

Thomas Bulenda

# Finite-Element- Modellierung 2

Anwendungen in der nichtlinearen Statik

 Springer Vieweg

---

# Finite-Element-Modellierung 2

---

Thomas Bulenda

# Finite-Element- Modellierung 2

Anwendungen in der nichtlinearen Statik

Prof. Dr.-Ing. Thomas Bulenda  
Fakultät Bauingenieurwesen  
OTH Regensburg  
Regensburg, Deutschland

ISBN 978-3-658-42207-3

ISBN 978-3-658-42208-0 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-42208-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2024

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Frieder Kumm

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recyclebar.

*Für meine Frau Jessica und meinen Sohn Julius*

---

# Vorwort

Die Finite-Element-Methode ist ein wichtiges Werkzeug für den Tragwerksplaner. Dabei steht für ihn vor allem die Modellierung mit Finiten Elementen im Vordergrund, weniger die Programmierung. An den Hochschulen werden in der Regel die unabdingbaren Grundprinzipien des Verfahrens unterrichtet, für die Anwendung bleibt oftmals nur wenig Zeit. Die Arbeit mit einem kommerziellen Programm lernt der junge Ingenieur dann durch Learning by Doing. Geeignete Fachliteratur gibt es wenig.

Hier will das vorliegende Buch ansetzen, indem es die Modellierung mit Finiten Elementen in den Vordergrund stellt. Es entstand aus den Vorlesungen zur Finiten-Element-Methode, die der Autor seit 1998 an der OTH Regensburg hält. Die Themenbereiche kommen hauptsächlich aus seiner Tätigkeit als Prüfingenieur für Baustatik in der Sennewald+Steger PartGmbH.

Das Buch umfasst zwei Bände.

Im ersten Band werden Themen der linearen Statik behandelt. So werden die Normalkraftstäbe, Balken, Scheiben, Platten, Plattenbalken und räumliche Systeme mit ihren jeweiligen Besonderheiten besprochen. In diesem Band finden sich auch zwei Kapitel, die eher den theoretischen Grundlagen als der Modellierung zuzuordnen sind. Kap. 2 erläutert den Grundgedanken der Finite-Element-Methode am Beispiel des Normalkraftstabs und in Kap. 8 werden einige numerische Aspekte besprochen.

Der zweite Band widmet sich der Modellierung im Bereich der nichtlinearen Statik. Hier werden die materielle und die geometrische Nichtlinearität sowie die Systemnichtlinearität in unterschiedlichen Anwendungen behandelt. Der ausführliche Anhang des zweiten Bandes erklärt die Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme anhand vieler Beispiele.

Das Buch hat den Anspruch, die gezeigten Systeme so zu erklären, dass sie vom Leser nachgebaut werden können. Die Modellierung erfolgt zudem nicht nur oberflächlich, sondern geht an vielen Stellen stark ins Detail. Während man die prinzipiellen Eingaben noch recht gut allgemein und damit programmunabhängig halten kann, geht dies bei den Spezialfällen nicht mehr. Hier unterscheiden sich die Programme zu stark in ihren Möglichkeiten und Eingaben. Sollen ambitionierte Modellbildungen dargestellt werden, muss man sich folglich für die konkrete Umsetzung mit einem Programm entscheiden. In diesem Buch wurden alle Berechnungen mit den Programmen der SOFiSTiK AG durchge-

führt. Damit sie vom Leser nachvollzogen werden können, sind auch die Eingaben in der CADINDP-Sprache mit abgedruckt. Für Anwender der SOFiSTiK-Programme entsteht so ein zusätzlicher Nutzen. Ingenieure, die mit anderen Programmen arbeiten, können die Eingaben natürlich nicht übernehmen, sollten aber durch die ausführliche Beschreibung in der Lage sein, sie auf ihr Programm zu übertragen.

Eine Besonderheit des Buches ist, dass nicht nur die eine Lösung eines Problems dargestellt wird. Bei vielen Beispielen werden auch auf den ersten Blick durchaus denkbare Herangehensweisen verfolgt, die aber dem Problem nicht gerecht werden. Wenn der Leser auf diese Weise ermutigt wird, seine eigenen Modellbildungen kritisch zu hinterfragen, hat das Buch sein Ziel erreicht.

Bei Springer Vieweg bedanke ich mich für die unkomplizierte Zusammenarbeit.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf eine geschlechtsneutrale Differenzierung verzichtet. Entsprechende Begriffe gelten im Sinne der Gleichbehandlung grundsätzlich für beide Geschlechter. Die verkürzte Sprachform beinhaltet keine Wertung.

Regensburg  
August 2023

Thomas Bulenda

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Übersicht</b> .....	1
	Literatur .....	2
<b>2</b>	<b>Materialnichtlinearität</b> .....	3
2.1	Grenztragfähigkeit des Querschnitts .....	4
2.1.1	Rechteckquerschnitt – Vollplastizierung .....	4
2.1.2	Teilplastizierung .....	6
2.1.3	Schnittgrößeninteraktion N + M beim Rechteckquerschnitt .....	9
2.1.4	Schnittgrößeninteraktion V + M beim Rechteckquerschnitt .....	11
2.1.5	Interaktionsgleichungen für andere Querschnitte .....	13
2.1.6	Interaktionen im Programm AQB .....	13
2.2	Grenztragfähigkeit des Systems .....	14
2.2.1	Schrittweise elastische Berechnung der Traglast mit der Fließgelenktheorie .....	15
2.2.2	Traglastsätze .....	19
2.2.3	Größe der Fließzonen .....	25
2.3	Materialnichtlinearität mit Finiten Elementen .....	30
2.3.1	Zweifeldträger, linear elastisch .....	30
2.3.2	Nachweis elastisch-plastisch mit SOFiSTiK .....	34
2.3.3	Fließgelenktheorie .....	37
2.3.4	Fließzonentheorie .....	42
	Literatur .....	60
<b>3</b>	<b>Geometrische Nichtlinearität</b> .....	61
3.1	Unterschiedliche Berechnungsverfahren .....	61
3.1.1	Berechnung 1: Theorie I. Ordnung .....	68
3.1.2	Berechnung 2: Theorie I. Ordnung, 1 cm Auslenkung .....	69
3.1.3	Berechnung 3: Theorie I. Ordnung, Vorspannung .....	71
3.1.4	Berechnung 4: Theorie I. Ordnung, Vorspannung und 1 cm Auslenkung .....	72

3.1.5	Berechnung 5: Theorie II. Ordnung . . . . .	73
3.1.6	Berechnung 6: Theorie II. Ordnung, Vorspannung . . . . .	75
3.1.7	Berechnung 7: Theorie II. Ordnung, 1 cm Auslenkung . . . . .	78
3.1.8	Berechnung 8: Theorie III. Ordnung (geometrisch nichtlinear) . . . . .	83
3.1.9	Ergebnisse . . . . .	89
3.1.10	Berechnung 9: Stabelemente . . . . .	90
3.2	Verzweigungsprobleme . . . . .	92
3.2.1	Berechnung 1: Euler-Fall II mit nur einem Stabelement, linear . . . . .	96
3.2.2	Berechnung 2: Euler-Fall II mit einem bzw. 10 Stabelementen, nichtlinear . . . . .	98
3.2.3	Berechnung 3: Euler-Fall II mit 10 Stabelementen, Kurvenverfolgung . . . . .	99
3.2.4	Linearisierte Eigenwertanalyse . . . . .	102
3.2.5	Begleitende Eigenwertanalyse . . . . .	106
3.2.6	Imperfektes System . . . . .	110
3.2.7	Traglast unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens . . . . .	117
3.2.8	Die zweite Eigenform als Imperfektion – elastisch . . . . .	120
3.2.9	Zweifeldträger unter Druck mit Querlast . . . . .	124
3.2.10	Imperfekter Rahmen . . . . .	135
3.2.11	Imperfekter Bogen . . . . .	148
3.2.12	Ausgeknickter Fachwerkbinder . . . . .	154
3.3	Das Durchschlagproblem . . . . .	159
3.3.1	Problemstellung und analytische Lösung . . . . .	159
3.3.2	Berechnung 1: Fachwerkzweischlag . . . . .	169
3.3.3	Berechnung 2: Stabelemente . . . . .	178
3.3.4	Berechnung 3: Feinere Unterteilung . . . . .	179
3.3.5	Eigenwertanalyse . . . . .	181
3.3.6	Durchschlag maßgebend . . . . .	188
3.3.7	Interaktion der Versagensmoden . . . . .	193
3.3.8	Praxisbeispiel Gitterschale . . . . .	199
3.4	Imperfektionen – Imperfektionsempfindlichkeit . . . . .	200
3.4.1	Form der Imperfektion . . . . .	201
3.4.2	Imperfektion als Kombination verschiedener Eigenformen . . . . .	204
3.4.3	Normierung . . . . .	205
3.4.4	Skalierung der Ersatzimperfektion . . . . .	206
3.4.5	Imperfektionsempfindlichkeit . . . . .	212
	Literatur . . . . .	214
<b>4</b>	<b>Stahlbetonstütze . . . . .</b>	<b>217</b>
4.1	Lineare Berechnung und Regelbemessung . . . . .	219
4.2	Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit linearem Materialgesetz . . . . .	223

