ANÁLISIS MATEMÁTICO

2

2a. Edición Digital

LA ANTIDERIVADA
INTEGRAL DEFINIDA

LOGARITMO Y EXPONENCIAL
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

COORDENADAS POLARES
ÁREAS Y VOLÚMENES
LONGITUD DE ARCO

A. VENERO B.

gemar

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Segunda Edición Digital

2024

J. ARMANDO VENERO BALDEÓN

Universidad Nacional de Ingeniería
Perú

REPRESENTACIONES GEMAR EIRL

LIMA **PERÚ**

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

2a. Edición

J. Armando Venero Baldeón
Estudios de Maestría en MATEMÁTICAS
Pontificia Universidad Católica del Perú

Dpto. de tipeo, diagramación, diseño y revisión:
Ana María Vargas Loayza de Venero
Lic. en Educación (UNMSM)

Segunda Edición Digital - Marzo 2024

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2024-01389

ISBN (PDF) : 978-612-49569-1-1

Editado por:
Representaciones GEMAR EIRL
Av. José Pardo 975 – Dpto. 203, Miraflores – Lima - Perú
Teléfono: 953 255 935 , 446-6176
https://www.facebook.com/veneromath/

PRÓLOGO

En esta segunda edición de Análisis Matemático 2 *continuamos mejorando el marco teórico del Cálculo Integral, adicionamos algunos aspectos prácticos interesantes y revisamos completamente las claves de respuestas.*

El primer capítulo presenta la Antiderivación de funciones y la Integración Indefinida como operaciones inversas de la Derivación de funciones.

El segundo capítulo estudia el importante concepto de la Integral Definida de una función sobre un intervalo cerrado, en forma independiente de la Integral Indefinida. Se la presenta no como operación inversa de la Derivada sino como un Límite de ciertas sumas denominadas Sumas de Riemann, y que hará posible el cálculo de áreas de regiones planas encerradas por bordes no convencionales.

El tercer capítulo estudia los Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral que relacionan entre sí los conceptos de la Antiderivada, la Integral Indefinida y la Integral Definida.

El Capítulo 4 presenta el Teorema del Cambio de Variable en una Integral Definida, el cual permite calcular una Integral Definida complicada eligiendo un cambio de variable que la convierta en una más simple.

Las Integrales Impropias se estudian en el Capítulo 5 *como extensión de las Integrales Definidas a intervalos abiertos acotados y no acotados.*

En el Capítulo 6 se presentan las funciones más importantes del Análisis Matemático, a saber, la función LOGARITMO NATURAL *y la función* EXPONENCIAL. *Se estudian sus propiedades así como sus aplicaciones.*

Las funciones HIPERBÓLICAS *y sus propiedades se estudian en el Capítulo 7 como ampliación del capítulo anterior pues ellas se definen en términos de la función Exponencial.*

En el Capítulo 8 se ilustran diversas técnicas de Integración Indefinida y se presentan dos funciones integrales especiales: la función GAMMA *y la función* BETA.

El muy importante SISTEMA DE COORDENADAS POLARES *es tratado en el Capítulo 9 en forma detallada y completa.*

En los Capítulos 10 y 11 se presentan métodos para calcular Áreas de regiones planas, Volúmenes de Revolución, Longitudes de arcos de curvas y Áreas de Superficies de Revolución.

El Capítulo 12 trata de las técnicas de Integración Trapezoidal y la Regla parabólica de Simpson, que permiten hallar un valor aproximado numérico de una Integral Definida de una función con el grado de precisión que uno quiera. Son extensiones ingeniosas de la técnica de aproximación por sumas, de áreas de rectángulos, de Riemann.

Este capítulo también presenta los POLINOMIOS DE APROXIMACIÓN DE TAYLOR *que permiten aproximar elegantemente el valor de la Integral Definida de una función mediante la Integral Definida de un Polinomio, controlando el error de aproximación.*

Cada capítulo contiene una Serie de Ejercicios propuestos cuya Clave de Respuestas se encuentra al final de la respectiva serie.

De nuevo, expreso mi máximo agradecimiento a mi entrañable esposa Ana María Vargas Loayza, Lic. en Educación (UNMSM), por su especial esmero y cariño dedicados a la revisión académica de la presentación de los temas tratados, de los ejemplos resueltos y de las Claves de Respuestas. Además, ella tiene a su cargo el tipeo, la elaboración de los gráficos y la diagramación de todo el libro.

