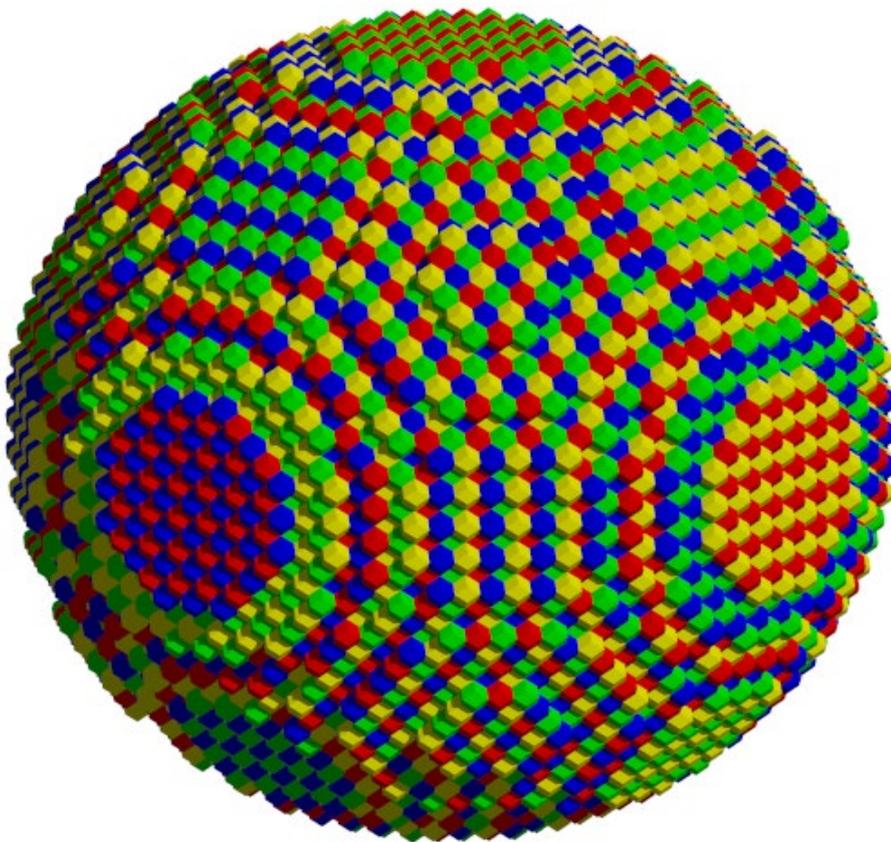


Frank Förster, Torsten Fritzlär  
& Benjamin Rott (Hrsg.)

## **PROBLEME SIND ZUM LÖSEN DA**

Eine mathematisch-didaktische Festschrift  
zur Verabschiedung in den Ruhestand  
von Prof. Dr. Frank Heinrich



WTM  
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien  
Münster

Frank Förster, Torsten Fritzar  
& Benjamin Rott (Hrsg.)

## **PROBLEME SIND ZUM LÖSEN DA**

Eine mathematisch-didaktische Festschrift  
zur Verabschiedung in den Ruhestand  
von Prof. Dr. Frank Heinrich

WTM  
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien  
Münster

## **Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar.

Titelgrafik: Hans Walser

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2023 – E-Book

Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, 48147 Münster

ISBN 978-3-95987-182-2

<https://doi.org/10.37626/GA9783959871822.0>

## Inhaltsverzeichnis

### *Geleitwort der Herausgeber*

Was ist Mathematik? Was macht mathematisches Tätigsein aus?.....v	
Prof. Dr. Frank Heinrich .....	ix
Verzeichnis der Autorinnen und Autoren .....	xiii

## I. Vorworte

### *Mathias Hattermann*

Grußwort zur Festschrift von Frank Heinrich.....	3
--	---

### *Julia Fritz*

Meine Zeit an der Uni mit Frank Heinrich.....	5
---	---

### *Werner Krause*

Ein Glücksfall.....	7
---------------------	---

## II. Wissenschaftliche Beiträge

### *András Ambrus*

Einige Grundfragen des Unterrichts mit Fokus auf mathematischem Problemlösenlernen .....	15
--	----

### *Daniela Aßmus, Frank Förster*

„Die Hälfte vom Rest und noch eine“ – Aufgabenvariationen zum Rückwärtsarbeiten .....	27
---	----

### *Besim Enes Bicak, Mathias Hattermann, Clara Hübner*

Einsatz digitaler Medien im Unterricht vor und während der Coronapandemie.....	41
--	----

### *Dirk Brockmann-Behnsen*

Large N and large T – Vergleich zweier Heuristentrainings .....	59
---	----

### *Stefan Deschauer*

Die Aufgaben zur Regula Inventionis im Rechenbuch des Johannes Widmann von Eger.....	71
--	----

<i>Dietrich Dörner</i>	
Problemlösen und Künstliche Intelligenz .....	79
<i>Michael Fothe</i>	
Beweisen anhand von Bildern – Zum 125. Geburtstag von Jean Piaget .....	99
<i>Torsten Fritzlar, Nadja Karpinski-Siebold</i>	
Sechsmal so viele Hühner wie Gänse – Erkundungen zum Umkehrfehler .....	107
<i>Thomas Gawlick</i>	
Historisches und Empirisches zu einer Aufgabe bei Heinrich .....	121
<i>Klaus Hasemann</i>	
Denkaufgaben in der Grundschule .....	141
<i>Ana Kuzle</i>	
Eine Explorationsstudie im Rahmen eines expliziten Problemlösetrainings: Der Fall der heuristischen Strategie des Rückwärtsarbeitens .....	151
<i>Denise Lenz</i>	
Einblicke in Fallanalysen zum relationalen Denken bei Kindergarten- und Grundschulkindern .....	167
<i>Matthias Müller</i>	
Visualisierung der Pentagrammafigur auf der Kugeloberfläche mittels GeoGebra 3D .....	177
<i>Hartmut Rehlich</i>	
Kurse bei Strömung – Skizze einer geometrischen und einer analytischen Modellierung .....	187
<i>Stephan Rosebrock</i>	
Gerade Anzahl .....	197
<i>Benjamin Rott</i>	
Heurismen: deskriptiv, aber nicht präskriptiv – oder warum Heurismentrainings oft wenig effektiv sind.....	211
<i>Silke Ruwisch, Cathleen Heil</i>	
Viel mehr als nur „Ansichten zuordnen“ – Aufgaben zur Perspektivübernahme im Realraum als Ansatz für bewusste Erfahrung mit konfligierenden Bezugssystemen .....	219

