetisch verläuft oder auf empirisch paradigmatischen Regeln beruht, die aus erfolgreichen Versuchen als Prototyp abgeleitet wurden. Ich habe keine Ahnung, auf welchen Texten diese Aussage basiert. Für mich ist dies Geschichtsschreibung in seiner schlimmsten Form: Meinungen anderer Autoren zu zitieren und sie so zu behandeln, als wären sie feststehende Tatsachen, ohne die Texte selbst zu zitieren. Bleiben wir bei den Fakten und zitieren einen Keilschrifttext BM 13901, der sich mit der Lösung quadratischer Gleichungen befasst. Problem 2 dieses Textes lautet: *Ich habe die (Seite) des Quadrats von der Fläche abgezogen, und 14,30 ist es.* Die Aussage des Problems ist völlig klar: Es ist nicht notwendig, es in moderne Symbolik zu übersetzen. Falls wir es übersetzen, erhalten wir die Gleichung $x^2 - x = 14{,}30$.

An anderer Stelle versucht van der Waerden seinen damaligen Widerspruch zu relativieren:

> Wenn diese Definition des „algebraischen Denkens" akzeptiert wird, hat Unguru tatsächlich recht, wenn er zu dem Schluss kommt, dass es „in der vorchristlichen Ära nie eine Algebra gegeben hat" und dass eine babylonische Algebra nie existiert hat und dass alle Behauptungen von Tannery, Zeuthen, Neugebauer und mir über „geometrische Algebra" völliger Quatsch sind. Dies war natürlich in keiner Weise unsere Definition des algebraischen Denkens. Wenn ich von babylonischer, griechischer oder arabischer Algebra spreche, meine ich Algebra im Sinne von Al-Khwarizmi oder im Sinne von Cardanos „Ars magna" oder im Sinne unserer Schulalgebra. Algebra ist also: Die Kunst, mit algebraischen Ausdrücken wie $(a+b)^2$ umzugehen und Gleichungen zu lösen wie $x^2 + ax = b$.

Høyrup liefert ein Zitat von D.E. Rowe[12], das belegt, Ungurus These ist inzwischen allgemein akzeptiert:

> Heute scheinen die meisten Historiker der Mathematik gekommen zu sein, um diesen zentralen Grundsatz [von Unguru] zu akzeptieren. In der Tat sagte mir A. Jones auf dem Symposium zu Ehren von Neugebauer am Institut für Altertumsforschung (NY), dass Ungurus Position nun als akzeptierte Orthodoxie angesehen werden könne. Unguru jedoch bittet darum zu differenzieren; er machte mich schnell auf die jüngsten Arbeiten von Experten der babylonischen Mathematik aufmerksam, die seiner Ansicht nach weiterhin die gleichen Arten von Sünden begehen, über die er sich so lange *geärgert* hat.

Den Autoren M. Sialoros und J. Christianidis[13] ist es gelungen, eine gültige Definition von „Was ist die Vorstufe von Algebra", nunmehr *vormoderne Algebra* genannt, zu finden; Unguru hat das Manuskript gebilligt. Die „Vormoderne" wird erkannt an einem fünfstufigen Vorgehen:

---

[12] Rowe, D.E.: Otto Neugebauer and Richard Courant: On Exporting the Göttingen Approach to the History of Mathematics, *The Mathematical Intelligencer* **34**(2) 29 −37 (2012).