Para esta minuciosa revisión hemos utilizado ampliamente el programa matemático Geogebra Clásico ***5*** *(www.geogebra.org). Y por supuesto, y desde hace años en mis aulas presenciales, siempre contamos con el apoyo impecable de nuestra calculadora Casio-fx 570 (o 991) Plus 2nd. edition. A través de su uso he comprendido mejor las matemáticas.*

En la mesita de estudio de nuestros atrevidos lectores no debería faltar cualquiera de estas calculadoras. O también puedes elegir el modelo donde el código ***Plus 2nd. edition*** *es reemplazado por el código* ***EX*** *(o* ***LAX) CLASSWIZ****. Cuídense de las imitaciones de estos modelos, tienen el precio menos de la mitad de los originales, no tienen todas las funciones y su teclado es precario. Chequear en internet la forma de detectar estas imitaciones.*

Marzo 2024 *Jesús Armando Venero Baldeón.*

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CAPÍTULO 2. LA INTEGRAL DEFINIDA

CAPÍTULO 3. TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

CAPÍTULO 4 . TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

CAPÍTULO 5. INTEGRALES IMPROPIAS

CAPÍTULO 6. EL LOGARITMO Y LA EXPONENCIAL

CAPÍTULO 7. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

CAPÍTULO 8. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

CAPÍTULO 9. COORDENADAS POLARES

CAPÍTULO 10. ÁREAS Y VOLÚMENES

CAPÍTULO 11. LONGITUD DE ARCO Y ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

CAPÍTULO 12. INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y SERIES DE TAYLOR

VIDEOS CON ANIMACIÓN DE DIVERSOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS CON EL PROGRAMA GEOGEBRA

CÁLCULO DIFERENCIAL

1) Límite Trigonométrico Lateral Derecho
   https://www.facebook.com/veneromath/videos/354258125477575

2) Aplicación de Rectas tangentes a la función Seno: Surfista sobre las olas del mar
   https://www.facebook.com/veneromath/videos/418635638996541

CÁLCULO INTEGRAL

3) Volumen de un sólido mediante el área conocida de sus Secciones Transversales
   https://www.facebook.com/100063506772839/videos/301801330890526

CÁLCULO MULTIVARIABLE

3) Círculos de curvatura en 2d (XY)
   https://www.facebook.com/veneromath/videos/229000767736237

4) El planteamiento de este problema y su solución analítica en este enlace
   https://www.facebook.com/photo?fbid=1134401536716507

5) Círculo de curvatura 3d (XYZ)
   https://www.facebook.com/veneromath/videos/439647299862783

6) Helicoide: Planos osculadores y círculos de curvatura - Minería a cielo abierto
   https://www.facebook.com/veneromath/videos/2013021215655269

ECUACIONES DIFERENCIALES

7) Recta Envolvente de una Familia de parábolas como solución singular y solución general de una Ecuación Diferencial de primer orden (Ecuación. de Lagrange)
   https://www.facebook.com/100018275384045/videos/605775083374999

   Tal ecuación diferencial es planteada y hallada en el siguiente enlace:

   https://www.facebook.com/photo?fbid=666493120636528

1

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. TEOREMAS REFERENTES A DERIVADAS

1.1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO.- Si $F(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $\langle a, b \rangle$, entonces ***existe un número*** $\mathbf{c} \in \langle a, b \rangle$, por lo menos uno, tal que

$$\boxed{F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a)}$$

1.2 TEOREMA DE LA FUNCIÓN CONSTANTE

Si $F(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $\langle a, b \rangle$ entonces ***existe una constante real*** C tal que $F'(x) = 0$ sobre $\langle a, b \rangle$, es decir, tal que $F(x) \equiv C$, para todo $x \in [a, b]$.

EJEMPLO 1 .- Sobre el intervalo $[0, b]$, $0 < b < \pi/2$, se verifica que, si

$$F(x) = 2 + (1 + \operatorname{Sen} x)(\operatorname{Sec} x - 2\operatorname{Cos} x - \operatorname{Tan} x) + (1 + 2\operatorname{Sen} x)\operatorname{Cos} x$$

entonces $F'(x) = 0$ para $x \in [0, b]$,

y por lo tanto $F(x) \equiv C$ (**CONSTANTE**) para $x \in [0, b]$.

Para hallar el valor de esta constante C, es suficiente evaluar $F(x_o)$ para un punto x_o cualquiera de $[0, b]$. En particular, para $x_o = 0$:

$$C = F(0) = 2 + (1 + 0)(1 - 2 - 0) + (1 + 2(0))(1) = 2$$

de donde $F(x) \equiv 2$, para todo $x \in [0, b]$, $0 < b < \pi/2$.

Este resultado también se puede verificar muy fácilmente simplificando la regla de correspondencia de $F(x)$ mediante identidades trigonométricas.

1.3 TEOREMA . Sean $F(x)$ y $G(x)$ funciones continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre $\langle a, b \rangle$. Si $\boxed{G'(x) = F'(x)}$, para $x \in [a, b]$, entonces existe una constante real C tal que

$$\boxed{G(x) = F(x) + C} , \quad x \in [a, b] .$$

EJERCICIO 2.- Si $G(x)$ es una función tal que $G'(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, halle la regla de correspondencia de $G(x)$ tal que $G(1) = 6$.

SOLUCIÓN.- Sabemos que si $F(x) = x^3$ entonces $F'(x) = 3x^2$. Así ,

$$G'(x) = 3x^2 = F'(x) , \; x \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C$$

por el TEOREMA 1.3 , $\Rightarrow$ $G(x) = x^3 + C$, $x \in \mathbb{R}$.