*Harald Schaub*

Der gute Wille allein reicht nicht aus: Denk- und Entscheidungsfehler in kritischen Situationen ..... 231

*Michael Schmitz*

Kegelschnitte falten..... 243

*Heinz Schumann*

Schnittkörper des Würfels in der Elementarbildung..... 261

*Martin Stein*

15 Jahre Mathe-Meister. Vom Testen mathematischen Basiswissens zur Kompetenzorientierung ..... 267

*Nina Sturm*

Der Einsatz von Heuristiken beim Problemlösen in der Grundschule – womit fängt man an? ..... 279

*Hans Walser*

Rhombenfiguren..... 297

*Hans-Georg Weigand*

Rettet die Kegelschnitte – Argumente für eine (digitale) Wiederbelebung eines vergessenen Themas der Geometrie..... 311

*Christian Werge*

Rechtwinklige Dreiecke aus ihrer Hypotenuse und ... konstruieren: Ein „weites Feld“, Probleme zu finden und zu lösen ..... 321



## Geleitwort der Herausgeber: Was ist Mathematik? Was macht mathematisches Tätigsein aus?

„*Problem solving is in the heart of mathematics.*“ Diese Antwort, die Halmos (1980)<sup>1</sup> einmal sinngemäß formuliert hat, könnte auch von Frank Heinrich stammen. Und viele Mathematik(didaktik)erinnen und Mathematik(didaktik)er würden sicher dieser Aussage zustimmen, auch wenn es zugegeben auf diese schwierigen Fragen keine einheitliche Antwort gibt.

Problemlösen ist ein Thema, das sich wie ein roter Faden durch das (wissenschaftliche) Leben von Frank Heinrich zieht. Nach seinem Lehramtsstudium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena (1980-1984) mit den Fächern Mathematik und Physik und mehrjähriger Lehrtätigkeit in der Schule (1984-1987) kehrte Frank Heinrich als wissenschaftlicher Angestellter für ein Promotionsprojekt an die Universität in Jena zurück, in dem er ein methodisches Konzept zur Förderung der Fähigkeit von Sekundarstufenschülerinnen und -schülern entwickelte, eine spezifische Art mathematischer Problemstellungen – sogenannte „Komplexaufgaben“ – erfolgreich zu bearbeiten. Dessen zentrale Elemente waren – in Anlehnung an Überlegungen des Psychologen Dietrich Dörner – Taktik-, Heuristik-, Übungs- und Reflexionstraining. In einer großen empirischen Studie, an der je 14 Versuchs- und Kontrollklassen der neunten Jahrgangsstufe über ein Schuljahr hinweg beteiligt waren, konnte eine teilgruppenspezifische Wirksamkeit des Förderkonzepts nachgewiesen werden. So erfolgte 1992 unter der Betreuung von Gunter David die mathematikdidaktische Promotion an der Psychologisch-Pädagogisch-Sportwissenschaftlichen Fakultät der Universität Jena mit dem Thema *Zur Entwicklung des Könnens der Schüler im Lösen von Komplexaufgaben*.

Spätestens von dieser Phase an ließ das mathematische Problemlösen Frank Heinrich nicht mehr los. So beschäftigte er sich in seiner Zeit als promovierter Mitarbeiter an der Universität Jena insbesondere mit der Flexibilität von Schülerinnen und Schülern sowie Lehramtsstudierenden beim mathematischen Problemlösen. Unter anderem wurden im Rahmen einer sehr aufwändigen empirischen Erkundungsstudie – dem Habilitationsprojekt von Frank Heinrich – Befunde dazu vorgelegt, warum Lösungsansätze gewechselt und wie diese verändert werden. Dabei war es immer auch ein Anliegen von Frank Heinrich, empirische Ergebnisse für die Unterrichtspraxis fruchtbar zu machen und nach Möglichkeiten zu suchen, die Problemlösefähigkeiten von Schülerinnen und Schülern weiterzuentwickeln. Unter anderem entwickelte, erprobte und publizierte er entsprechende Fördermaterialien und begleitete beispielsweise besonders interessierte und leistungsstarke Schülerinnen und Schüler bei ihren mathematisch orientierten „Jugend forscht“-Arbeiten.

---

<sup>1</sup> Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524. <https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995081>

Forschungen zum mathematischen Problemlösen setzte Frank Heinrich auch in seiner Zeit als selbstständiger Fachvertreter von 2001 bis 2007 an der Universität Bamberg und seit 2007 als Professor für Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität Braunschweig fort. Insbesondere galt sein Interesse dem strategischen Verhalten beim Problemlösen, dem Umgang mit Fehlern und selbstreflektierten Aktivitäten. Viele, vor allem qualitativ orientierte Projekte und Publikationen gingen daraus hervor. Darüber hinaus begleitete Frank Heinrich zahlreiche einschlägige Dissertationen als Betreuer oder Gutachter – und dankenswerterweise tut er das immer noch.

Eine enge Verbindung von Forschung und Lehre zeigte sich nicht nur in inhaltlichen Schwerpunktsetzungen, sondern auch in der methodischen Orientierung der Lehrveranstaltungen von Frank Heinrich. Die Beliebtheit von Frank Heinrich unter den Studierenden zeigten die „endlos“ langen Wartelisten für Plätze in seinen Seminaren. Fast legendär waren seine mehrtägigen Mathecamp, zu denen er Studierende in Schullandheime oder Jugendherbergen einlud, um mit ihnen intensiv am kreativen Lösen und auch am Aufwerfen mathematischer Probleme sowie an der Weiterentwicklung eines problemorientierten Mathematikunterrichts zu arbeiten. Diese, mit Frank Heinrichs augenzwinkerndem Humor genannten, „Matthelager“ waren für viele dieser Studierenden Ausgangspunkt für eine intensive Auseinandersetzung mit Mathematik und Mathematikdidaktik, die auch in mehreren Fällen zu einer weiteren Verbundenheit mit Frank Heinrich und dem Institut in Form von Mitarbeiterstellen, Lehraufträgen oder auch gemeinsamen Publikationen führte.