[13] Sialaros M., Christianidis, J.: Situating the Debate on "Geometrical Algebra" within the Framework of Premodern Algebra, Science in Context 29(2), S. 129–150 (2016)

1. Alle Variablen erhalten einen Namen
2. Alle Operationen werden nur mit benannten Variablen ausgeführt
3. Als Resultat werden eine oder mehrere Gleichungen erstellt
4. Diese Gleichungen werden umgeformt und schließlich gelöst
5. Die Lösung beantwortet die Problemstellung

Sie illustrieren dies an einem Beispiel von al-Khwārizmī: *Summe zweier Zahlen ist 10, ihr Produkt 21.*

1. $A = x; B = 10 - x$
2. $x(10 - x) = 10x - x^2$
3. $10x - x^2 = 21$
4. $10 \div 2 = 5;\ 5 \times 5 = 25;\ 25 - 21 = 4;\ \sqrt{4} = 2;\ 5 + 2 = 7;\ 5 - 2 = 3$
5. $A = 7; B = 3$ oder umgekehrt

An einem Beispiel aus Abū Kāmils *Algebra* soll die Unterscheidung von „Arithmetik" und „Algebra" gezeigt werden: $x^2 + 10x = 39$. Abū Kāmil rechnet *arithmetisch:* $\frac{10}{2} = 5;\ 5^2 = 25;\ 39 + 25 = 64;\ \sqrt{64} = 8;\ 8 - 5 = 3$.R. Rashed erklärt den Rechengang in einer Fußnote mittels quadratischer Ergänzung (*algebraische* Vorgangsweise):

$$x^2 + 10x = 39 \Rightarrow (x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x = 8 - 5 = 3$$

**Ergänzung zur 3. Auflage:**

Die Diskussion über die Historiografie der griechische Mathematik ist noch keineswegs beendet. In der neueren Literatur herrscht Einheit darüber, dass die Kenntnis über die frühe griechische Mathematik sehr gering ist. S. Cuomo schreibt dazu in *Ancient Mathematics* (2001), S. 5:

> Obwohl das Umfeld, in dem die frühe griechische Mathematik entstand, vielfach beschrieben wurde, bleiben Details unklar, da kein rein mathematischer Text aus dem vierten oder fünften vorchristlichen Jahrhundert überdauert hat.

Ähnlich äußert sich B.L. van der Waerden (*Science Awakening* (1961), S. 4):

> Die drei Jahrhunderte von 600 bis 300 v. Chr. sind in Dunkel gehüllt, da wir über nur zwei Originaltexte verfügen: Die Abhandlungen über die Möndchen des Hippokrates und über die Würfelverdoppelung des Archytas. Dazu kommen eine Vielzahl von verstreuten Kommentaren bei Platon, Aristoteles, Pappos, Proklos und Eutokios, sowie eine Sammlung widersprüchlicher Legenden über die Pythagoreer. Aus diesem Grund enthalten die älteren Schriften, wie Cantors Geschichte der Mathematik, nur wenig mehr als Spekulationen über Dinge, von denen wir gar nichts wissen, wie z. B. den *Satz des Pythagoras.*

K. von Fritz ist der Meinung (*Die *archai* in der griechischen Mathematik* (1955), S. 13–103):

> Alles, was bis jetzt über die vorgriechische Mathematik der Völker des alten Orients bekannt ist, lässt es als äußerst unwahrscheinlich, um nicht zu sagen, unmöglich erscheinen, dass der Eindruck, es habe Derartiges vor den Griechen nicht gegeben, nur auf die Lückenhaftigkeit unseres Wissens zurückzuführen wäre.

J. Høyrup lässt die griechische Mathematik erst bei Hippokrates beginnen (*Hippokrates of Chios,* Preprint 2019):

> Aber immerhin ist dies das früheste Zeugnis, das wir von der griechischen theoretischen Geometrie haben, viel informativer als alle neuplatonischen und neo-pythagoreischen Fabeln über Pythagoras. Es macht auch viel mehr Sinn als diese und die Erzählungen über griechische Mathematik, die *wie Athene in voller Rüstung dem Haupt des Zeus entsprungen sein soll.*

A. Szabó schreibt über den Streit, ob das babylonische Rechnen als „Algebra" gelten kann (Anfänge der griechischen Mathematik (1969), S. 457):

> Selbst wenn wir glauben, dass es eine "babylonische Algebra" wirklich gegeben hat – wovon O. Neugebauers Forschungen uns überzeugen möchten, auch dann hat man bisher noch mit gar keiner konkreten Angabe wahrscheinlich machen können, dass die Griechen in voreuklidischer Zeit eine solche Algebra wirklich gekannt hätten, geschweige denn, dass sie dieselbe übernommen und geometrisiert hätten. (Die Griechen haben nicht einmal die positionelle Bezeichnungsart der Zahlen von den Babyloniern übernommen!)