4.3	Berücksichtigung von Material- und Geometrie-Nichtlinearität . . . . .	225
4.3.1	Verfahren der „Doppelten Buchführung“ nach DIN 1992-1-1 (2011), 5.8.6 . . . . .	226
4.3.2	Nichtlineare Berechnung mit veränderter Grundbewehrung . . . . .	232
4.3.3	$\gamma_R$ -Verfahren nach DIN 1992-1-1 (2011), 5.7, (NA.7 bis 15) . . . . .	232
	Literatur . . . . .	237
<b>5</b>	<b>Biegedrillknicken</b> . . . . .	<b>239</b>
5.1	Einführungsbeispiel . . . . .	239
5.1.1	Handberechnung nach dem Ersatzstabverfahren . . . . .	240
5.1.2	Spannungen am perfekten System . . . . .	241
5.1.3	Spannungen am imperfekten System bei elastischer Querschnittsausnutzung mit $q = 6,8 \text{ kN/m}$ . . . . .	242
5.1.4	Imperfektes System nach Fließzonentheorie mit $q = 7,0 \text{ kN/m}$ . . . . .	244
5.1.5	Imperfektes System bei plastischer Querschnittsausnutzung mit $q = 7,0 \text{ kN/m}$ und Kurvenverfolgung mit vollplastischer Schnittgrößeninteraktion . . . . .	248
5.1.6	Imperfektes System nach Fließzonentheorie mit $q = 7,0 \text{ kN/m}$ und unechter Kurvenverfolgung . . . . .	252
5.1.7	Imperfektes System elastisch-plastisch berechnet, voreingestellte Interaktion . . . . .	253
5.1.8	Imperfektes System plastisch-plastisch berechnet, mit Nachverfestigung . . . . .	257
5.1.9	Imperfektes System plastisch-plastisch berechnet, mit Nachverfestigung nach Theorie II. Ordnung statt Theorie III. Ordnung . . . . .	257
5.1.10	Ersatzstabverfahren . . . . .	258
5.1.11	Zusammenfassung . . . . .	262
5.2	Vergleich Ersatzstabverfahren – Theorie II. Ordnung – . . . . .	263
5.3	Biegedrillknicknachweis eines Rahmenriegels . . . . .	266
5.3.1	Modellierung der Vouten . . . . .	266
5.3.2	Schnittkraftermittlung . . . . .	272
5.3.3	Berechnung am geraden Träger nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung . . . . .	278
5.3.4	Grundsystem . . . . .	279
5.3.5	Imperfektion aus Eigenwertanalyse unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion . . . . .	281
5.3.6	Aussteifung durch einen Verband . . . . .	283
5.3.7	Einfluss der Drehbettung aus den Pfetten . . . . .	286
5.3.8	Einfluss der Drehbettung aus zusätzlichen Pfetten . . . . .	291
5.3.9	Imperfektionsempfindlichkeit . . . . .	292
5.3.10	Eigenwertanalyse ohne Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion . . . . .	293

5.3.11	Biegedrillnicknachweis mit dem Ersatzstabverfahren . . . . .	295
5.3.12	Anschlusskräfte und Anschlussmomente . . . . .	295
5.4	Biegedrillnicknachweis am Rahmen . . . . .	296
5.5	Berechnung am Gesamtsystem . . . . .	300
	Literatur . . . . .	300
<b>6</b>	<b>Pendelstützen</b> . . . . .	<b>303</b>
6.1	Hallenrahmen . . . . .	303
6.2	Berechnung nach Theorie I. Ordnung . . . . .	306
6.3	Berechnung nach Theorie II. Ordnung ohne Imperfektionen . . . . .	307
6.4	Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit Imperfektionen . . . . .	308
6.5	Pendelstützen durch Lager ersetzt . . . . .	310
6.6	Ergebnisse . . . . .	312
6.7	Praxisbeispiel: Stahlhalle . . . . .	314
	Literatur . . . . .	316
<b>7</b>	<b>Formfindung</b> . . . . .	<b>317</b>
7.1	Stützlinienbogen . . . . .	319
7.2	Schalen . . . . .	328
	Literatur . . . . .	333
<b>8</b>	<b>Schalenbeulen</b> . . . . .	<b>335</b>
8.1	Spannungsbasierter Nachweis . . . . .	338
8.1.1	Axialdruck . . . . .	338
8.1.2	Umfangsdruck . . . . .	343
8.1.3	Nachweis . . . . .	352
8.2	LBA/MNA-Nachweis . . . . .	354
8.2.1	Axialdruck . . . . .	355
8.2.2	Umfangsdruck . . . . .	360
8.2.3	Nachweis . . . . .	369
8.3	GMNIA-Berechnung . . . . .	369
8.4	Ergebnis . . . . .	370
	Literatur . . . . .	371
<b>9</b>	<b>Nichtlinearität aus Systemänderung</b> . . . . .	<b>373</b>
9.1	Einführungsbeispiel . . . . .	373
9.2	Vorgespannter Fachwerkträger . . . . .	378
9.3	Praxisbeispiel Treppenhausgründung . . . . .	383
9.4	Bauablauf . . . . .	385
9.4.1	Vergleichsberechnung am zweigeschossigen System . . . . .	388
9.4.2	Mehrgeschossiges Beispiel . . . . .	394
	Literatur . . . . .	407

---

<b>10</b>	<b>Anhang: Numerische Methoden</b> . . . . .	409
10.1	Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme . . . . .	409
10.1.1	Fixpunktiteration . . . . .	410
10.1.2	Newton-Raphson-Verfahren . . . . .	425
10.1.3	Konvergenzkriterien, Abbruch der Iteration . . . . .	437
10.1.4	Beispiel zur Newton-Raphson-Iteration . . . . .	440
10.1.5	Das Newton-Raphson-Verfahren in der Statik . . . . .	451
10.1.6	Line-Search-Verfahren . . . . .	454
10.1.7	Quasi-Newton-Verfahren . . . . .	468
10.1.8	Iterationsverfahren in SOFiSTiK – ASE . . . . .	478
10.2	Eigenwertprobleme . . . . .	480
10.2.1	Einführungsbeispiel . . . . .	480
10.2.2	Lösung der Eigenwertprobleme mit dem charakteristischen Polynom . . . . .	484
10.2.3	Eigenwerte und Stabilität . . . . .	489
10.2.4	Koordinatentransformation . . . . .	490
10.2.5	Transformation in den Eigenraum . . . . .	491
10.2.6	Mathematische Erkenntnisse . . . . .	493
10.2.7	Eigenwerte in der Statik . . . . .	495
10.2.8	Zusammenhang mit der Determinante . . . . .	499
10.2.9	Numerische Eigenwertberechnung . . . . .	499
10.2.10	Beispiele zur Eigenwertberechnung . . . . .	508
10.3	Kurvenverfolgung . . . . .	522
10.3.1	Ausgangsüberlegung . . . . .	522
10.3.2	Kurvenverfolgung . . . . .	524
10.3.3	Kritische Punkte . . . . .	526
	Literatur . . . . .	527
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	529



Der zweite Teil dieses Buchs behandelt die Modellierung mit Finiten Elementen in der nichtlinearen Statik.