Mit einem Symposium zum Problemlösen an der Technischen Universität Braunschweig im September 2013 hat er zudem einen wichtigen Beitrag zur Gründung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen geleistet.

Die Breite von Frank Heinrichs Wirken lässt sich gut an der großen Zahl von Kolleginnen und Kollegen bzw. Wegbegleiterinnen und Wegbegleitern erkennen, die zur hier vorliegenden Festschrift ein Grußwort oder einen Artikel beigesteuert haben.

Ein besonders wichtiger Inhaltsbereich für problemorientiertes Tätigsein war für Frank Heinrich die Geometrie, der in den Beiträgen von Klaus Hasemann, Silke Ruwisch gemeinsam mit Cathleen Heil und Heinz Schumann zum geometrischen Denken und Vorstellen aufgegriffen wird. Vielfältige Anregungen zur Förderung älterer Schülerinnen und Schüler in diesem Bereich lassen sich bei Matthias Müller, Hartmut Rehlich, Stephan Rosebrock, Michael Schmitz, Hans Walser, Hans-Georg Weigand und Christian Werge finden. Thomas Gawlick leuchtet detailliert den „heuristischen Raum“ einer geometrischen Problemstellung aus, die Frank Heinrich bereits in seiner Habilitationsstudie nutzte.

Die Nutzung heuristischer Elemente beim mathematischen Tätigsein und die Unterstützung von Schülerinnen und Schülern beim Erwerb entsprechender Erfahrungen und Fähigkeiten stehen im Zentrum weiterer Beiträge zur Festschrift. Daniela Aßmus berichtet gemeinsam mit Frank Förster vom Einfluss sprachlicher Variationen auf den Lösungsprozess von problemhaltigen Textaufgaben, Ana Kuzle betrachtet die heuristische Strategie Rückwärtsarbeiten, Benjamin Rott und Nina Sturm reflektieren in ihren Beiträgen etwas allgemeiner über Heurismen, ersterer darüber, warum sie so schwer zu erlernen sind, und letztere über ihre Nutzung in der Primarstufe. Schließlich berichtet Dirk Brockmann-Behnsen von einer Vergleichsuntersuchung zur Promotionsstudie von Frank Heinrich. Grundlegende Überlegungen zu einem problemorientierten Mathematikunterricht steuert András Ambrus bei.

Wichtige disziplinübergreifende Kooperationspartner waren für Frank Heinrich Psychologinnen und Psychologen: bereits für die Promotion waren die in der damaligen DDR nur sehr schwer zugänglichen Arbeiten von Dörner eine wichtige Grundlage, der sich mit einem Artikel zu Problemlösen im Zusammenhang mit künstlicher Intelligenz an dieser Festschrift beteiligt hat. Später war unter anderem Werner Krause ein wichtiger Partner bei Forschungsprojekten, wie in seinem Grußwort deutlich wird, sowie Harald Schaub, der einen Artikel zu Denk- und Entscheidungsfehlern beigesteuert hat.

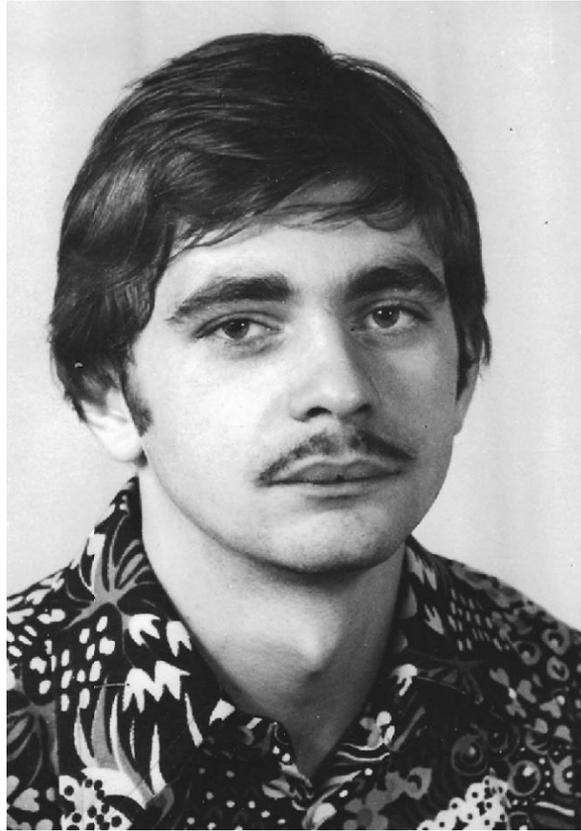
Passend zu seinen eigenen Arbeitsschwerpunkten begleitete Frank Heinrich mehrere Doktorierende zum mathematischen Problemlösen. Von diesen hat sich Julia Fritz mit einem Grußwort beteiligt. Darüber hinaus unterstützte Frank Heinrich auch Qualifizierungsprojekte zur frühen Algebra, die in den Beiträgen von Denise Lenz und Nadja Karpinski-Siebold gemeinsam mit Torsten Fritzlar aufgegriffen wird.

Schließlich haben sich an dieser Festschrift dankenswerterweise auch zahlreiche Kolleginnen und Kollegen beteiligt, mit denen Frank Heinrich teilweise über viele Jahre hinweg eng zusammengearbeitet hat. Sei es an der Technischen Universität Braunschweig (Mathias Hattermann gemeinsam mit Besim Enes Bicać und Clara Hübner), der Friedrich-Schiller-Universität Jena (Michael Fothe), bei der Herausgabe von Zeitschriften (Stefan Deschauer) oder Büchern (Martin Stein).

Wir, die Herausgeber dieses Bandes, bedanken uns bei allen Autorinnen und Autoren, auch für deren Geduld, bei Martin Stein für die Unterstützung des Verlages sowie bei Anna Schreck für die immense Arbeit und Übersicht bei der Finalisierung der Manuskripte.