Dies führt aber bei einigen Autoren zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen. Eine Abrechnung mit der Mathematik-Historie im alten Stil betreibt R. Netz in seinem neuen Buch *A new History of Greek Mathematics* (2022). Hier einige Ausschnitte daraus mit einigen Zitaten im Original:

> Thales und Pythagoras waren tatsächlich historische Personen, beide aktiv um das sechste Jahrhundert v.Chr. (Thales etwas früher, Pythagoras später). Obwohl viele Forscher über diese Frage verschiedener Meinung sind, die Standard-Meinung ist: *Thales and Pythagoras did no mathematics whatsoever.* Das alles ist Mythos! … Die späteren Erzählungen berichten uns mehr über die Agenda der späteren Griechen als über die griechische Kultur der archäischen Ära. (p. 17).

Netz spart nicht an der Kritik der älteren Historiker:

> Frühere Generationen von Gelehrten glaubten naiv an solche Märchen, indem blindlings einer [literarischen] Quelle glaubten… Mein Vorgänger Heath und viele anderen Historiker – die letzte Generation eingeschlossen – schenkten der Meinung Glauben, dass Thales und später Pythagoras fortdauernde Beiträge zur Mathematik gemacht haben. Dies erschließt sich nahezu vollständig aus dem Kommentar von Proklos, der wegen stets gezeigten Nüchternheit *(sobriety),* ernst genommen wurde, sogar bei seinen offensichtlich unbegründeten Annahmen (p. 423)

Netz ist hier überzeugt, dass die ersten Kommentare über Thales von Proklos kommen. Die Berichte über Thales sind jedoch viel älter; außerdem übersieht er, dass Proklos hier die *Mathematikgeschichte des Eudemos* wiedergibt. Wie Høyrup akzeptiert er das Werk Hippokrates':

> Ich plädiere dafür, dass die Schriften Hippokrates' mit zu den frühesten Werken der griechischen Mathematik überhaupt zählen. … Das mag überraschend klingen. Könnte die Mathematik auf diese Weise – aus dem Kopf des Zeus – entstanden sein? Würden wir nicht erwarten, dass die Mathematik in einer rudimentäreren Form entsteht? Ich denke sogar, dass wir genau das erwarten sollten: dass die Mathematik dem Kopf des Zeus entspringt [wie Athene], voll bewaffnet. Was wäre denn die Alternative? ... Natürlich würden die allerersten mathematischen Werke, die in Umlauf kämen, bemerkenswerte und überraschende Ergebnisse enthalten. Warum sollte man sich sonst die Mühe machen, sie in Umlauf zu bringen? … Wie würde ein rudimentäres Stück Mathematik aussehen? Würde es einige wirklich elementare Ergebnisse beweisen, wie zum Beispiel die Gleichheit der Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks? Warum sollte sich jemand für eine solche Abhandlung interessieren, die ein solches Ergebnis beweist? (p. 48)

Statt den alten Historikern glaubt er dem Philologen und Nicht-Mathematiker Burkert:

> [Burkerts Buch] *Lore and Science in Early Pythagoreanism* ... ist eine sorgfältige, professionelle klassische Philologie, die darauf bedacht war, die Autoren, die wir lesen, nicht als bloße Papageien zu verstehen, die ihre Quellen wiederholen, sondern stattdessen als durchdachte Akteure, die die Beweise so gestalten und nacherzählen, wie es ihrer Agenda entspricht. Pythagoras bricht bei einer solchen Lesart in sich zusammen. Fast alles ... wird als das Werk späterer Autoren (ab Aristoteles) angesehen. Macht nichts: die Historiker der Mathematik machten weiter wie bisher! (p. 23)