Nichtlineare Probleme tauchen in der Baustatik an den verschiedensten Stellen auf. Eine gute Einführung in das Thema geben Rothert und Gensichen (1987). Die Umsetzung der Nichtlinearität in einem Finite-Element-Programm erläutern Rust (Rust 2009) und Wriggers (Wriggers 2001).

Die Modellierung der nichtlinearen Probleme wird in zehn Kapiteln besprochen.

In Kap. 2 wird die Materialnichtlinearität besprochen. Es wird gezeigt, wie in einer Computerberechnung die von der Handrechnung her bekannte Fließgelenkmethode angewandt werden kann, aber auch die genauere Fließzonentheorie.

Kap. 3 behandelt die geometrische Nichtlinearität und eng verknüpft damit die Themenkreise Stabilität und Schnittgrößenermittlung unter Berücksichtigung der Verformungen. In diesem Zusammenhang wird die Anwendung von Eigenwertproblemen besprochen.

In Kap. 4 wird die Behandlung von Stabilitätsproblemen im Stahlbetonbau besprochen. Hier ist die gemeinsame Beachtung der materiellen und geometrischen Nichtlinearität erforderlich.

Kap. 5 hat den Biegedrillnicknachweis im Stahlbau zum Gegenstand. Es werden Nachweise mit dem Ersatzstabverfahren und nach Theorie II. Ordnung am Ersatzträger und am Gesamtsystem besprochen.

Die richtige Behandlung von Pendelstützen und damit die Vermeidung von gefährlichen Fehlern ist Thema von Kap. 6.

Wie man eine Tragwerksform berechnet, die den Lastabtrag allein über Normalkräfte bewerkstelligt, wird in Kap. 7 gezeigt.

Gegenstand von Kap. 8 ist die numerische Behandlung von beulenden Schalen im Vergleich mit der Verwendung analytischer Formeln.

Kap. 9 hat die Systemnichtlinearität zum Thema, bei der während der Berechnung ein Wechsel des statischen Systems stattfindet. In diesem Abschnitt wird auch die korrekte Erfassung des Bauablaufs besprochen.

Schließlich gibt Kap. 10 eine Einführung in die numerische Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen und den Umgang mit Eigenwertproblemen.

---

## **Literatur**

- Rothert H, Gensichen V (1987) Nichtlineare Stabstatik. Springer, Heidelberg  
Rust W (2009) Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen. Vieweg+Teubner, Wiesbaden  
Wriggers P (2001) Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Springer, Berlin



Der erste große Bereich der Nichtlinearität, der in diesem Buch behandelt wird, ist die Nichtlinearität des Materials. In Kap. 4 wird das nichtlineare Verhalten des Stahlbetons beim Stabilitätsnachweis einer Stütze besprochen. Der vorliegende Abschnitt behandelt die materielle Nichtlinearität im Stahlbau.

Wird in der linearen Statik als Grenzzustand der Tragfähigkeit definiert, dass eine Faser in einem Querschnitt des Systems die Fließgrenze erreicht, so bestehen bei Berücksichtigung der Materialnichtlinearität zwei Ansätze, diese Grenze zu überschreiten.

Zum einen verfügt bei Biegebeanspruchung jeder Querschnitt des Systems über zusätzliche Reserven. Wenn die äußerste Faser die Fließgrenze erreicht, sind die näher an der Biegeachse liegenden Fasern davon umso weiter entfernt, je näher sie an der Achse liegen. Die plastische Tragfähigkeit des Querschnitts ist erst erreicht, wenn alle Fasern ins Fließen gekommen sind. Diese Tragreserve hängt von der Querschnittsform und der Belastung ab.

Zum anderen gibt es noch die Systemreserve. Darunter versteht man bei statisch unbestimmten Systemen die Möglichkeit der Lastumlagerung. Erreicht nämlich der am stärksten beanspruchte Querschnitt seine plastische Grenze der Tragfähigkeit, kann er zwar keine weitere Last aufnehmen, er hält aber der vorhandenen Beanspruchung weiter stand. Einer zusätzlichen Belastung entzieht sich der Querschnitt durch plastisches Fließen. Er wird – für diese zusätzliche Belastung – zum Gelenk. Handelt es sich um ein statisch unbestimmtes System hat sich dessen Grad der statischen Unbestimmtheit jetzt um eins reduziert und das System trägt die Zusatzlast über das neue System ab. Mit jedem Mal, wenn ein Querschnitt seine Grenze der Tragfähigkeit erreicht, entsteht dort für den weiteren Lastabtrag ein Gelenk und damit ein in seiner statischen Unbestimmtheit um den Grad eins reduziertes System. Die Belastung kann solange gesteigert werden, bis nurmehr ein statisch bestimmtes System übrigbleibt und darin ein Querschnitt seine Tragfähigkeitsgrenze erreicht.

In diesem Kapitel sollen für beide Mechanismen zunächst die Grundlagen erklärt werden, bevor in den folgenden Abschnitten ihre Aktivierung mit einem Finite-Element-Programm gezeigt wird.

## 2.1 Grenztragfähigkeit des Querschnitts

Dieser Abschnitt soll die Grundlagen der Querschnittstragfähigkeit vermitteln.

### 2.1.1 Rechteckquerschnitt – Vollplastizierung

Solange ein Rechteckquerschnitt elastisch bleibt, ergibt sich aus der in Abb. 2.1 dargestellten Spannungs- und Dehnungsverteilung das ebenfalls dargestellte Kräftepaar.

Der elastische Grenzzustand stellt sich ein, wenn die Randspannung die elastische Grenzspannung  $\sigma_F$  erreicht. Das zugehörige Moment wird *elastisches Grenzmoment* genannt und errechnet sich aus dem Moment, das vom Kräftepaar der resultierenden Spannungen gebildet wird, zu:

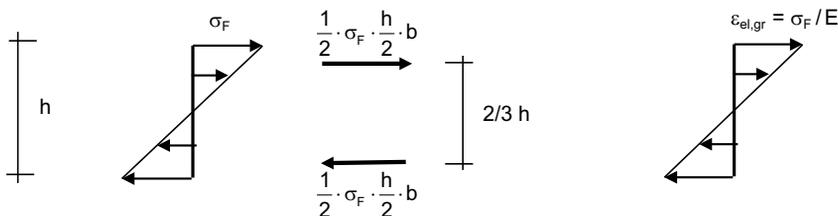
$$M_{el,gr} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_F \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot h = \sigma_F \frac{bh^2}{6} = \sigma_F W_{el} \quad (2.1)$$

Für den Stahl verwenden wir ein Materialgesetz gemäß der in Abb. 2.2 dargestellten Kurve (ideal elastisch – ideal plastisch).

Aus der Kurve lesen wir ab: bis zum Erreichen der Grenzspannung  $\sigma_{el,gr}$  ist das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Verhalten linear. Danach wird weiteren Verformungen kein Widerstand mehr entgegengesetzt. Es stellen sich bei gleichbleibender Spannung beliebig große Dehnungen ein.

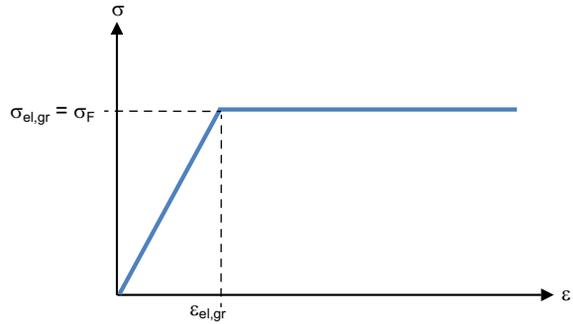
Mit anderen Worten: Bei Belastung oberhalb der elastischen Grenzlast, nehmen die Dehnungen zu, aber die Spannung übersteigt nicht die elastische Grenzspannung.