Unserem lieben Kollegen und Freund Frank Heinrich wünschen wir alles Gute auf seinem weiteren Lebensweg und viel Freude beim Lesen der Artikel.

Braunschweig, Halle und Köln, im August 2023  
*Frank Förster, Torsten Fritzlar & Benjamin Rott*



1978: Bereits als Zwanzigjähriger zeigt Frank Heinrich großes Interesse an der Mathematik und an der Tätigkeit, Mathematik zu unterrichten



2013: Frank Heinrich als Tagungsleiter des mathematikdidaktischen "Symposium[s] zum Problemlösen" an der TU Braunschweig

# **Professor Dr. Frank Heinrich**

## **1. Studium**

- 1980 – 1984 Hochschulstudium an der Friedrich – Schiller – Universität Jena mit Abschluss als Diplomlehrer für die Fächer Mathematik und Physik
- Thema der Diplomarbeit (Fachgebiet Geometrie): Die sphärisch – elliptische und die hyperbolische Pentagrammafigur der Ebene und ihre Beziehungen untereinander (Prädikat „sehr gut“)

## **2. Berufstätigkeit**

- 1984 – 1987 Schulpraxis in Jena, Unterricht in Mathematik und Physik (v.a. Klassenstufen 5 – 10)
- 1987 – 1992 Wissenschaftlicher Angestellter (Mitarbeiter) an der Friedrich – Schiller – Universität Jena, Sektion Mathematik (später Fakultät für Mathematik und Informatik), Abteilung Methodik (später Didaktik); in Lehre und Forschung tätig;
- 1992: (mathematikdidaktische) Promotion an der Psychologisch-Pädagogisch-Sportwissenschaftlichen Fakultät der Universität Jena, Thema der Dissertation: Zur Entwicklung des Könnens der Schüler im Lösen von Komplexaufgaben (Prädikat „magna cum laude“), Betreuer Dr. habil. Gunter David
- 1992 – 1994 Lehrkraft in der Erwachsenenfort- und Erwachsenenweiterbildung (KTB-Bildungs-GmbH) für die Fächer Mathematik, Physik und Chemie
- 1994 – 2001 Wissenschaftlicher Mitarbeiter / wissenschaftlicher Assistent (bei Prof. Dr. B. Zimmermann), Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung für Didaktik; in Lehre und Forschung tätig, Lehre (Lehrgebiete: vornehmlich Mathematikdidaktik, dazu Didaktik der ITG/Medienkunde) für Studierende für ein Lehramt am Gymnasium und für ein Lehramt an Regelschulen, Forschung (Sachgebiet Mathematikdidaktik, Schwerpunkt: Problemlösen in der Mathematik und im Mathematikunterricht)

- 2001 – 2007                      Selbständiger Fachvertreter für Didaktik der Mathematik an der Otto – Friedrich – Universität Bamberg; Fakultät Pädagogik, Philosophie, Psychologie
- hauptsächlich Lehraufgaben im Rahmen der mathematischen und mathematikdidaktischen Ausbildung von Studierenden für ein Lehramt an Hauptschulen
- dazwischen 2003                Habilitation (als Externer) an der Friedrich – Schiller – Universität Jena, Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften
- Thema der Habilitationsschrift: Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsansätzen beim Lösen mathematischer Probleme,
- Thema des Habilitationsvortrages: Zum Wechselspiel zwischen Geometrie und Arithmetik/Algebra als ein heuristisches Leitprinzip im (bzw. von) Mathematikunterricht,
- Lehrbefähigung für das Gebiet Didaktik der Mathematik erworben
- dazwischen SoSe2005        Verwaltung einer Professur für Didaktik der Mathematik an der TU Braunschweig, dabei Lehraufgaben (Mathematik und Mathematikdidaktik) in lehramtsbezogenen Bachelor/Master - Studiengängen
- 2007 – 2021                      Universitätsprofessor W2 für Didaktik der Mathematik an der TU Braunschweig, in Forschung und Lehre tätig,
- Arbeits- und Forschungsschwerpunkte:
- Problemlösen in der Mathematik und im Mathematikunterricht (empirische Erkundungen und Analysen von mathematischen Problembearbeitungsprozessen, Analysen von Problemlöseunterricht - beides vor dem Hintergrund des besseren Verstehens und Förderns von Problemlöseverhalten)
  - Fehleranalysen und das Lernen aus Fehlern im Bereich Mathematik
  - Entwicklung und Erprobung von Lernangeboten für den obligatorischen Mathematikunterricht und zur Förderung mathematischer Begabungen (Fachlicher

Schwerpunkt sind dabei geometrische Konstellationen)

- Geometrie und ihre Didaktik
- In der Lehre: mathematikdidaktische LV im Gymnasialbereich, mathematische und mathematikdidaktische LV im GHR-Bereich

Seit WS 2021/22

Ruheständler

### **3. Sonstiges aus der aktiven Zeit von Prof. Dr. Frank Heinrich (Auswahl):**

Leiter von Schülerarbeitsgemeinschaften und fakultativen Kursen (Mathematik)

Mitarbeit an interdisziplinären Projekten zum Problemlösen (z. B. mit W. Krause (Jena) und E. Sommerfeld (Leipzig) zu Fragen des kognitiven Aufwandes und der Verfügbarkeit sowie des Wechsels der Modalitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme)

Berater der Schulbuchreihe „Lernstufen“ für den Mathematikunterricht an der Bayerischen Hauptschule

Mitherausgeber der Zeitschrift „Mathematikinformation“ (Zeitschrift zur Förderung mathematischer Begabung)

Herausgabe mehrerer Themenhefte der bekannten mathematikdidaktischen Fachzeitschrift „MU – Der Mathematikunterricht“

Diverse Berater-, Gutachter- und Publikationstätigkeiten auf dem Gebiet Didaktik der Mathematik

Organisator wiss. Veranstaltungen, z. B. von Doktorandenkolloquien zwischen den Universitäten Braunschweig, Halle/S. und Hannover; eines Symposiums „(Mathematische) Probleme lösen lernen“ an der TU BS; einer Herbsttagung des Arbeitskreis Problemlösen der GDM an der TU BS