Netz übergeht hier völlig die Problematik bei der Überlieferung der antiken Schriften. Zur Frage, wie die Pythagoras-Figur entstand, zieht er Ergebnisse der Ethno-Mathematik in Betracht. Speziell betrachtet er ein Flechtwerk aus Mosambik, das der Forscher P. Gerdes gefunden hat (Abb. 1.2).

> *In fact, with a little manipulation, we can derive, from this pattern, Pythagoras's theorem itself!* Die Grundidee ist, dass wir ein großes Quadrat sehen – bestehend aus vier identischen rechtwinkligen Dreiecken – und ein kleineres Quadrat in der Mitte. Es ist wahrscheinlich, wie

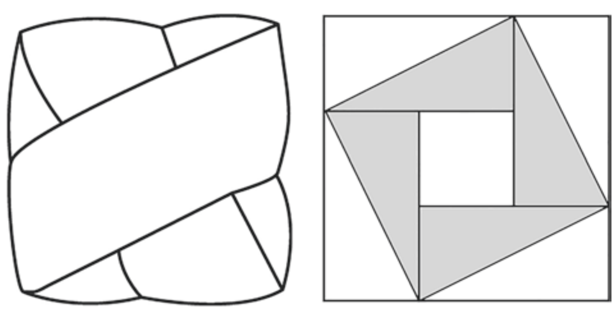

**Abb. 1.2** Pythagoras-Figur nach Reveil Netz

> ich glaube, dass das Theorem von Pythagoras tatsächlich mit solchen Zeichnungen entdeckt worden ist – von babylonischen Lehrern, die in einer ganz anderen Umgebung gearbeitet haben (p. 4).

Hier mag die Leserin – bzw. der Leser – entscheiden, ob dieser Vergleich zwingend ist.

## Literatur

Grattan-Guinness, I.: History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. im Sammelband Van Brummelen (2005)

Neugebauer, O.: Zur geometrischen Algebra, Quellen u. Studien zur Geschichte d. Mathematik. Springer (1936)

Netz, R.: A new history of greek mathematics. Cambridge University (2022)

Netz, R.: The shaping of deduction in greek mathematics. Cambridge University (1999)

Rowe, D.E.: New trends and old images in the history of mathematics. im Sammelband Calinger (1996)

# 2 Wie die griechische Wissenschaft begann

Eine neuere Tendenz der Mathematikhistorie ist die Hervorhebung von nichtgriechischen Quellen, wie die babylonischen Keilschrifttafeln oder die altägyptischen Papyri. Zu beachten ist jedoch die zeitliche Abfolge. Ganz sicher hatten die Griechen Zugang zu den babylonischen Schriften, als Alexander d.Gr. Babylon aus der persischen Herrschaft befreite. Es gibt keine historisch nachprüfbaren Fakten, die eine Übernahme der babylonischen Mathematik vor dem sechsten Jahrhundert beweisen. So kann man davon ausgehen, dass die Mathematik, die sich ab dem 5. Jahrhundert v. Chr. in Griechenland und seinen Kolonien entwickelte, eigenständig dem griechischen Geist entsprungen ist. Der systematische Aufbau von geometrischen Lehrsätzen und die Einführung von Axiomen bei den Griechen ist einzigartig.