Der vollplastische Zustand ist erreicht, wenn die Randdehnungen gegen Unendlich streben. Im gesamten Querschnitt liegt dann die Fließspannung vor. Das aufnehmbare Moment wird plastisches Grenzmoment genannt. Unter Bezug auf die in Abb. 2.3 gezeig-



**Abb. 2.1** Spannungs- und Dehnungsverteilung im elastischen Bereich

**Abb. 2.2** Ideal elastisches – ideal plastisches Materialgesetz



te Spannungs- und Dehnungsverteilung errechnet es sich zu:

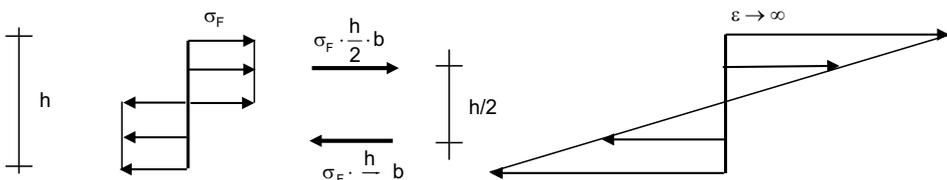
$$M_{\text{pl,gr}} = \sigma_F \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = \sigma_F \frac{bh^2}{4} = \sigma_F W_{\text{pl}} \quad (2.2)$$

Da zu dem eben errechneten Moment unendlich große Dehnungen gehören, kann es in Wirklichkeit nicht auftreten. In Abb. 2.6 wird aber gezeigt, dass schon bei einer Dehnung  $\varepsilon = 5 \varepsilon_{\text{el,gr}}$  ein Moment von 98,7 % des plastischen Grenzmomentes aufgenommen werden kann. Somit ist das Rechnen mit  $M_{\text{pl,gr}}$  gerechtfertigt.

Vergleichen wir das elastische und das plastische Grenzmoment, so erkennen wir:

$$\frac{M_{\text{pl,gr}}}{M_{\text{el,gr}}} = \frac{\sigma_F \frac{bh^2}{4}}{\sigma_F \frac{bh^2}{6}} = \frac{W_{\text{pl}}}{W_{\text{el}}} = \alpha_{\text{pl}} = 1,5 \quad (2.3)$$

Das Verhältnis von plastischem zu elastischem Grenzmoment bzw. von plastischem zu elastischem Widerstandsmoment bezeichnet man als *plastischer Formfaktor*  $\alpha_{\text{pl}}$ . Der plastische Formfaktor gibt an, ein Wievielfaches die plastische Tragfähigkeit des Querschnitts im Vergleich zu seiner elastischen Tragfähigkeit beträgt. Die Größe des Formfaktors hängt von der Querschnittsgeometrie ab. Querschnitte, die einen großen Anteil ihrer Fläche in der Nähe der Biegeachse haben, verfügen über große plastische Reserven und haben einen großen Formfaktor, während bei Querschnitten mit achsfernen Flächen kaum mehr Reserven vorhanden sind und der Formfaktor dementsprechend klein ist. Letzteres trifft



**Abb. 2.3** Spannungs- und Dehnungsverteilung im vollplastischen Bereich

besonders auf die typischen I-Profile im Stahlbau zu, deren Querschnittsfläche ja deshalb an den Rändern angeordnet ist, damit sie der Aufnahme des Biegemomentes am meisten nützt. Beispiele für plastische Formfaktoren zeigt Abb. 2.7.

### 2.1.2 Teilplastizierung

Wird der Querschnitt über seine Grenze der elastischen Tragfähigkeit hinaus beansprucht, ohne dass er jedoch die plastische Tragfähigkeitsgrenze erreicht, spricht man von Teilplastizierung. Abb. 2.4 zeigt die zugehörigen Spannungs- und Dehnungsverteilungen.

Im Bereich der geradlinig verteilten Spannungen gilt:

$$\sigma(z) = \sigma_F \frac{z}{z_F} \quad (2.4)$$

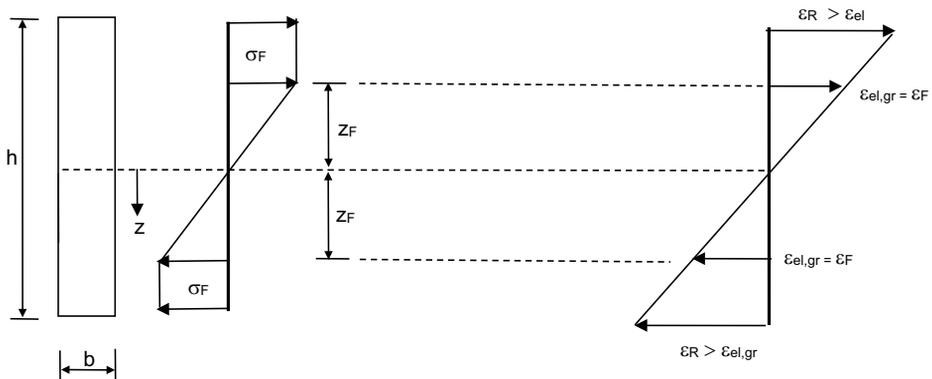
Berechnen wir das innere Biegemoment im teilplastizierten Bereich aus den Spannungen, erhalten wir für einen zur y-Achse symmetrischen Querschnitt:

$$M = 2 \left[ \int_0^{z_F} \sigma z dA + \int_{z_F}^{\frac{h}{2}} \sigma_F z dA \right] = 2 \left[ \frac{\sigma_F}{z_F} \int_0^{z_F} z^2 dA + \sigma_F \int_{z_F}^{\frac{h}{2}} z dA \right] = \sigma_F \left[ \frac{I_E}{z_F} + S_P \right] \quad (2.5)$$

Im ersten Integral wurde die Spannung  $\sigma$  über den Strahlensatz mit

$$\sigma = \frac{z}{z_F} \sigma_F = \frac{\sigma_F}{z_F} z \quad (2.6)$$

ermittelt.



**Abb. 2.4** Spannungs- und Dehnungsverteilung im teilplastischen Bereich

Der Index E steht für den elastischen, der Index P für den plastischen Bereich.  $I_E$  bezeichnet das Trägheitsmoment des elastischen Bereichs,  $S_P$  das statische Moment des plastischen Bereichs.

Betrachten wir die Grenzfälle:

Für den Fall  $z_F = h/2$  bleibt der ganze Querschnitt elastisch. Das zweite Integral verschwindet und wir erhalten das elastische Grenzmoment:

$$\begin{aligned} M &= 2 \left[ \int_0^{z_F} \sigma z dA + \int_{z_F}^{\frac{h}{2}} \sigma_F z dA \right] = 2 \left[ \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma z dA + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_F z dA \right] \\ &= \sigma_F \frac{I_E}{\frac{h}{2}} + 0 = \sigma_F W_{el} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für den Fall  $z_F = 0$  wird der ganze Querschnitt plastisch. Wir erhalten das vollplastische Moment.

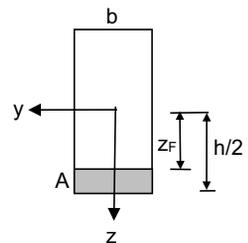
$$M = 2 \left[ \int_0^0 \sigma z dA + \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_F z dA \right] = 2 \left[ 0 + \sigma_F \int_0^{\frac{h}{2}} z dA \right] = 2 \sigma_F S_P \quad (2.8)$$

Im Weiteren wird nunmehr der Rechteckquerschnitt betrachtet (Abb. 2.5). Für ihn gilt:

$$I_E = 2 \int_0^{z_F} z^2 dA = 2 \int_0^{z_F} z^2 b dz = \frac{2}{3} b z_F^3 \quad (2.9)$$

$$S_P = 2 \int_{z_F}^{\frac{h}{2}} z dA = 2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + z_F \right) \cdot b \left( \frac{h}{2} - z_F \right) = b \left[ \frac{h^2}{4} - z_F^2 \right] \quad (2.10)$$