Mehrere Rufe/Listenplätze auf Professuren für Didaktik der Mathematik

Diverse Funktionen/Aufgaben in der akademischen Selbstverwaltung (z. B. Geschäftsführender Leiter eines Instituts, Vorsitzender eines Prüfungsausschusses)



2016: Frank Heinrich in seinem „Lieblingsurlaubsland“ Österreich

## Verzeichnis der Autorinnen und Autoren

*András Ambrus*, Eötvös Lóránd Universität Budapest  
*Daniela Aßmus*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
*Besim Enes Bicak*, Theodor-Heuss-Gymnasium Wolfenbüttel  
*Dirk Brockmann-Behnsen*, Leibniz Universität Hannover  
*Stefan Deschauer*, Technische Universität Dresden  
*Dietrich Dörner*, Otto-Friedrich-Universität Bamberg  
*Frank Förster*, Technische Universität Braunschweig  
*Michael Fothe*, Friedrich-Schiller-Universität Jena  
*Julia Bartneck*, Braunschweig  
*Torsten Fritzlar*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
*Thomas Gawlick*, Leibniz Universität Hannover  
*Klaus Hasemann*, Leibniz Universität Hannover  
*Mathias Hattermann*, Technische Universität Braunschweig  
*Cathleen Heil*, Leuphana Universität Lüneburg  
*Clara Hübner*, Braunschweig  
*Nadja Karpinski-Siebold*, Schwerin  
*Werner Krause*, Friedrich-Schiller-Universität Jena  
*Ana Kuzle*, Universität Potsdam  
*Denise Lenz*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
*Matthias Müller*, Friedrich-Schiller-Universität Jena  
*Hartmut Rehlich*, Technische Universität Braunschweig  
*Stephan Rosebrock*, Pädagogische Hochschule Karlsruhe  
*Benjamin Rott*, Universität zu Köln  
*Silke Ruwisch*, Leuphana Universität Lüneburg  
*Harald Schaub*, Otto-Friedrich-Universität Bamberg  
*Michael Schmitz*, Friedrich-Schiller-Universität Jena  
*Heinz Schumann*, Pädagogische Hochschule Weingarten  
*Martin Stein*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
*Nina Sturm*, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

*Hans Walser*, Frauenfeld, Schweiz

*Hans-Georg Weigand*, Julius-Maximilians-Universität Würzburg

*Christian Werge*, Duden Institut für Lerntherapie (zuletzt Technische Universität Braunschweig)

# Grußworte



Mathias Hattermann

## **Grußwort zur Festschrift von Frank Heinrich**

Lieber Frank,

gerne übernehme ich die ehrenvolle Aufgabe, ein kleines Grußwort für Deine Festschrift zu verfassen.

Dein wissenschaftlicher Fokus in der mathematikdidaktischen Forschung war und ist sicher das Problemlösen, dem sich auch viele Beiträge in dieser Festschrift widmen. Deine Fähigkeiten als exzellenter Problemlöser hast Du auch in Deiner langjährigen Tätigkeit als geschäftsführender Leiter des Institutes für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik an der TU Braunschweig unter Beweis gestellt und sicher stetig weiterentwickelt, um diverse Aufgaben zu lösen, für die kein Standardverfahren zur Verfügung stand, sowie manche Heuristik neu erfunden, um spezielle Hürden zu meistern und besondere Herausforderungen zu bestehen. Diese Zeit war gewiss nicht immer leicht und es gab auch schwierige Phasen, in denen wenig Personal zur Verfügung stand und die Lehre trotzdem aufrechterhalten werden musste. Durch Deine Führungsstärke, Deine Beharrlichkeit sowie Deine Empathie ist es Dir durchweg gelungen, den Institutstanker auf Kurs zu halten, neue Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter zu gewinnen und eine gute Arbeitsatmosphäre zu schaffen.

Für diesen Einsatz danke ich Dir im Namen des Institutes ganz herzlich. Du hast das Institut und seine Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter durch Deine Zielstrebigkeit und das gute Miteinander geprägt, was sich unter anderem darin zeigt, dass auch nach Deinem Weggang keine Woche vergeht, in der Dein Name nicht genannt wird – auch wenn dies schon des Öfteren zu Verwechslungen mit Deinem Namensvetter Daniel Heinrich geführt hat, der dadurch bereits häufig und unverschuldete zu professoralen Ehren kam.

Wie sich an dem breit aufgestellten Autorinnen- und Autorenkreis Deiner Festschrift zeigt, wirst Du auch nach Deiner „Emeritierung“ nicht nur an unserem Institut, sondern auch in der wissenschaftlichen Kommunität sehr geschätzt und geachtet. Deine Arbeiten insbesondere zum Problemlösen haben den wissenschaftlichen Diskurs bereichert und manch neue Ideen eingebracht, die wiederum andere zum Weiterarbeiten inspirierten und das aktuell noch tun. Deine Gedanken und Ideen werden weiterhin helfen, die entsprechenden Kompetenzen unserer Schülerinnen und Schüler zu fördern und sie zum flexiblen und kreativen Gebrauch ihres Verstandes zu bemächtigen, was ihnen wiederum helfen wird, mehr von dieser Welt zu verstehen und sich mündig in ihr zu bewegen. Für Deine wissenschaftlichen Beiträge zur Mathematikdidaktik und Deine praxisorientierten Arbeiten danke ich Dir herzlich im Namen der wissenschaftlichen Kommunität und der Lernenden in Schule und Hochschule.

Sowohl im Sinne der Problemlöserinnen und Problemlöser der GDM als auch im Sinne unseres Institutes hoffe ich auf Dein weiteres Engagement in Lehre und Forschung und wünsche Dir ganz viel Freude beim Lesen und Stöbern in dieser doch sehr umfangreichen und thematisch breit angelegten Festschrift.

Dein

Mathias Hattermann

Julia Fritz

## **Meine Zeit an der Uni mit Frank Heinrich**

Während meines Lehramtsstudiums an der Technischen Universität Braunschweig hatte ich das Glück, von Prof. Dr. Frank Heinrich im Rahmen verschiedener Lehrveranstaltungen ausgebildet zu werden. In diesen Lehrveranstaltungen konnte er meine Begeisterung für die Geometrie sowie für das mathematische Problemlösen wecken.