> Denn dies ist der Zustand eines Freundes der Weisheit, die Verwunderung; ja es gibt keinen anderen Anfang der Philosophie als diesen. Platon *[Theaitetos 155C]*
>
> *Das antike Griechenland ist eine Erfindung der Neuzeit (Paul Valery 1871-1945)*

Um 1400 v. Chr. wurden die mächtigen Paläste der mykenisch-minoischen Kultur, wie Mykene, Tirnys und Knossos zerstört und verlassen, die genaue Ursache kennt man nicht. Unklar ist, ob der durch den Vulkanausbruch auf der Insel Thera entstandene Tsunami eine der Ursachen ist; dies liegt daran, dass das Datierung des Ausbruchs umstritten ist. Ein ägyptische Papyrus spricht von einer ähnlichen Katastrophe im Jahr 1520 v. Chr.; dem gegenüber liefert eine $C_{14}$-Analyse eines in der Vulkanasche verbliebenen Holzes eines Olivenbaums ein ca. 100 Jahre älteres Datum. Mit dem Ende dieser Kultur ging auch die Kenntnis der alten Schriften *Linear A* und *B* verloren.

Um 1200 v. Chr. herum kam es zu einer Welle von Einwanderungen indogermanischer Stämme der Ionier, Achäer und Dorer vermutlich aus dem Balkan. Nicht bekannt ist, ob eine zweite Welle der Zerstörung (ebenfalls um 1200 v. Chr.), ausgelöst durch die sog. Seevölker, damit zusammenhängt. Dabei wurde eine Reihe von

 
D. Herrmann, *Die antike Mathematik*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-68478-8_2

kleinasiatischen Stätten (wie Troja), der Levante (wie Ugarit) und Inselsiedlungen (wie Kreta und Zypern) vernichtet. Der Einfall ins Nildelta (um 1177 v. Chr.) ist dokumentiert auf ägyptischen Papyri und Darstellungen an den Tempelwänden von *Medinet Habu.*

Der Historiker *Thukydides* [I, 12] setzt in seinen *Historiae* die beiden ersten Einwanderungswellen auf 60–80 Jahre nach dem Trojanischen Krieg an, also auf etwa 1120 v. Chr. Die Dorer eroberten mit Eisenwaffen einen Großteil des griechischen (noch in der Bronzezeit lebenden) Festlands und gründeten Sparta. Dabei vertrieben sie die am Festland lebenden Achäer und Ionier auf die griechischen Inseln und an die kleinasiatische Küste, die damals von Persern, Lydern und Medern bewohnt war. Herodot berichtet über diese Völkerwanderung, dass die Ionier

> ihre Städte in einer Gegend gegründet hätten, die das angenehmste Klima im ganzen bekannten Erdkreis hätten.

Pausanias bemerkt in seiner *Beschreibung Griechenlands:*

> Das Land der Ionier erfreut sich des günstigsten Klimas; es hat Heiligtümer, wie man sie nirgends findet. […] Die Wunderwerke in Ionien sind zahlreich und stehen denen im (sonstigen) Griechenland kaum nach.

Bis etwa 700 v. Chr. waren die meisten der Stadtstaaten *(polis)* gegründet, die im Laufe der Zeit zu wirtschaftlichen und kulturellen Zentren heranwuchsen. Zunächst war Sparta führend im Peloponnesischen Bund. Erfindungsreichtum und handwerkliche Geschicklichkeit, sowie die Verfügbarkeit von Sklaven, ermöglichten den Griechen Schiffbau, Bergbau, Metallverarbeitung, Töpferei und Weberei zu betreiben. Dies geschah so erfolgreich, dass die Produktion den Eigenverbrauch überstieg. Abb. 2.1 zeigt mithilfe von Vasenbildern die Vielfalt des griechischen Lebens: Männer am Schmelzofen, beim Faustkampf, bei der Jagd und bei Festgelagen, Frauen bei der Viehzucht, beim Musizieren, bei der Totenklage, Kindererziehung und beim Schmücken der Braut.