**Abb. 2.5** Teilplastizierter Rechteckquerschnitt



Das innere Moment ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \left[ \int_0^{z_F} \sigma z dA + \int_{z_F}^{\frac{h}{2}} \sigma_F z dA \right] = \sigma_F \left[ \frac{I_E}{z_F} + S_H \right] = \sigma_F \left[ \frac{2bz_F^3}{3z_F} + b \left[ \frac{h^2}{4} - z_F^2 \right] \right] \\
 &= \sigma_F \left[ \frac{2bz_F^2}{3} + b \frac{h^2}{4} - bz_F^2 \right] = \sigma_F b \left[ \frac{h^2}{4} - \frac{z_F^2}{3} \right] \\
 &= \sigma_F \frac{1}{4} b h^2 \left[ 1 - \frac{z_F^2}{3 \left( \frac{h}{2} \right)^2} \right] = \frac{3}{2} \sigma_F W_{el} \left[ 1 - \frac{z_F^2}{3 \left( \frac{h}{2} \right)^2} \right] = \frac{3}{2} M_{el} \left[ 1 - \frac{z_F^2}{3 \left( \frac{h}{2} \right)^2} \right] \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Aus Abb. 2.4 erkennt man:

$$\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_F} = \frac{\frac{h}{2}}{z_F} \quad (2.12)$$

Damit erhalten wir die Überlastungsfunktion für den Rechteckquerschnitt:

$$\frac{M}{M_{el}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \left( \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_F} \right)^2} \quad (2.13)$$

bzw. mit den Abkürzungen nach Burth und Brocks (1992):

$$m = \frac{M}{M_{el}} \quad (2.14)$$

und

$$\alpha = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_F} \quad (2.15)$$

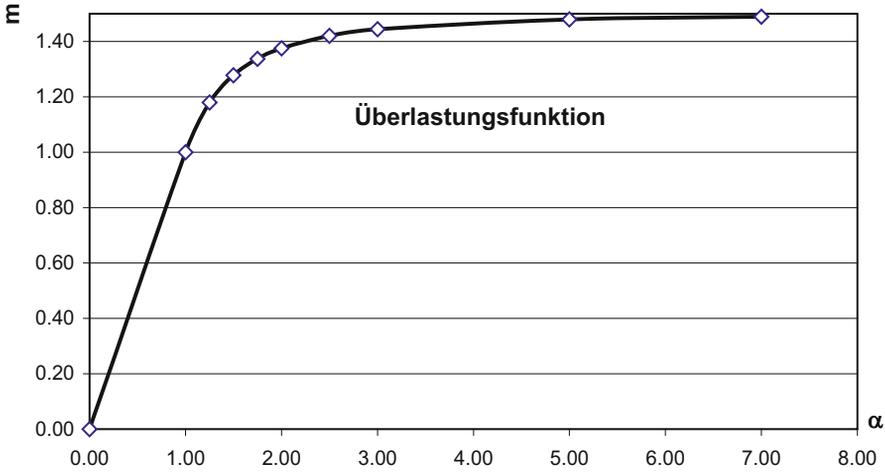
folgt:

$$m(\alpha) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} \quad (2.16)$$

Diese Funktion gilt für  $\alpha > 1$ . Für  $\alpha \rightarrow \infty$  geht  $m(\alpha) \rightarrow \alpha_{pl} = 1,50$ . Wie man Abb. 2.6 entnehmen kann, stellt sich schon bei der 5-fachen elastischen Grenzdehnung ein aufnehmbares Moment von 98,7% des plastischen Grenzmomentes ein.

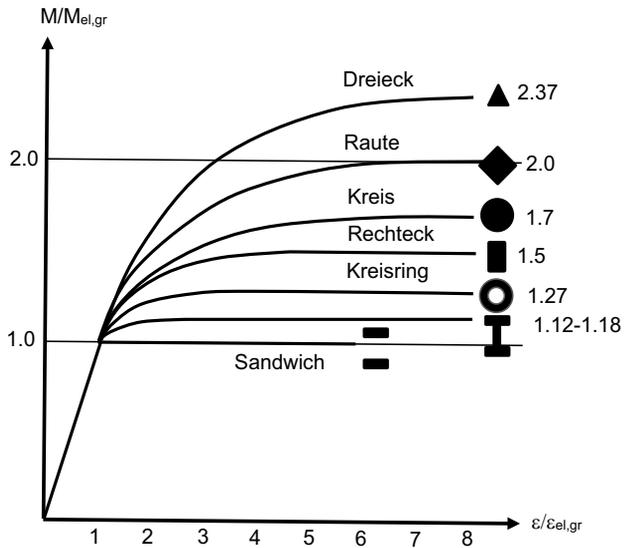
Die Überlastungsfunktionen für verschiedene andere Querschnitte findet man in Abb. 2.7 nach Roik (1983, S. 268).

$\alpha$	0.00	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	5.00	7.00	9.00	10
$m(\alpha)$	0.000	1.000	1.180	1.278	1.337	1.375	1.420	1.444	1.480	1.490	1.494	1.495



**Abb. 2.6** Überlastungsfunktion für den Rechteckquerschnitt

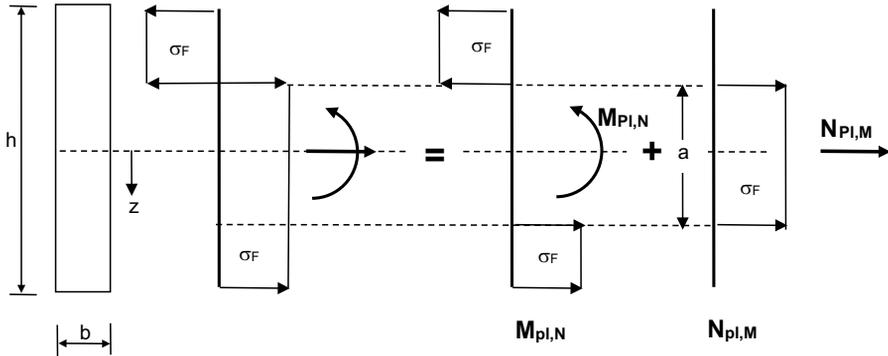
**Abb. 2.7** Überlastungsfunktionen für verschiedene Querschnitte. (Nach Roik 1983)



**2.1.3 Schnittgrößeninteraktion N + M beim Rechteckquerschnitt**

Wir betrachten hier nur den vollplastizierten Querschnitt. Die Herleitung der aufnehmbaren Momente bei teilweiser Plastizierung findet man in Rothert und Gensichen (1987).

Abb. 2.8 zeigt die Spannungsverteilung bei der gleichzeitigen Wirkung von Normalkraft und Moment.



**Abb. 2.8** Schnittgrößeninteraktion N + M beim Rechteckquerschnitt

Der vollplastische Zustand wurde in einen Anteil für das Biegemoment und einen Anteil für die Normalkraft aufgeteilt. Damit lässt sich aus der Spannungsverteilung das Biegemoment unter Einfluss der Normalkraft ermitteln:

$$M_{pl,N} = \sigma_F b h \frac{h}{4} - \sigma_F b a \frac{a}{4} = \sigma_F b \frac{h^2}{4} \left( 1 - \frac{a^2}{h^2} \right) = M_{pl} \left( 1 - \frac{a^2}{h^2} \right) \quad (2.17)$$

Ebenso die Normalkraft unter Einfluss eines Biegemomentes:

$$N_{pl,M} = \sigma_F b a = \sigma_F b h \frac{a}{h} = N_{pl} \frac{a}{h} \quad (2.18)$$

hieraus:

$$\frac{a}{h} = \frac{N_{pl,M}}{N_{pl}} \quad (2.19)$$

Damit in Gl. (2.17) liefert die Interaktionsgleichung:

$$M_{pl,N} = M_{pl} \left( 1 - \frac{a^2}{h^2} \right) = M_{pl} \left( 1 - \left( \frac{N_{pl,M}}{N_{pl}} \right)^2 \right)$$