Evaluamos $G(x)$ para $x = 1$, hallando así el valor de C :

$$G(1) = 1^3 + C = 6 \text{ (dato)} \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$\therefore \quad G(x) = x^3 + 5 , \text{ para todo } x \in \mathbb{R} .$$

2. LA ANTIDERIVADA GENERAL DE UNA FUNCIÓN

2.1 DEFINICIÓN.- Una función $F(x)$ se llama una **ANTIDERIVADA** de otra función $f(x)$ continua sobre un intervalo I si

$$\boxed{F'(x) = f(x)} , \quad \text{para } x \in I .$$

Por ejemplo, la función $F(x) = x^3$ es una *antiderivada* de la función $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, la función $G(x) = x^3 + 5$ es también otra *antiderivada* de $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, pues

$$G'(x) = D_x(x^3 + 5) = 3x^2 = f(x) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, es decir , si $F'(x) = f(x)$ entonces $F(x) + C$ también es una antiderivada de $f(x)$

para cualquier constante C , pues su derivada coincide con la función $f(x)$:

$$[\,F(x) + C\,]' = F'(x) = f(x) .$$

2.2 DEFINICIÓN.- Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo I , es decir, si $F'(x) = f(x)$ sobre I , entonces a la función

$\boxed{G(x) = F(x) + C}$ se le conoce como **LA ANTIDERIVADA GENERAL** de $f(x)$.

Así por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2$ tiene su antiderivada general $G(x) = x^3 + C$, pues $G'(x) = 3x^2 = f(x)$.

3. LA INTEGRAL INDEFINIDA

3.1 DEFINICIÓN .- Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo I , es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces a su **ANTIDERIVADA GENERAL** $G(x) = F(x) + C$ se le denota por

$$\boxed{G(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C} \quad , \quad x \in I$$

$\left[\text{ pues } G'(x) = F'(x) = f(x) \right]$

y se le llama **LA INTEGRAL INDEFINIDA** de $f(x)$.

✍ **NOTA 1 .-** De esta definición se sigue que $G'(x) = F'(x) = f(x)$, es decir,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$

EJEMPLOS 1.-

a) $\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$, pues $(x^3)' = 3x^2$.

b) $\displaystyle\int \operatorname{Cos} x\, dx = \operatorname{Sen} x + C$, pues $(\operatorname{Sen} x)' = \operatorname{Cos} x$.

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$, $x \in \langle -1 , 1 \rangle$

pues $\displaystyle(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1 , 1 \rangle$.

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - \arctan x + C$, pues

$$\frac{d}{dx}(x - \arctan x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

e) $\displaystyle\int (1 + \operatorname{Sen} x)\,dx = x - \operatorname{Cos} x + C$

pues $(x - \operatorname{Cos} x)' = 1 - (-\operatorname{Sen} x) = 1 + \operatorname{Sen} x$.

f) $\displaystyle\int \operatorname{Sec}^2 u\,du = \operatorname{Tan} u + C$, pues $(\operatorname{Tan} u)' = \operatorname{Sec}^2 u$.

3.2 DEFINICIÓN.- En una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ a la función $f(x)$ se le llama **FUNCIÓN INTEGRANDO** , y a la variable x se le denomina **VARIABLE DE INTEGRACIÓN**.

3.3 NOTACIONES USUALES

En términos de diferenciales sabemos que $\boxed{d\,F(x) = F'(x)\,dx}$, y por lo tanto, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \qquad \text{pues} \quad F'(x) = f(x) \quad .$$

Y se puede expresar como

a) $\displaystyle\int F'(x)\,dx = F(x) + C$

b) $\displaystyle\int d\,F(x) = F(x) + C$

En esta última forma se recupera la función $F(x)$, salvo una constante, por lo cual se dice que la integración es la operación inversa de la diferenciación, y también porque

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}[\,F(x) + C\,] = F'(x) = f(x) .$$

EJEMPLO 2 .- Por simple inspección vemos que, para $n \neq -1$:

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \qquad \text{pues} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

que pudo haberse expresado como

$$\boxed{\int x^{n}\,dx = \int d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \qquad \ldots \quad \textbf{(I)}$$

EJEMPLOS 3 .- Con las notaciones de [3.3] tenemos que, por simple inspección:

a) $\int (x^{3} - 2x + 1)\,dx = \int d\left(\frac{x^{4}}{4} - x^{2} + x\right) = \frac{x^{4}}{4} - x^{2} + x + C$

b) $\int (\operatorname{Sen} 2x - \operatorname{Cos} x)\,dx = \int d\left(-\frac{\operatorname{Cos}(2x)}{2} - \operatorname{Sen} x\right)$

$$= -\frac{\operatorname{Cos}(2x)}{2} - \operatorname{Sen} x + C .$$

✍ **NOTA 2 .-** Con la notación de integral indefinida, el Teorema [1.3] :

" Sean $F(x)$ y $G(x)$ dos funciones continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre $\langle a, b\rangle$. Existe una constante C tal que

$$G'(x) = F'(x) \quad \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C , \quad x \in [a, b] \text{ "}$$

es equivalente a aplicar la *integración indefinida* a la igualdad

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= F'(x) , \qquad x \in \langle a, b\rangle \\
\Rightarrow \quad \int G'(x)\,dx &= \int F'(x)\,dx \\
\int d\,G(x) &= \int d\,F(x) \\
G(x) + C_1 &= F(x) + C_2 \\
\Rightarrow \quad G(x) &= F(x) + C , \qquad x \in [a, b]
\end{aligned}
$$

absorbiendo las dos constantes C_1 y C_2 en una sola $C = C_2 - C_1$.