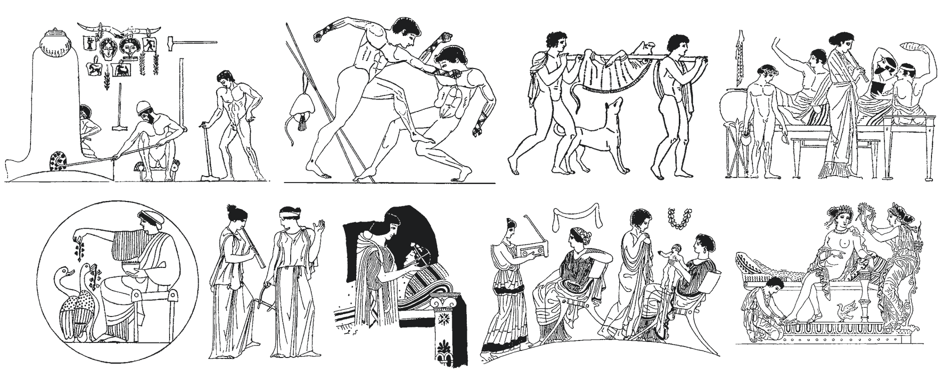

**Abb. 2.1** Ausschnitte aus griechischen Vasenbildern

Als Folge entwickelte sich eine rege Handelstätigkeit im Mittelmeerraum, die zur Gründung von Niederlassungen und Kolonien an den Küsten des Schwarzen Meeres, in Süditalien und sogar in Südfrankreich führte. (Platon sagte humorvoll darüber: *Die Griechen sitzen um das Mittelmeer herum wie die Frösche am Rand eines Teiches*). Der englische Historiker W.G. Forrest nannte folgende Gründe für den sozialen und geistigen Umbruch im 7. und 6. Jahrhundert:

- Ausweitung des Handels und Kolonisierung im Mittelmeerraum
- Die dadurch erfolgte Steigerung der handwerklichen und landwirtschaftlichen Produktion für den Export
- Das Erwachen der Philosophie, die sich mit der Natur der Dinge beschäftigte und die Freiheit und Individualität des Einzelnen forderte

T. Gomperz schreibt in seinem Werk „Aus der Hekale des Kallimachos" (1893):

> Die Kolonien waren das große Experimentierfeld des hellenischen Geistes, auf welchem dieser unter der denkbar größten Mannigfaltigkeit von Umständen erproben und die in ihm schlummernden Anlagen entfalten konnte.

Neben den Kolonien im Mittelmeerraum wurden auch wichtige Handelsvertretungen in Persien, Ägypten und Nordafrika gegründet. Konkurrenten waren insbesondere die Phöniker, die im Gebiet des heutigen Libanon lebten und ebenfalls den Mittelmeerraum kolonisierten. Handelszentrum der Phöniker war Tyros. Das um 900 v. Chr. als Kolonie gegründete Karthago übernahm später die phönizischen Besitzungen und wurde so mächtig, dass es erst nach drei Punischen Kriegen von den Römern besiegt wurde (Ende 146 v. Chr.)

Neben dem kaufmännischen Gewinn kam es auch zu einem regen Kulturaustausch mit den genannten Völkern. So übernahmen die Griechen die erfolgreichste Erfindung der Phöniker, nämlich die Schriftzeichen des Alphabets. Im Gegensatz zu den semitisch-arabischen Sprachen, die nur Konsonanten schreiben, glänzte das Griechische durch seine Vokalisierung. Die Dichtungen des *Homer,* entstanden im Ionien des achten und siebten Jahrhunderts v. Chr., wurden zunächst nur mündlich überliefert, sorgten aber später bei ihrer Aufzeichnung für eine einheitliche Sprache. Bei den Olympischen Spielen, die zunächst unregelmäßig ab 776 v. Chr. stattfanden, gab es einen Sängerwettbewerb mit der Darbietung der *Ilias* und *Odyssee.*

Man schätzt, dass von der Athener Bevölkerung zur Zeit des *Themistokles* (um 500) nur etwa die Hälfte, im juristischen Sinne betrachtet, Freie waren; von diesen wiederum hatte nur ein knappes Drittel das athenische Bürgerrecht. Nur diese Minderheit konnte das Wahlrecht ausüben und politische Ämter übernehmen. Wie in der Polis, so bildete sich auch in den griechischen Kolonien eine Oberschicht heraus, die aufgrund ihres Einflusses und ihres Reichtums nicht mehr von ihrer Hände Arbeit leben musste. Diese privilegierte Schicht hatte Zeit und Geld, um sich mit Kunst, Kultur und Philosophie zu beschäftigen.