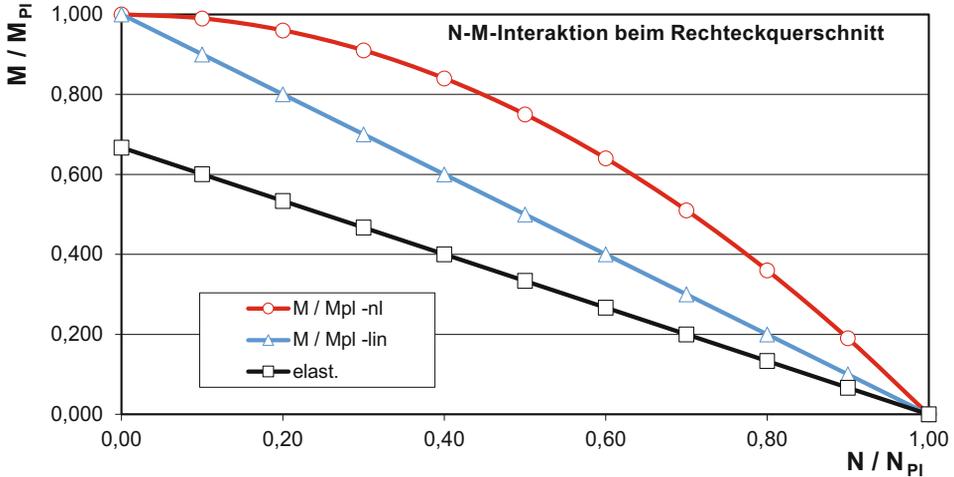
$$\frac{M_{pl,N}}{M_{pl}} = 1 - \left( \frac{N_{pl,M}}{N_{pl}} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{M_{pl,N}}{M_{pl}} + \left( \frac{N_{pl,M}}{N_{pl}} \right)^2 = 1 \quad (2.20)$$

Abb. 2.9 zeigt den deutlichen Zugewinn an Tragfähigkeit sowohl gegenüber der linearen Interaktion:

$$\frac{M_{pl,N}}{M_{pl}} + \frac{N_{pl,M}}{N_{pl}} = 1, \quad (2.21)$$

als auch gegenüber der elastischen Tragwirkung.

N / N <sub>pl</sub>	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
M / M <sub>pl</sub> -nl	1,000	0,990	0,960	0,910	0,840	0,750	0,640	0,510	0,360	0,190	0,000
M / M <sub>pl</sub> -lin	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,100	0,000
elast.	0,67	0,60	0,53	0,47	0,40	0,33	0,27	0,20	0,13	0,07	0,00



**Abb. 2.9** N-M-Interaktion beim Rechteckquerschnitt

**2.1.4 Schnittgrößeninteraktion V + M beim Rechteckquerschnitt**

Die von-Mises-Vergleichsspannung berechnet sich zu:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \tag{2.22}$$

Darin bezeichnet  $\sigma_x$  die Normalspannung aus dem Biegemoment M und  $\tau$  meint die Schubspannung aus der Querkraft V. Im Grenzzustand ist die Vergleichsspannung gleich der Fließgrenze:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} = \sigma_F \tag{2.23}$$

Daraus:

$$\sigma_x^2 + 3\tau^2 = \sigma_F^2 \rightarrow \frac{\sigma_x^2}{\sigma_F^2} + \frac{3\tau^2}{\sigma_F^2} = 1 \rightarrow \frac{\sigma_x^2}{\sigma_F^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{pl}^2} = 1 \tag{2.24}$$

Die unter der gemeinsamen Wirkung von M und V aufnehmbare Normalspannung ergibt sich also zu:

$$\sigma_x = \sigma_{Fl} \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\tau_{pl}^2}} \tag{2.25}$$

Die Gleichung lässt sich in eine Schnittgrößeninteraktion überführen. Hierzu wird mit der Schubfläche  $A_S$  bzw. mit dem Widerstandsmoment multipliziert. Mit

$$\frac{\tau^2}{\tau_{pl}^2} = \frac{(A_S \tau)^2}{(A_S \tau_{pl})^2} = \frac{V^2}{V_{pl}^2} \quad (2.26)$$

und

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_F^2} = \frac{(W_{pl} \sigma_x)^2}{(W_{pl} \sigma_F)^2} = \frac{M_{pl,V}^2}{M_{pl}^2} \quad (2.27)$$

folgt:

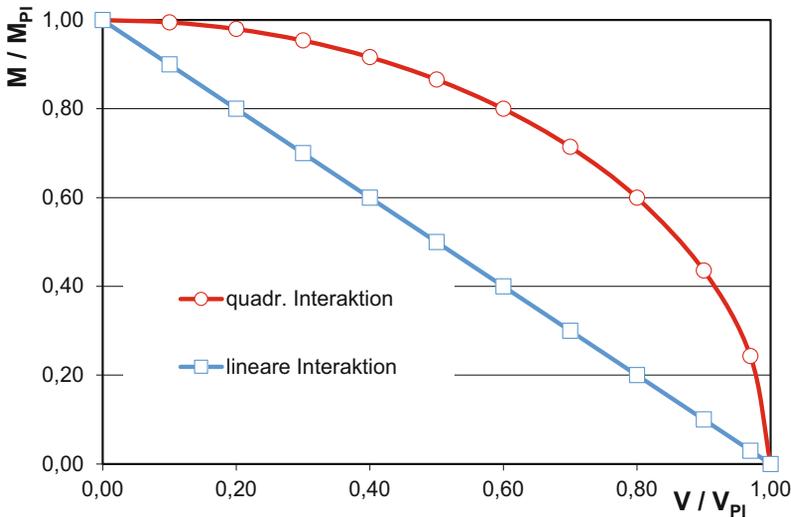
$$\frac{M_{pl,V}^2}{M_{pl}^2} + \frac{V_{pl,M}^2}{V_{pl}^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad M_{pl,V} = M_{pl} \sqrt{1 - \frac{V_{pl,M}^2}{V_{pl}^2}} \quad (2.28)$$

Dabei handelt es sich um eine Kreisgleichung. Die Interaktion ist in Abb. 2.10 im Vergleich zur auf der sicheren Seite liegenden linearen Interaktion

$$\frac{M_{pl,V}}{M_{pl}} + \frac{V_{pl,M}}{V_{pl}} = 1 \quad (2.29)$$

dargestellt. Man erkennt den bis ca.  $V/V_{pl} < 0,3$  recht kleinen Einfluss der Querkraft auf die Querschnittsbeanspruchbarkeit.

$V/V_{pl}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,97	1,00
$M/M_{pl}$	1,000	0,995	0,980	0,954	0,917	0,866	0,800	0,714	0,600	0,436	0,243	0,000
linear	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,03	0,00



**Abb. 2.10** V-M-Interaktion beim Rechteckquerschnitt

## 2.1.5 Interaktionsgleichungen für andere Querschnitte

Für I-Querschnitte finden sich Interaktionsgleichungen in der DIN EN 1993-1-1 (2010); DIN 18800-1 (2008), T1, bei Kindmann und Frickel (2002), Rubin (1978a, 1978b) und in Burth und Brocks (1992, S. 43). Ein zugehöriges Ablaufdiagramm zeigt Albert (2020, S. 8.19). Kindmann und Frickel (2002) enthält eine CD mit EXCEL-Programmen zur Querschnittsinteraktion.

Bei der Verwendung von Computerprogrammen ist zu beachten, welche Möglichkeiten das Programm bietet. Berechnet es die Schnittgrößeninteraktion numerisch, können alle Querschnitte plastisch bemessen werden. Verwendet das Programm dagegen nur die fertigen Formeln des Eurocodes für Doppel-T-Querschnitte, können auch nur diese plastisch bemessen werden. Für alle anderen Querschnitte bleibt dann nur der elastische Nachweis.

## 2.1.6 Interaktionen im Programm AQB

Im Programm AQB stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die Querschnittsausnutzung im Nachgang zu einer elastischen Schnittgrößenermittlung zu ermitteln:

`span smod e` berechnet die von-Mises-Vergleichsspannung nach DIN EN 1993-1-1 (2010), Gl. 6.1.

`span smod b` ermittelt die lineare Interaktion der Schnittgrößen nach DIN EN 1993-1-1 (2010), Gl. 6.2. Hier werden die einzelnen Ausnutzungsgrade für jede Schnittgröße adiiert. Die Interaktion liegt auf der sicheren Seite, ist aber konservativ. Sie muss verwendet werden, wenn der Stabilitätsnachweis am imperfekten System nach Theorie II. Ordnung mit elastischem Materialverhalten geführt wird.

`span smod c` berechnet die genauere Interaktion mit geschlossenen Formeln nach DIN EN 1993-1-1 (2010), 6.2. Die Gleichungen gelten nur für spezielle, nicht für allgemeine Querschnitte. Kleinere Abweichungen bei der Berücksichtigung von Normal- und Querkraft gegenüber der Norm sind im AQB-Handbuch beschrieben.