3.4 RESUMEN .- De aquí en adelante, para integraciones indefinidas emplearemos cualquiera de los siguientes resultados equivalentes:

a) $\int G'(x)\,dx = \int F'(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C .$

b) $\int d\,G(x) = \int d\,F(x) \quad \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C .$

PROBLEMA 4 .- Si $F'(x) = x^2 - \text{Cos}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, donde F es una función continua sobre un intervalo I . Halle esta función tal que $F(\pi) = 1$.

SOLUCIÓN.-
$$F'(x) = x^2 - \text{Cos}\, x$$
$$\Rightarrow \int F'(x)\, dx = \int (x^2 - \text{Cos}\, x)\, dx$$
$$\int d\, F(x) = \int d\left(\frac{x^3}{3} - \text{Sen}\, x\right)$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \text{Sen}\, x + C \qquad \ldots (*)$$

Como $1 = F(\pi) = (\pi^3/3) - 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1 - (\pi^3/3)$,

$$\therefore \text{ En } (*) : \qquad F(x) = \frac{x^3}{3} - \text{Sen}\, x + 1 - \frac{\pi^3}{3} \, .$$

PROBLEMA 5 .- Halle las integrales

a) $\int \text{Sen}^2 x\, dx$, b) $\int \text{Cos}^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN.- Utilizaremos las identidades:

$$\text{Cos}\, 2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x = \begin{cases} 1 - 2\,\text{Sen}^2 x \\ 2\,\text{Cos}^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Sen}^2 x = \frac{1 - \text{Cos}\, 2x}{2}} \, , \qquad \boxed{\text{Cos}^2 x = \frac{1 + \text{Cos}\, 2x}{2}}$$

a) $$\int \text{Sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \text{Cos}\, 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int d\left(x - \frac{\text{Sen}\, 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\text{Sen}\, 2x}{2}\right] + C = \frac{1}{2}\left[x - \text{Sen}\, x\, \text{Cos}\, x\right] + C$$

b) $$\int \text{Cos}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \text{Cos}\, 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int d\left(x + \frac{\text{Sen}\, 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\text{Sen}\, 2x}{2}\right] + C = \frac{1}{2}\left[x + \text{Sen}\, x\, \text{Cos}\, x\right] + C$$

PROBLEMA 6 .- Halle $\int \text{Csc}^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN.- $$\int \text{Csc}^4 x\, dx = \int \text{Csc}^2 x \cdot (1 + \text{Cot}^2 x)\, dx$$

$$= \int \operatorname{Csc}^2 x \, dx + \int \operatorname{Cot}^2 x \operatorname{Csc}^2 x \, dx$$

$$= \int d(-\operatorname{Cot} x) + \int \operatorname{Cot}^2 x \, d(-\operatorname{Cot} x)$$

$$= -\operatorname{Cot} x + \int d\left(-\frac{\operatorname{Cot}^3 x}{3}\right) = \boxed{-\operatorname{Cot} x - \frac{\operatorname{Cot}^3 x}{3} + C} .$$

4. PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Dados a , b y C constantes reales ,

(1) $\int C \, f(x)\,dx = C \int f(x)\,dx$, C constante real .

(2) $\int [\, f(x) \pm g(x)\,]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

(3) $\int [\, a\,f(x) + b\,g(x)\,]\,dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx$.

(4) Si $\int f(u)\,du = F(u) + C$, entonces

$$\int f[\,g(x)\,]\,g'(x)\,dx = F[\,g(x)\,] + C$$

PRUEBA DE (4) **:** Como $F'(u) = f(u)$

$$\int f[\,g(x)\,]\,g'(x)\,dx = \int F'[\,g(x)\,]\,g'(x)\,dx$$

$$= \int F'[\,g(x)\,]\,g'(x)\,dx = F[\,g(x)\,] + C .$$

(5) TEOREMA .- Asumiendo que

1) $f(u)$ es continua sobre un intervalo J .

2) $u = g(x) = u(x)$ es una función con derivada continua y con una función inversa $x = g^{-1}(u)$ sobre un intervalo E .

3) $u'(x) \neq 0$ para todo $x \in E$.

4) $\operatorname{Rang}(u) = u(E) = \{\, u(x) \,/\, x \in E \,\} \subset J$.

Entonces, para $u \in u(E)$:

$$\boxed{\int f[\,u(x)\,]\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad , \quad u = g(x)}$$

Este es el **TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL INDEFINIDA** .