Unter den Städten, die am meisten vom Handel profitierten, war Milet, das in Ägypten sogar über eine eigene Handelsniederlassung namens Naukratis verfügte. Milet bildete mit Chios, Ephesos, Samos u. a. den sog. *Ionischen Bund.* Dessen bekannteste Siedlungen in Süditalien *(Magna Graeca)* waren Kroton, Metapont und Tarent, die später die Wirkungsstätten der Pythagoreer wurden. Die Seeleute und Händler Milets konnten daher ein reiches Wissen an Seefahrt, Astronomie, Länder- bzw. Völkerkunde und Geografie erfahren. Während der Perserkriege (500–479 v. Chr.) wurde Milet zunächst noch geschont, so dass es weiterhin lukrativen Handel treiben konnte. Nach dem Ionischen Aufstand unter der Führung Milets gegen die Perser wurde die Stadt 496 jedoch dem Erdboden gleichgemacht. Nach dem Wiederaufbau war Milets Vormachtstellung gebrochen und es wurde im gegen Persien gerichteten Ersten Attischen Seebund tributpflichtig gegen Athen (ab 477).

In dem oben geschilderten günstigen Umfeld trat in der **Ionischen Phase** (7. bis 5. Jahrhundert) eine Gruppe von herausragenden Persönlichkeiten an der ionischen Küste auf, deren Weltbild nicht länger durch die überlieferten Götter-Mythen bestimmt wurde. Vielmehr versuchten sie durch rationales Denken eine umfassende Erklärung der irdischen und astronomischen Naturerscheinungen zu geben; dies war die Geburtsstunde der Naturphilosophie, in der englischen Literatur *The Greek Miracle* genannt. Warum dieses Ereignis dort und zu diesem Zeitpunkt stattfand, hat eine Unzahl von Kommentaren hervorgebracht, mit denen man ganze Bibliotheken füllen könnte. Der berühmte Philosoph und Mathematiker B. Russell[1] beginnt Kap. 1 seiner *Philosophie des Abendlandes* mit den Worten:

> In der ganzen Weltgeschichte ist nichts so überraschend oder so schwer erklärlich wie das plötzliche Aufblühen der Kultur in Griechenland. Vieles, was zum Begriff der Kultur gehört, hatte es Jahrtausende zuvor in Ägypten und Mesopotamien gegeben; seither hatte es sich in den benachbarten Ländern ausgebreitet. Aber gewisse, bislang fehlende Elemente trugen erst die Griechen bei. Was sie im Reich der Kunst und Literatur geschaffen haben, ist allgemein bekannt; was sie auf dem Gebiet des reinen Denkens geleistet haben, ist einzigartig. Sie erfanden die Mathematik und die Philosophie…

In seiner Schrift *Vom Ursprung und Ziel der Geschichte* (1949) geht K. Jaspers von der Annahme aus, dass es einen empirisch abgrenzbaren Zeitabschnitt gebe, in dem annähernd gleichzeitig die Grundkategorien des Denkens und die Ansätze der Weltreligionen entstanden sind, in denen die Menschen bis heute leben. Jaspers nennt diesen Zeitabschnitt, den er von ca. 800 bis 200 vor Christus ansetzt, die *Achsenzeit der Weltgeschichte.* In dieser Zeit seien unabhängig voneinander bedeutsame kulturelle Grundlagen und Denkkategorien geschaffen worden, die auch heute noch aktuell sind und es erlauben, von einer gewissen Einheit der Weltgeschichte zu sprechen.