`dehn ksv uld` errechnet auch für allgemeine Querschnitte eine Dehnungs- und Spannungsverteilung, die mit der äußeren Schnittkraft im Gleichgewicht steht. Hierzu wird eine in AQUA vordefinierte oder vom Nutzer erstellte Spannungs-Dehnungs-Linie verwendet. Es kann also auch eine Nachverfestigung berücksichtigt werden. Bei diesem Vorgehen erhält man keinen Ausnutzungsgrad, sondern nur die Meldung, dass das System konvergiert hat und der Querschnitt damit tragfähig ist.

Das Programm ASE erlaubt im Wechselspiel mit dem Programm AQB eine materiell nichtlineare Schnittgrößenermittlung:

`dehn ksv pld` im Programm ASE verwendet eine Interaktion der Schnittgrößen mit dem Exponenten 1,7. Die aufnehmbare Schnittkraft wird auf die vollplastische Größe begrenzt, d. h. es gibt keine Nachverfestigung.

`dehn ksv uld` im Programm ASE macht von den in AQUA definierten Arbeitslinien Gebrauch. Aus den ermittelten Spannungen werden die inneren Schnittgrößen ermittelt,

die mit den äußeren Schnittgrößen im Gleichgewicht stehen. Das Programm ermittelt effektive Steifigkeiten, die im nächsten Iterationsschritt bei der Schnittkraftbestimmung verwendet werden.

Soll eine Kurvenverfolgung mit dem Satz `trag` verwendet werden, ist zu beachten:

Eine richtige Kurvenverfolgung, bei der der errechnete Spannungs-Dehnungszustand einer Laststufe für die Berechnung der nächsten Laststufe herangezogen wird (`prim ja`), funktioniert nur mit der Einstellung `dehn ksv pld`. Will man eine genaue Berechnung der Spannungsinteraktion für beliebige Querschnitte verwenden (`dehn ksv uld`), dann muss man `prim nein` wählen und damit ein Vorgehen, bei dem das System für verschiedene Laststufen berechnet, dabei aber jedes Mal mit der Anfangssteifigkeit des unbelasteten Zustands begonnen wird.

Das genaue Vorgehen im Programm AQB ist in Katz (1997) beschrieben.

Über `steu inte` im Programm AQB lässt sich die Interaktion der Spannungen bei Verwendung der genauen Berechnung mit `dehn ksv uld` steuern:

`steu inte 0` – keine Berücksichtigung

`steu inte 1` – isotrope Reduzierung

Mit dieser Einstellung werden die Normal- und die Schubspannungen im gleichen Verhältnis so reduziert, dass die von-Mises-Vergleichsspannung gerade die Fließgrenze erreicht.

`steu inte 2` – Prandtl-Lösung (Voreinstellung)

Die Fließregel nach Prandtl ist die genaueste Lösung und voreingestellt. Sie ist in Zienkiewicz und Taylor (1991) dargestellt.

`steu inte 3` – Vorrang Schub

Diese Einstellung entspricht dem im Abschn. 2.1.4 gezeigten Vorgehen. Die Schubspannung wird in voller Größe aufgenommen und reduziert damit die aufnehmbare Normalspannung.

---

## 2.2 Grenztragfähigkeit des Systems

In diesem Abschnitt wird die Grenztragfähigkeit des Systems untersucht. Sie übersteigt nur dann die des Querschnitts, wenn das System statisch unbestimmt ist.

Für die Bestimmung der Grenztragfähigkeit stehen im Wesentlichen zwei Verfahren zur Verfügung.

Vor allem in der Handberechnung kommt die Fließgelenktheorie zum Einsatz. Jedes Mal, wenn an einer Stelle die Grenze der Tragfähigkeit für den Querschnitt erreicht wird, bildet sich dort ein plastisches Gelenk und der Grad der statischen Unbestimmtheit reduziert sich um eins. Im letzten Schritt bleibt nurmehr ein statisch bestimmtes System übrig. Wird in diesem an einer Stelle die Grenze der Querschnittstragfähigkeit erreicht, ist damit auch die Traglast des Systems ermittelt. Das Fließgelenkverfahren ist zwar in der Handrechnung einfach, aber im allgemeinen Fall relativ aufwändig in der Modellierung mit

Finiten Elementen. Zudem ist es nicht allgemein anwendbar und überschätzt die Traglast des Systems. In der Computerstatik findet es in einer vereinfachten Form Anwendung zur schnellen Abschätzung einer oberen Grenze für die Traglast.

Das für die computergestützte Berechnung besser geeignete Verfahren ist die Fließzonentheorie. Hier wird berücksichtigt, dass nicht nur ein einziger Querschnitt ins Fließen gerät, sondern dass sich längs der Trägerachse sogenannte Fließzonen ausbilden. Dieses Verfahren ist für die Handberechnung vollkommen ungeeignet und setzt ein Finite-Element-Programm voraus, das nichtlineare Materialgesetze verarbeiten kann.

Bevor im nächsten Kapitel gezeigt wird, wie die Grenztragfähigkeit des Systems mit einem Finite-Element-Programm ermittelt werden kann, soll zunächst das schrittweise Vorgehen mit Systemwechsel dargestellt werden, dass auch mit einfachen, nur linear arbeitenden Programmen umsetzbar ist. Anschließend werden die Traglastsätze erklärt, die eine schnelle Abschätzung der Grenzlast erlauben. Schließlich wird die Größe der Fließzone für zwei Belastungsfälle untersucht.

### 2.2.1 Schrittweise elastische Berechnung der Traglast mit der Fließgelenktheorie

Der anschaulichste Weg, die plastische Traglast eines statischen Systems zu ermitteln, ist das schrittweise Aufbringen der Belastung. In jedem Schritt wird an dem zum Belastungszinkrement gehörigen statischen System gerechnet. Am Ende müssen die Ergebnisse von Hand überlagert werden. Das folgende Beispiel soll das Vorgehen verdeutlichen.

Gegeben ist das System in Abb. 2.11. Wir wollen seine plastische Traglast ermitteln. Da das System 1-fach statisch unbestimmt ist, können gegenüber der elastischen Traglast sowohl Tragreserven des Querschnitts als auch des Systems aktiviert werden.

Für das gegebene quadratische Profil ergibt sich das plastische Grenzmoment zu:

$$M_{\text{pl,gr}} = \sigma_F \frac{bh^2}{4} = 33,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{6 \text{ cm} \cdot (6 \text{ cm})^2}{4} = 18,09 \text{ kNm} \quad (2.30)$$

Dabei wurde beachtet, dass nach DIN EN 1993-1-1 (2010) bei einer Materialdicke  $40 \text{ mm} < t < 80 \text{ mm}$  als Wert für die Fließgrenze anzusetzen ist:  $\sigma_F = 33,5 \text{ kN/cm}^2$ .

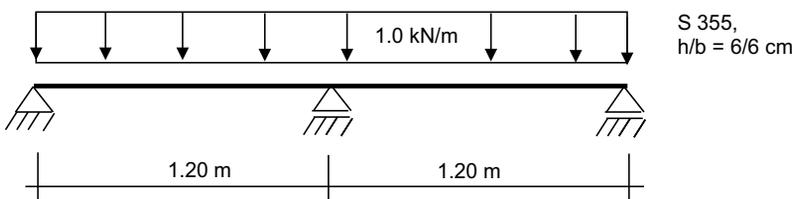


Abb. 2.11 Einführungsbeispiel

### Laststufe 1: 1-fach statisch unbestimmtes System bis zum Erreichen der plastischen Querschnittstragfähigkeit

Das System wird mit der Einheitslast  $q = 1 \text{ kN/m}$  unter Ansatz der elastischen Steifigkeiten berechnet. Abb. 2.12 zeigt den Momentenverlauf.