Su aplicación siempre sigue los siguientes pasos:

- ❖ Se desea calcular la integral indefinida $\int \mathrm{h}(x)\,dx$
- ❖ En la expresión $\mathrm{h}(x)\,dx$ se buscará una función inversible $u = u(x)$, para la cual $du = u'(x)\,dx$, $x = x(u)$, de modo que aparezca una expresión como

$$\mathrm{h}(x)\,dx = \mathrm{f}[u(x)]\,u'(x)\,dx = \mathrm{f}(u)\,du$$

- ❖ Y se aplicará el Teorema [5] :

$$\int \mathrm{h}(x)\,dx = \int \mathrm{f}[u(x)]\,u'(x)\,dx$$

$$= \int \mathrm{f}(u)\,du \quad , \quad u = u(x) \;.$$

✍ **NOTA 3.-** En los pasos anteriores se trató de llegar a la integral

$$\int \mathrm{f}(u)\,du \quad , \quad u = \mathrm{g}(x)$$

la cual debería ser fácil de evaluar en términos de la nueva variable u . Ya evaluada, en el resultado se reemplaza $u = \mathrm{g}(x)$, para regresar a la variable original x .

EJEMPLO 1.-

$$\int \frac{2x\;dx}{1+x^4} = \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \int \frac{du}{1+u^2} \;, \quad \text{haciendo } u = x^2$$

$$= \arctan u + \mathrm{C} = \arctan(x^2) + \mathrm{C}$$

Este resultado se valida fácilmente pues : $\quad \mathrm{D}_x \arctan(x^2) = \dfrac{2x}{1+x^4}$.

PROBLEMA 2.- Halle $\int (1+x^3)^9\,x^2\;dx$.

SOLUCIÓN .- Reconocemos que la derivada de x^3 es $3x^2$, y más aún, que la derivada de $1+x^3$ es $3x^2$; luego,

$$\int (1+x^3)^9\,x^2\;dx = \frac{1}{3}\int (1+x^3)^9\,3x^2\;dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (1+x^3)^9\;d(1+x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\int u^9\;du \;, \quad u = 1+x^3 \;,$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{10}}{10}\right) + C = \frac{(1 + x^3)^{10}}{30} + C .$$

4.1 TEOREMA.- Si $u = u(x)$ es una función diferenciable entonces

$$\boxed{\int [\,u(x)\,]^n \cdot u'(x)\,dx = \frac{[\,u(x)\,]^{n+1}}{n+1} + C} \quad , \quad n \neq -1 .$$

4.2 TEOREMA.- Si $f(x)$ es una función diferenciable:

$$\boxed{\int [\,f(x)\,]^n \, f'(x)\,dx = \frac{[\,f(x)\,]^{n+1}}{n+1} + C} \quad , \quad n \neq -1 .$$

EJEMPLOS 3 .-

a) $\int \operatorname{Sen}^5 x \operatorname{Cos} x \, dx = \int [\,f(x)\,]^5 f'(x)\,dx \quad , \qquad f(x) = \operatorname{Sen} x$

$$= \frac{[\,f(x)\,]^6}{6} + C = \frac{\operatorname{Sen}^6 x}{6} + C .$$

b) $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2 + 2x + 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \quad , \qquad u = x^2 + 2x + 2$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-(1/2)+1}}{-(1/2)+1} + C$$

$$= \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + C .$$

En estos problemas el éxito depende de la habilidad para determinar la parte del integrando que se va a sustituir por el símbolo $u = u(x)$ de tal modo que la integral se transforme en otra más sencilla en términos de la nueva variable u .

Esta habilidad se obtiene con la práctica al resolver varios casos particulares.

5. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

5.1 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN (TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE)

Si $u = u(x)$ es diferenciable en un intervalo I :

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Para aplicar esta fórmula, se debe expresar el integrando en la forma del miembro izquierdo reconociendo cierta expresión $u = u(x)$, con el fin de transformarla en la integral indefinida de la derecha, de tal modo que esta última sea fácil de resolver.

EJEMPLO 1 .-

$$\int x^5 \operatorname{Sen}(x^6 + 2)\, dx = \frac{1}{6}\int 6x^5 \operatorname{Sen}(x^6 + 2)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \operatorname{Sen}(x^6 + 2)\, d(x^6 + 2)$$

$$= \frac{1}{6}\int \operatorname{Sen} u\, du \quad , \qquad u = x^6 + 2$$

$$= -\frac{\operatorname{Cos} u}{6} + C = -\frac{\operatorname{Cos}(x^6 + 2)}{6} + C$$

que se puede comprobar directamente por derivación.

EJEMPLOS 2 .-

I) $$\int \frac{\operatorname{Sec}^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \operatorname{Sec}^2 \sqrt{x}\; d(\sqrt{x})$$

$$= 2\int \operatorname{Sec}^2 u\; du \quad , \qquad u = \sqrt{x}$$

$$= 2 \operatorname{Tan} u + C = 2 \operatorname{Tan} \sqrt{x} + C .$$

II) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + (x/2)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{du}{1 + u^2} \quad , \qquad u = \frac{x}{a} .$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad , \quad a > 0} .$$

5.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

Es una técnica que se utiliza para integrar productos de dos funciones.

Dadas dos funciones $u = u(x)$, $v = v(x)$ diferenciables,

$$\frac{d}{dx}(u\,v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$\Rightarrow \quad d(u\,v) = u\,dv + v\,du$. Integrando ambos miembros :

$$uv = \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \qquad (*)$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \qquad (**)$$

En $(*)$ no hay razón para considerar explícitamente la constante C en $uv = \int d(uv)$, pues la integral $\int v\,du$ originará su propia constante.