Vor allem ist mir hierbei das sogenannte „Mathelager“ in Erinnerung geblieben, welches in Zusammenarbeit mit seinem damaligen Doktoranden Steffen Juszkowiak in Form einer mehrtägigen Harzreise mit einigen Studierenden von Frank Heinrich ins Leben gerufen wurde und sich Jahr für Jahr großer Beliebtheit unter uns Studierenden erfreute. Das Mathelager sollte uns das sogenannte „Problemfeldkonzept“ näherbringen und unsere Kreativität durch die Arbeit mit NIM-Spielen und magischen Quadraten anregen und fördern – diese Lehrveranstaltung ist nicht nur mir bis heute positiv im Gedächtnis geblieben!

Im Laufe meines Studiums habe ich durch Frank Heinrich die Möglichkeit bekommen, an seinem Forschungsprojekt über Fehler beim Problemlösen mitzuwirken und im Zuge des von ihm ausgerichteten Symposiums „(Mathematische) Probleme lösen lernen“, Einblicke in die wissenschaftliche Welt zu erhalten. Durch seine Unterstützung konnte ich meine Forschungstätigkeiten über dieses Themengebiet nach meinem Studium an der Technischen Universität Braunschweig am Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik im Rahmen meiner Dissertation weiter fortsetzen. Mithilfe seiner umfangreichen Betreuung und Unterstützung während des Entstehungsprozesses dieser Arbeit konnte ich diese im Sommer 2020 erfolgreich abschließen. Ohne seine wertvollen Ratschläge und Hinweise wäre diese Doktorarbeit eine andere geworden.

An dieser Stelle möchte ich Frank Heinrich meinen großen Dank aussprechen für das Interesse, den Einsatz und die Begleitung bei Entwicklung und Fertigstellung meiner Dissertation.

Lieber Frank,

ich bin dankbar und froh, dass du mir diesen Weg in die Wissenschaft ermöglicht hast und mich bei diesem über so viele Jahre erfolgreich begleitet hast. Ich wünsche dir viel Freude für deinen neuen Lebensabschnitt und alles Liebe und Gute für deine Zukunft!

Deine

Julia Fritz



Werner Krause

## Ein Glücksfall

„Jedem Anfang wohnt ein Zauber inne, der uns beschützt und der uns hilft zu leben.“ Damit macht uns Herrmann Hesse den Abschluss eines Lebensabschnittes nicht so schwer: Es muss etwas Neues kommen, es kommt etwas Neues. Auch wenn das Neue sich vom Alten extrem unterscheidet, so besteht doch eine Abhängigkeit. Ob wir wollen oder nicht, das Neue baut auf dem Alten auf. Wie kreativ Sie den neuen Lebensabschnitt auch immer gestalten, lieber Herr Heinrich, – und ich bin überzeugt, Sie werden es tun – so sehr bleiben Sie im Alten verhaftet und werden vieles in einem neuen Licht sehen. Jedenfalls ist es mir so ergangen. Je größer die Distanz wurde, je mehr Zeit verging, umso wichtiger wurden mir die Ereignisse, die ich mit Gleichgesinnten in der beruflichen Schaffensperiode erleben durfte. Vor dem Hintergrund dieses Motivs möchte ich an zwei Ergebnisse erinnern.

Es war ein Glücksfall, dass wir uns in Jena trafen: Sie von der Mathematikdidaktik, Bärbel Schack von der Medizinischen Informatik sowie Gundula Seidel und ich von der Allgemeinen Psychologie. Denken als Ordnungsbildung und Multimodalität waren Themen, die uns bereits in der Gruppe um Friedhart Klix an der Akademie der Wissenschaften in Berlin im Rahmen des Extremgruppenvergleiches beschäftigt hatten. Mathematische Hochbegabung und EEG-Kohärenzanalyse kamen an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena hinzu. Diese Themen hatten uns auf der Suche nach einem objektiven Maß für geistige Leistungen zusammengeführt, ganz ohne Administration, geleitet vom Interesse an dieser Forschungsaufgabe. Sie entwarfen als Mathematikaufgaben geometrische Probleme (Heinrich, 1997) und wir haben gemessen, um zu zeigen, was beim Lösen von Mathematikaufgaben im Gehirn geschieht, bei mathematisch Hochbegabten versus Normalbegabten, frei von Subjektivität.

Zwei Befunde sind mir noch besonders gut in Erinnerung, die ohne Ihr hohes Engagement so nicht entstanden wären:

- Entropiereduktion: Als wir über ein Maß für Denken als Ordnungsbildung sprachen, erinnere ich mich noch sehr gut an Ihren Hinweis auf Hans Aebli, Denken: das Ordnen des Tuns. Wir hatten also eine Wellenlänge, nur auf unterschiedlichen Ebenen. Wir stützten uns auf die Physik. In der Thermodynamik wurde bereits vor mehr als 150 Jahren ein Maß für Unordnung (Entropie) eingeführt, das auf der Zuordnung eines Elementes zu seinem Ort im Raum basierte (Boltzmann). Fast 100 Jahre später fand sich dieser Gedanke der Ordnung bzw. Unordnung in der Nachrichtentechnik als Zuordnung eines Vorgängers zu seinem Nachfolger in einer Zeichenkette wieder (Shannon). Mit der von Lehmann eingeführten EEG-Zerlegung und der von

Schack eingeführten EEG-Kohärenzsegmentierung konnte nun der Denkprozess als Sequenz von Mikrozuständen dargestellt und die Ordnung einer solchen Zeichenkette quantifiziert werden. Sie hatten die Geometrieaufgaben entworfen. Gundula Seidel (Seidel, 2004) hatte die EEG-Messungen durchgeführt und aufgrund eines Vorschlages von Bärbel Schack (Schack, 1997,1998) die Entropiereduktion beim Lösen von Mathematikaufgaben berechnet. Das Ergebnis: Mathematisch Hochbegabte wiesen innerhalb der ersten 10 Sekunden beim Lösen eines Problems eine größere Entropiereduktion auf als mathematisch Normalbegabte. Die Daten: auf einer Skala von 0 bis 2,59 zeigten die Hochbegabten eine Entropiereduktion von 1,21, die Normalbegabten von 0,90. **Die Differenz von 0,31 ist signifikant.** Eine hohe Entropiereduktion bedeutet einen hohen Unordnungsabbau, d. h., hohe Ordnungsbildung.