[1] Russell B.: Philosophie des Abendlandes, Piper 2004, S. 25.

| | | |
|---|---|---|
| Zarathustra | 628–551 v. Chr | Parsischer Religionsstifter |
| Lao Tse | Geb. 571 v. Chr | Begründer des Taoismus |
| Buddha | 560–480 v. Chr | Indischer Religionsstifter |
| Konfuzius | 551–479 v. Chr | Chinesischer Religionsstifter |

Ebenso wirkten kulturstiftend im Abendland (Homer, Thukydides) und in Palästina (jüdische Propheten wie Elias, Jesaias). Eine *Achse* der Weltgeschichte scheine um 500 v. Chr. zu liegen in einem zwischen 800 und 200 stattfindenden geistigen Prozess. Dort liege der tiefste Einschnitt der Geschichte; es sei der Mensch entstanden, mit dem wir heute leben. Mittlerweile ist die These von Jaspers umstritten, da sie eigentlich nichts erklärt.

Die (griechischen) Philosophen dieser Zeit werden heute als *Vorsokratiker* bezeichnet. Unter diesen weisen Männern befanden sich Thales von Milet und Pythagoras von Samos, die der Überlieferung nach die Anfänge der Mathematik begründeten. Über die Babylonier und Ägypter hinausgehend, die Tontafeln und Papyri mit bloßen Zahlenbeispielen füllten, versuchten sie Lehrsätze aufzustellen und allgemeine Zusammenhänge zu finden.

Nach dem Ende der Perserkriege konnte Athen eine führende Stellung unter den griechischen Städten einnehmen. Während der Zeit des Perikles (ca. 495–429) war Athen nicht nur politisch, militärisch und wirtschaftlich führend, sondern es bildete auch ein Zentrum der Kunst und Wissenschaft. Es kam hier zur Gründung der Akademie und zum Bau der Akropolis. Die wissenschaftliche Lehre fand in diesem Zeitraum in der Akademie des Platon bzw. des Lykeion des Aristoteles statt; dieser Zeitraum wird daher die sog. **Athenische Phase** genannt. Die Machtstellung Athens forderte Sparta heraus. Der mit den Spartanern geführte Peloponnesische Krieg schwächte Athen so sehr, dass es ab 338 unter makedonischen Einfluss geriet.

Nach Alexanders Tod (323 v. Chr.) wurde das eroberte Reich aufgeteilt; die Ptolemäer übernahmen die Herrschaft in Ägypten. Sie machten Alexandria (eine der 11 von Alexander gegründeten Städte gleichen Namens) zur Hauptstadt, die nun Zentrum des Handels und der Gelehrsamkeit im Mittelmeerraum wurde. Hier wirkten am Museion und am Nachfolge-Institut die Mathematiker Euklid, Eratosthenes und Apollonius. Archimedes arbeitete zwar in Syrakus, stand aber in engem Kontakt mit Alexandria. Der Zeitraum von 300 v. Chr.–190 n. Chr., also bis zum Tod des Apollonios, wird die **Alexandrinische Phase** genannt.

Nach dem Ende der Ptolemäer-Herrschaft (Tod der Kleopatra VII 30 v. Chr.) wurde Ägypten römische Provinz, konnte aber noch lange Zeit seine führende Rolle als Zentrum der Wissenschaft ausfüllen. In den folgenden vier Jahrhunderten wirkten dort namhafte Mathematiker, wie Heron, Klaudios Ptolemaios, Pappos, Diophantos und Theon mit Tochter Hypatia (letztere um 415). In Athen ist als Mathematiker noch Proklos Diadochos (= Nachfolger) zu nennen, der mit seinen Euklid- und Platon-Kommentaren wertvolle mathematische Hinweise gibt (um 485). Mit der Schließung der neuen