La fórmula $(**)$ es llamada **FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES** , y permite hallar la integral

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx \qquad \text{calculando la integral} \qquad \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

en su lugar y usando esta fórmula $(**)$. Se aplica en aquellos casos en donde la segunda integral es más fácil de calcular que la primera, claro está.

RECOMENDACIÓN .- En la práctica se siguen los siguientes pasos:

- ❖ Dada la integral $\int f(x)\,g'(x)\,dx$
- ❖ Elegir $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow \quad du = f'(x)\,dx & \text{(diferenciando)} \\ dv = g'(x)\,dx & \Rightarrow \quad v = \int g'(x)\,dx = g(x) & \text{(integrando)} \end{cases}$
- ❖ La fórmula de la integración por partes indica que

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

La integral que aparece en el segundo miembro debería ser más simple de calcular que la del primer miembro para que este método sea realmente útil.

EJEMPLO 3 .- Evalúe $\int x \operatorname{Cos} x \, dx$.

SOLUCIÓN.- Elegimos $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{Cos} x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{Sen} x$, entonces

$$\int x \operatorname{Cos} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \operatorname{Sen} x - \int \operatorname{Sen} x \, dx$$

$$= x \operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x + C .$$

EJEMPLO 4 .- Para evaluar $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$:

SOLUCIÓN.- $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = dx$, luego, diferenciando e integrando

$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $v = x$, y vía **INTEGRACIÓN POR PARTES :**

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (*)$$

Evaluamos $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} , \qquad u = 1 - x^2$$

$$= -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C .$$

Reemplazando en $(*)$:

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C .$$

EJEMPLO 5 .- Evalúe la integral $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$.

SOLUCIÓN.- Como $x^3 = x^2 x$, elegimos

$u = x^2$, $dv = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$, y diferenciando e integrando :

$$du = 2x \, dx , \quad v = \int dv = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = uv - \int v\,du = uv - \int (-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= uv - \int \sqrt{1-x^2}\;d(1-x^2) = uv - \int \sqrt{w}\;dw$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}w^{3/2} + C \quad , \quad w = 1-x^2 \, ,$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C .$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\;(x^2+2) + C$$

EJEMPLO 6 .- Evalúe $I = \displaystyle\int x^2 \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\;dx$.

SOLUCIÓN.- Sea $u = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$, $dv = x^2 dx \Rightarrow v = x^3/3$,

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(-x)}{|x|} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (*)$$

(pues $\sqrt{x^2} = |x|$)

Así, $du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $si\ x > 0$, $du = +\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $si\ x < 0$.

a) Si $x > 0$, utilizaremos el resultado del Ejemplo [5],

$$\boxed{I = uv + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = G(x) + C}$$, donde

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2) + C , \qquad x \geq 0 .$$

b) Si $x < 0$,

$$\boxed{I = uv - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = H(x) + C}$$, donde

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2) + C , \qquad x \leq 0 .$$

NOTA.- En el Capítulo [3] veremos cuán importante es no descuidar la presencia del valor absoluto $|x|$ en la relación $(*)$. Por ejemplo, si vas a calcular esta integral sobre el intervalo cerrado $[-4/10\,,\,7/10\,]$, debes emplear cada una de estas antiderivadas $\mathrm{G}(x)$ y $\mathrm{H}(x)$, adecuadamente, sobre sus dominios correspondientes:

$$\mathrm{I} \;=\; \int_{-0,4}^{0,7} x^2 \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\;dx \;=\; [\,\mathrm{H}(x)\,]\Big|_{-0,4}^{0} \;+\; [\,\mathrm{G}(x)\,]\Big|_{0}^{0,7}$$

$$= \;[\;\mathrm{H}(0) \;-\; \mathrm{H}(-\frac{4}{10})\;] \;+\; [\;\mathrm{G}(\frac{7}{10}) \;-\; \mathrm{G}(0)\;]$$

$$= \;[\;(\frac{2}{9}) \;-\; (\,0{,}195\,232\,34\,)\;] \;+\; [\,(-\,0{,}106\,638\,92\,) \;-\; (-\,\frac{2}{9})\;]$$

$$= \;0{,}142\,573\,18\;.$$

Otro excelente método que puedes aplicar en esta integral definida sobre el intervalo cerrado $[-4/10\,,\,7/10\,]$ es utilizar la **identidad trigonométrica :**

$$\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} \;=\; \arccos(\,|x|\,)\;, \quad x \in [-1\,,\,1\,]\;.$$

EJERCICIO 6a .- Halle las integrales:

$$\text{I)} \int x^2 \arccos(x)\,dx\,, \qquad \text{II)} \int x^2 \arccos(-x)\;dx\,.$$

Rpta. I) $\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} \;-\; \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2) \;+\; \mathrm{C}$

II) $\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} \;+\; \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2) \;+\; \mathrm{C}$.

EJEMPLO 7 .- Evalúe la integral $\mathrm{I} \;=\; \int x^2 \;\mathrm{Sen}\,3x\;dx$.