Damit war Denken als Ordnungsbildung zwar messbar, aber ein Ergebnis ist nur dann etwas wert, wenn der Befund in irgendeinem anderen Institut auf dieser Welt, also unabhängig von uns, bestätigt wird. Dies geschah: Li Zhang hat 2017 zusammen mit ihren Kollegen John Q. Gan und Haixian Wang an der Southeast University in Nanjing in China die Mikrozustandssequenzen beim Lösen mathematischer Probleme für mathematisch Hoch- und Normalbegabte innerhalb der ersten 9 Sekunden untersucht und findet eine Entropiereduktion von 0,89 für ihre Hochbegabten und eine Entropiereduktion von 0,71 für ihre Normalbegabten. **Die Differenz von 0,18 ist signifikant.** Damit ist – unabhängig von uns – bestätigt: mathematisch Hochbegabte zeichnen sich im Denkprozess beim Lösen mathematischer Probleme innerhalb der ersten 9 bis 10 Sekunden durch eine höhere Ordnungsbildung aus. *Ordnungsbildung im Denken ist als Entropiereduktion über Mikrozustandssequenzen objektiv messbar.* Hochbegabte „ordnen“ besser als Normalbegabte (Krause & Zhang, 2018).

Dennoch bleibt ein Einwand: Li Zhang und ihre Kollegen verlangten von ihren Versuchspersonen die Lösung deduktiver Schlussprozesse (in der psychologischen Literatur als Ordnungsprobleme bezeichnet), wir dagegen die Lösung geometrischer Probleme. Die Versuchspersonen erhielten also unterschiedliche Anforderungen und es kann vermutet werden, dass damit auch unterschiedliche Lösungsprozesse ablaufen, die man möglicherweise miteinander gar nicht vergleichen darf. Oder doch? Wir müssen, um vergleichen zu können Überlegungen anstellen, welche internen Repräsentationen und welche damit verbundenen internen Lösungsprozessen bei den beiden Klassen von Problemen auftreten. Sind diese ähnlich, ist der Vergleich zulässig, andernfalls nicht. Damit zum zweiten Problem:

- interne Repräsentation: Auch konnten wir zeigen, dass unsere Hochbegabten bereits 800ms nach dem Ende des Instruktionsverstehens eine erhöhte EEG-Kohärenz rechts temporo-parietal aufwiesen, was als frühzeitige Nutzung

einer bildhaft-anschaulichen Repräsentation beim Lösen geometrischer Probleme interpretiert werden kann. Dieser Befund passte auch gut zu den Äußerungen unserer Hochbegabten, die den Lösungsprozess nicht als Formelmanipulation, sondern als Transformation von geometrischen Elementen (im Raum) schilderten, also eine Vereinfachungsstrategie frühzeitig bevorzugten. Zu fragen war nun, ob beim Lösen von Ordnungsproblemen, die Li Zhang und ihre Kollegen verwendet hatten, auch bildhaft-anschauliche Repräsentationen auftreten würden.

Seit Mitte des vergangenen Jahrhunderts ist unstrittig, dass beim Lösen *einrelationaler* Ordnungsprobleme (also deduktiver Schlussprozesse) die Lösungszeit mit wachsender Inferenzschrittanzahl abfällt und nicht ansteigt, wie die formale Logik postuliert. Dieser Widerspruch hat zu der Annahme geführt, dass die Versuchspersonen intern eine lineare Ordnung aufbauen und den Schlussprozess auf einen einfacheren Vergleichsprozess reduzieren. Diese lineare Ordnung wird als bildhaft-anschaulich interpretiert.

Zusammen mit Erdmute Sommerfeld und Rosemarie Seifert (1987) haben wir die interne Repräsentation beim Lösen *zweirelationaler* Ordnungsprobleme aus den Lösungszeiten bestimmt und konnten zeigen, dass sich die subjektive Metrik der internen Repräsentation in den meisten Fällen als euklidische Metrik im zweidimensionalen subjektiven Raum abbilden lässt. Die Antwortprozedur ist dann eine Abstandsbestimmung im subjektiven Raum und nicht eine größere Anzahl von Inferenzschritten. Diese „Raumvorstellung“ unterstreicht die Auffassung einer bildhaft-anschaulichen Repräsentation.

Damit ist nahegelegt, dass Ordnungsprobleme auch jene Eigenschaften aufweisen, die uns bei geometrischen Problemen wichtig waren: die Transformation ins Bildhaft-Anschauliche und die Vereinfachung. Die Vereinfachung hat hier die Transformation ins Bildhaft-Anschauliche zur Voraussetzung.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen von Li Zhang und ihren Kollegen und unseren Befunden ist also zulässig. Die Entropiereduktion bietet sich als Maß für geistige Leistungen an.

- Entropiereduktion und interne Repräsentation: Die Entropiereduktion wird aus Mikrozustandssequenzen bestimmt, genauer aus den Auftritts- und Übergangswahrscheinlichkeiten der Mikrozustände. Die Mikrozustände sind gleichsam die Buchstaben eines Alphabetes und die Buchstabenketten bilden den Denkprozess ab.