Das plastische Moment für den Querschnitt beträgt  $18,09 \text{ kNm}$ . Also kann die Last mit dem Lastfaktor  $\lambda_1$  erhöht werden, bis dieses Moment an der Einspannstelle erreicht wird:

$$\lambda_1 = \frac{M_{pl}}{M_{el,1}} = \frac{18,09 \text{ kNm}}{0,180 \text{ kNm}} = 100,50 \quad (2.31)$$

Die zugehörige Verformung unter der Einheitslast zeigt Abb. 2.13. Der Maximalwert ergibt sich zu:

$$\Delta v_1 = 0,0504 \text{ mm} \quad (2.32)$$

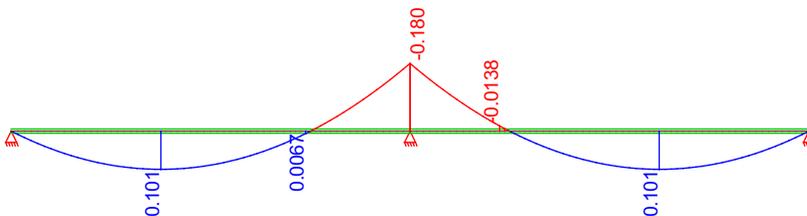
also in der gesamten ersten Laststufe zu:

$$\Delta v_1 = 0,0504 \text{ mm} \cdot 100,50 = 5,07 \text{ mm} \quad (2.33)$$

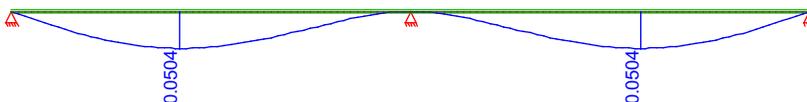
Durch das Hochskalieren der Belastung wird ein elastisches Materialverhalten bis zum Ende der ersten Laststufe unterstellt. Die Tatsache, dass ab Erreichen des elastischen Grenzmoments über der Stütze bereits Plastizierungen auftreten, das System somit weicher wird und die Verformungen größer, wird vernachlässigt.

### Laststufe 2: Fließgelenk über der Stütze

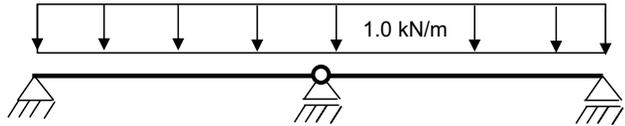
Sobald über dem mittleren Lager das Fließmoment erreicht ist, kann der Querschnitt keine weitere Momentenerhöhung mehr aufnehmen, der Querschnitt über dem Lager wirkt wie ein Momentengelenk. Für weitere Laststeigerungen verhält sich das System damit statisch bestimmt, wie in Abb. 2.14 dargestellt. Es wird wieder mit der Einheitslast und wieder mit



**Abb. 2.12** Momentenverlauf unter der Einheitslast in der Laststufe 1 [kNm]



**Abb. 2.13** Verformungen unter der Einheitslast in der 1. Laststufe [mm]

**Abb. 2.14** Statisches System der Laststufe 2

elastischem Materialverhalten gerechnet. Abb. 2.15 zeigt den zugehörigen Momentenverlauf und Abb. 2.16 das Verformungsbild.

Bis in einem Querschnitt in den Feldern das vollplastische Moment erreicht wird, darf die Last um den Faktor  $\Delta\lambda_2$  gesteigert werden:

$$\Delta\lambda_2 = \frac{M_{pl} - \lambda_1 M_{el, \text{Feld, System-1}}}{M_{el, 3, \text{System-2}}} = \frac{18,09 \text{ kNm} - 100,50 \cdot 0,101 \text{ kNm}}{0,180 \text{ kNm}} = 44,11 \quad (2.34)$$

Die Betrachtung ist nicht ganz exakt, da die beiden Momentenwerte nicht an der gleichen Stelle auftreten. Die Überlegung liegt aber auf der sicheren Seite.

Der Lastfaktor auf Traglastniveau beträgt also:

$$\lambda_T = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 100,50 + 44,11 = 144,6 \quad (2.35)$$

Und die Traglast:

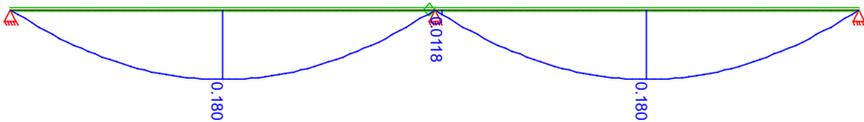
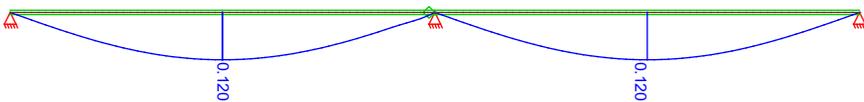
$$p_T = 144,6 \cdot 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 144,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (2.36)$$

Die zugehörige Verformung unter Einheitslast ergibt sich zu:

$$\Delta v_2 = \Delta v_3 = 0,12 \text{ mm} \quad (2.37)$$

also in der gesamten Laststufe zu:

$$\Delta v_2 = \Delta v_3 = 0,12 \text{ mm} \cdot 44,11 = 5,3 \text{ mm} \quad (2.38)$$

**Abb. 2.15** Momentenverlauf unter der Einheitslast in der Laststufe 2 [kNm]**Abb. 2.16** Verformungen unter der Einheitslast in der Laststufe 2 [mm]

Die Gesamtverformung beträgt damit:

$$v_2 = 5,1 \text{ mm} + 5,3 \text{ mm} = 10,4 \text{ mm} \quad (2.39)$$

Weiter kann die Last nicht gesteigert werden, da bereits eine Fließgelenkkette vorliegt.

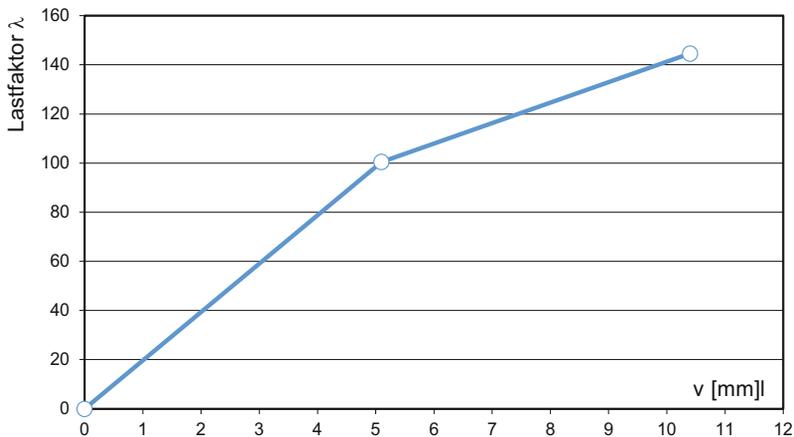
In dieser „Handberechnung“ wurden vereinfachend die Orte des maximalen Feldmomentes in der ersten und in der zweiten Laststufe gleichgesetzt. Während das Maximalmoment in der zweiten Laststufe in der Feldmitte liegt, tritt es in der ersten Laststufe bei  $x = 0,45 \text{ m}$  auf. Entscheidend ist also, dass in der zweiten Laststufe im Feld ein Fließmoment auftritt. Seine genaue Lage lässt sich nur mit höherem Aufwand oder mit einem Finite-Element-Programm ermitteln. Dabei ist aber zu bedenken, dass die Berechnung ohnehin eine größere Ungenauigkeit aufweist, da wir ein plastisches Materialverhalten nur in den Fließgelenken angesetzt haben. Das Weicherwerden der die Gelenke umgebenden Fließzonen wurde vernachlässigt.

### Last-Verformungskurve

Die Lastverformungskurve in Abb. 2.17 zeigt das Weicherwerden des Systems beim Erreichen des ersten Fließgelenkes. Bei einer rein elastischen Rechnung hätten wir beim Lastniveau 144,7 folgende Verformungen erhalten:

$$\Delta v_{el} = 0,0504 \text{ mm} \cdot 144,7 = 7,3 \text{ mm} = 0,70 v_{pl} \quad (2.40)$$

Obwohl in diesem Beispiel die Stelle mit dem größten Biegemoment auch die mit der größten Querkraft ist, wurde deren Einfluss vernachlässigt. Die folgende Überlegung zeigt, dass dies gerechtfertigt ist.



**Abb. 2.17** Lastverformungskurve für die schrittweise elastische Berechnung