SOLUCIÓN.- Requerimos dos integraciones por partes sucesivas,

a) Eligiendo $u \;=\; x^2 \quad ; \quad dv \;=\; \mathrm{Sen}\,3x\,dx$

$$\Rightarrow \quad du \;=\; 2x\,dx \quad , \quad v \;=\; -\,\frac{\mathrm{Cos}\,(3x)}{3}$$

$$\mathrm{I} \;=\; -\,\frac{x^2\,\mathrm{Cos}\,3x}{3} \;+\; \frac{2}{3}\int x\,\mathrm{Cos}\,3x\,dx$$

b) Debido a la última integral ahora hacemos la elección

$$u \;=\; x \quad ; \quad dv \;=\; \mathrm{Cos}\,3x\,dx$$

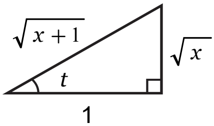
$\Rightarrow \quad du \;=\; dx \quad ; \quad v \;=\; \dfrac{\mathrm{Sen}\,3x}{3}$, entonces

$$I = -\frac{x^2 \operatorname{Cos} 3x}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{x \operatorname{Sen} 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \operatorname{Sen} 3x \, dx \right]$$

$$= -\frac{x^2 \operatorname{Cos} 3x}{3} + \frac{2}{9} x \operatorname{Sen} 3x + \frac{2}{27} \operatorname{Cos} 3x + C .$$

EJEMPLO 8 .- Calcule $I = \int \operatorname{arccsc} \sqrt{(x+1)/x} \, dx$, para $x > 0$.

SOLUCIÓN. Sabemos que, para $x > 0$:



$$\operatorname{arccsc} \sqrt{(x+1)/x} = \arctan \sqrt{x}$$

$I = \int \arctan \sqrt{x} \, dx$; hacemos $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$.

$I = \int 2t \arctan(t) \, dt$; por partes, $u = \arctan t$, $dv = 2t \, dt$

$$\Rightarrow \quad du = dt/(1+t^2) , \quad v = t^2$$

$$I = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = t^2 \arctan t - \int \left[1 - \frac{1}{1+t^2} \right] dt$$

$$= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C$$

$$= (t^2 + 1) \arctan t - t + C$$

$$\therefore \quad I = (x+1) \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C .$$

PROBLEMA 9 .- Halle $I = \int x \arccos \frac{1}{x} \, dx$, para $x > 1$.

SOLUCIÓN.- Como $\arccos \frac{1}{x} = \operatorname{arcsec}(x)$ entonces $I = \int x \operatorname{arcsec}(x) \, dx$

Apliquemos la integración por partes eligiendo:

$u = \operatorname{arcsec}(x)$, $dv = x \, dx$ $\Longrightarrow$ para $x > 1$ verifique que :

$du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Entonces

$$I = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx .$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C .$$

PROBLEMA 10 .- Halle $I = \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

SOLUCIÓN.- $x^2 = x \cdot x$. Elegimos

$$u = x \quad , \quad dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2)}{(1+x^2)^2} \quad , \quad z = x^2 \; , \quad \Rightarrow$$

$$du = dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{1}{2(1+z)} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad I = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C .$$

EJERCICIO 11 .- Calcule $I = \int \frac{x^2}{(x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sen} x)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN.- Observemos el diferencial del cociente

$$t = \frac{1}{(x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sen} x)} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{x \operatorname{Sen} x \; dx}{(x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sen} x)^2} \qquad (*)$$

En la integral I multipliquemos al numerador y al denominador por $\operatorname{Sen} x$ en la forma:

$$I = \int \frac{x}{\operatorname{Sen} x}\cdot\frac{x \operatorname{Sen} x}{(x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sen} x)^2}dx = \int u \cdot dv .$$

Apliquemos la integración por partes haciendo:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{\operatorname{Sen} x} & \Rightarrow \quad du = \dfrac{(\operatorname{Sen} x - x \operatorname{Cos} x)\,dx}{\operatorname{Sen}^2 x} \\[2ex] dv = \dfrac{x \operatorname{Sen} x \; dx}{(x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sen} x)^2} & \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad v = \dfrac{1}{x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sen} x} \end{cases}$$

$$I = uv - \int v\,du = uv - \int (-\operatorname{Csc}^2 x)\,dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{x}{\text{Sen}\, x\,[\,x\,\text{Cos}\, x - \text{Sen}\, x\,]} - \text{Cot}\, x + C\,.$$

6. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN ALGEBRAICA Y TRIGONOMÉTRICA

EJEMPLO 1 .- Calcule $I = \int x^5 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN.- Sea $u = \sqrt{1 - x^2}$: $1 - x^2 = u^2 \Rightarrow -2x\, dx = 2u\, du$

$\Rightarrow x\, dx = -u\, du$

$$I = \int (x^2)^2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot x\, dx = \int (1 - u^2)^2\, u\,(-u\, du)$$

$$= -\int (1 - 2u^2 + u^4)\, u^2\, du = \int (2u^4 - u^2 - u^6)\, du$$

$$= \frac{2}{5} u^5 - \frac{u^3}{3} - \frac{1}{7} u^7 + C$$

$$= \frac{2}{5}(1 - x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{7}(1 - x^2)^{7/2} + C\,.$$

EJEMPLO 2 .- Halle $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^3 - 1}}$.