Die Mikrozustände sind zeitkonstante EEG-Kohärenzen benachbarter Elektroden über der Topologie des Gehirns. Relativ wenige Mikrozustände sind unterscheidbar. Die meisten Untersuchungen beschränken sich auf vier Mikrozustände, so auch Li Zhang, Mingna Cao und Bo Shi (2016a). Für die Mikrozustände ist das Problem der Codierung, also die Zuordnung von

kognitiven Operationen und Strukturen zu den Mikrozuständen bisher noch nicht gelöst. Dennoch lässt sich aus der Arbeit von Li Zhang et al. Folgendes schlussfolgern: Von den vier Mikrozuständen zeichnet sich *ein* Mikrozustand durch hohe Aktivierung rechts temporo-parietal aus. Einen analogen Befund fanden wir in unseren Untersuchungen, wenngleich nicht auf einen Mikrozustand bezogen, und haben ihn – ebenso wie Li Zhang et al. (2016) – als neuronalen Beleg für die Bevorzugung einer bildhaft–anschaulichen Repräsentation in Verbindung mit Vereinfachung interpretiert. Bemerkenswert sind die Dauer und die Auftrittshäufigkeit dieses so ausgezeichneten Mikrozustandes in der Arbeit von Li Zhang et al (2016): *Dieser Mikrozustand tritt bei Hochbegabten achtmal häufiger auf* als bei Normalbegabten, während sich die Dauern (55ms bei Normalbegabten versus 70ms bei Hochbegabten) nicht signifikant unterscheiden.

Es ist eine der vornehmsten Aufgaben im Bereich von *Lehr- und Lernprozessen* in der Mathematikdidaktik, Normalbegabte zu *Leistungen* zu führen, die sonst nur *Hochbegabten* vorbehalten sind. Vor dem Hintergrund der Befunde von Li Zhang et al. (2016a) lässt sich nun angeben, was dabei auf der neuronalen Ebene geschieht: *die Auftrittshäufigkeit so ausgezeichneter Mikrozustände wird größer.*

Unterschiedliche Auftrittshäufigkeiten gehen einher mit der Veränderung der Verteilung bedingter Wahrscheinlichkeiten, also der Veränderung von Verkettungen. Offenbar bilden sich individuelle Leistungsunterschiede auf der neuronalen Ebene eher in der unterschiedlichen Verkettung der Mikrozustände, in deren unterschiedlicher Kombination ab, als in deren Eigenschaften (z. B. Dauer). Die differentielle Sensibilität liegt stärker in der Kombinatorik von Elementen als in den Eigenschaften der Elemente selbst. Aber das kennen wir bereits – und hier schließt sich der Kreis – von der Verhaltensebene her: „In Wechselwirkung mit stationären Strukturen ermöglichen die (kombinierbaren) Operationen konstruktive (und darunter auch kreative) Denkprozesse.“ (Klix, 1992).

Ohne Ihr Engagement, Ihre Kreativität und Ihre Begeisterung für diese Fragestellung, lieber Herr Heinrich, wäre dieses Ergebnis nicht entstanden. Als wir uns vor Jahren in Jena trafen und Sie das Konzept Ihrer Habilitationsschrift vorstellten, hat wohl keiner von uns daran gedacht, dass wir mal den Leistungsunterschied auf das häufigere Auftreten von ausgezeichneten Mikrozuständen zurückführen könnten. Es war ein glücklicher Zufall.

Nun bleibt mir nun noch übrig, Ihnen – auch im Namen von Gundula Seidel – im Geist die Hand zu drücken und Ihnen und Ihrer Frau viel Kraft, Mut und Gesundheit für den neuen Lebensabschnitt zu wünschen.

Ihr Werner Krause

P. S.: Auf Daten, Abbildungen und Formeln wurde hier verzichtet. Sie finden sich in der aufgeführten Literatur.

## Literatur

- Heinrich, F. (1997). *Diskussionsmaterial zur Untersuchung der Doppelrepräsentationshypothese und einige Bemerkungen aus mathematikdidaktischer Sicht.* (unveröffentlicht)
- Klix, F. (1992). *Die Natur des Verstandes.* Hogrefe.
- Krause, W. (2017a). Entropiereduktion im Denken. *Leibniz Online*, 25, 1-16. Aufgerufen am 24.03.2021 unter <https://leibnizsozietat.de/wp-content/uploads/2017/01/WKrause-1.pdf>
- Krause, W. (2017b). Processing of Information in Microstates. *Leibniz-Online*, 25, 1–26. Aufgerufen am 24.03.2021 unter <https://leibnizsozietat.de/wp-content/uploads/2017/01/WKrause-2.pdf>
- Krause, W. (2000). *Denken und Gedächtnis aus naturwissenschaftlicher Sicht.* Hogrefe.
- Krause, W., Seidel, G. & Heinrich, F. (2003). Über das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildhafter Vorstellung beim Lösen mathematischer Probleme. *Der Mathematikunterricht*, 49(6), 50–62.
- Krause, W., Seifert, R. & Sommerfeld, E. (1987). *Ausbildung und Transformation kognitiver Strukturen im Problemlösen.* Forschungsbericht, ZKI-Informationen 2/87. Zentralinstitut für Kybernetik und Informationsprozesse, Akademie der Wissenschaften der DDR.
- Krause, W. & Zhang, Li (2018). *Entropiereduktion im Denken in China.* Wissenschaftliche Mitteilung. Klassensitzung der Klasse Naturwissenschaften der Leibnizsozietät der Wissenschaften zu Berlin, am 14. Februar 2018. Aufgerufen am 24.02.2021 unter <https://leibnizsozietat.de/wp-content/uploads/2018/02/Entropiereduktion-text-5.2.2018-mit-Li-Zhang.docx.pdf>
- Schack, B. (1997). *Adaptive Verfahren zur Spektralanalyse Instationärer Mehrdimensionaler Biologischer Signale.* Habilitationsschrift, Technische Universität Ilmenau.
- Schack, B. (1999). Dynamic Topographic Spectral Analysis of Cognitive Processes. In Ch. Uhl (Hrsg.), *Analysis of Neurophysiological Brain Functioning.* Springer.
- Seidel, G. (2004). *Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegabter: sequentielle und topologische Eigenschaften kognitiver Mikrozustände.* WVB.
- Zhang, Li., Cao, M. & Shi, B. (2016). Identifying Gifted Thinking Activities Through EEG Microstate Topology Analysis. In A. Hirose et al. (Hrsg.), *ICONIP 2016, Part I, LNCS 9947* (S. 123–130). Springer.
- Zhang, L., Gan, J. Q. & Wang, H. (2016). Neurocognitive mechanisms of mathematical giftedness: a literature review. *Applied Neuropsychology: Child*, 1–16.
- Zhang, L. (2017). Mitteilung per E-Mail am 08.08.2017.



# Wissenschaftliche Beiträge