SOLUCIÓN.- Sea $u^2 = x^3 - 1 \Rightarrow 2u\, du = 3x^2\, dx$; $u = \sqrt{x^3 - 1}$

$$I = \int \frac{x^2\, dx}{x^3 \sqrt{x^3 - 1}} = \frac{2}{3}\int \frac{\cancel{u}\, du}{(u^2 + 1)\,\cancel{u}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{1 + u^2}$$

$$= \frac{2}{3} \arctan u + C = \frac{2}{3} \arctan \sqrt{x^3 - 1} + C\,.$$

EJEMPLO 3 .- Halle $I = \int \frac{x}{1 + 2x^4}\, dx$.

SOLUCIÓN.- $$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{1 + 2(x^2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{\frac{1}{2} + (x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(u)}{\frac{1}{2} + u^2}\,, \qquad u = x^2$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{4a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

donde $a = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2}$; hemos utilizado el **EJEMPLO** 2 – II , Sección 5 .

$$\therefore \quad I = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x^2) + C .$$

6.1 SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En las integrales que contienen expresiones como $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$, la sustitución de ciertas funciones trigonométricas pueden simplificar el integrando.

EJEMPLO 4 .- Halle $I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$.

SOLUCIÓN Sea $x = a\,\text{Sen}\,t$, $t \in \langle -\pi/2 , \pi/2 \rangle$. Aquí x tiene una inversa

$$t = \arcsen(x/a)$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\text{Sen}^2 t} = \sqrt{a^2\text{Cos}^2 t} = |\,a\,\text{Cos}\,t\,| = a\,\text{Cos}\,t$$

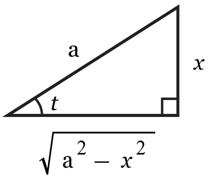
pues $t \in \langle -\pi/2 , \pi/2 \rangle \Rightarrow \text{Cos}\,t > 0$. Como $\boxed{dx = a\,\text{Cos}\,t\;dt}$

$$I = \int \frac{(a^2\,\text{Sen}^2 t)\,a\,\text{Cos}\,t\;dt}{a\,\text{Cos}\,t} = a^2 \int \text{Sen}^2 t\;dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 - \text{Cos}\,2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1 - \text{Cos}\,2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t - \frac{\text{Sen}\,2t}{2}\right] + C = \frac{a^2}{2}\left[\,t - \text{Sen}\,t\;\text{Cos}\,t\,\right] + C \,, \qquad (*)$$

Como $x = a\,\text{Sen}\,t$, $t \in \langle -\pi/2 , \pi/2 \rangle$; haremos un diagrama solamente para $t \in \langle 0 , \pi/2 \rangle$:



$$\text{Sen}\,t = \frac{x}{a}$$

$$\text{Cos}\,t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Según lo cual, en $(*)$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2}\left[\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right] + C$$

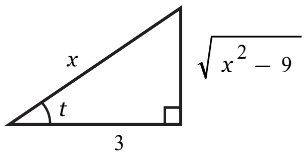
$$= \frac{a^2}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2 - x^2} + C\,.$$

EJEMPLO 5 .- Halle $\quad I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$.

SOLUCIÓN.- Sea $\quad x = 3\,\text{Sec}\,t$,

$$dx = 3\,\text{Sec}\,t\,\text{Tan}\,t\,dt \,, \quad \sqrt{x^2 - 9} = 3\,|\text{Tan}\,t\,| = 3\,\text{Tan}\,t$$

Como ayuda, hacemos un diagrama para $\; t \in [\,0\,,\,\pi/2\,\rangle$:



$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3\,\text{Sec}\,t\;\text{Tan}\,t\;dx}{9\,\text{Sec}^2 t\;\text{Tan}\,t}$$

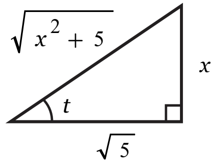
$$= \frac{1}{9}\int \text{Cos}\,t\;dt$$

$$I = \frac{1}{9}\text{Sen}\,t + C = \frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} + C\,.$$

EJEMPLO 6 .- Halle $\quad I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 5}}$.

SOLUCIÓN.-

Sea $\quad x = \sqrt{5}\,\text{Tan}\,t \,, \quad t \in \langle -\pi/2\,,\,\pi/2\,\rangle$



$$\Rightarrow \quad dx = \sqrt{5}\,\text{Sec}^2 t\;dt \,, \quad \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{5}\,\text{Sec}\,t$$

$$I = \int \frac{\sqrt{5}\,\text{Sec}^2 t\,dt}{5\,\text{Tan}^2 t\,\sqrt{5}\,\text{Sec}\,t} = \frac{1}{5}\int \frac{\text{Cos}\,t\;dt}{\text{Sen}^2 t}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\,\text{Sen}\,t}{\text{Sen}^2 t} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2}\,, \qquad u = \text{Sen}\,t$$