Andreas Filler
Anselm Lambert
Marie-Christine von der Bank *Hrsg.*

Freude an Geometrie – Zum Gedenken an Hans Schupp

Vorträge auf der 36. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 12. September 2021 in Saarbrücken

Springer Spektrum

Freude an Geometrie – Zum Gedenken an Hans Schupp

Andreas Filler · Anselm Lambert ·
Marie-Christine von der Bank
(Hrsg.)

Freude an Geometrie – Zum Gedenken an Hans Schupp

Vorträge auf der 36. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 12. September 2021 in Saarbrücken

Springer Spektrum

Hrsg.
Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Berlin, Deutschland

Anselm Lambert
Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Saarbrücken, Deutschland

Marie-Christine von der Bank
Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Saarbrücken, Deutschland

ISBN 978-3-662-67393-5 ISBN 978-3-662-67394-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-67394-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Nikoo Azarm
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Editorial

Der Arbeitskreis Geometrie der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik führte vom 10. bis 12. September 2021 in Saarbrücken seine 36. Herbsttagung mit dem Tagungsthema „Freude an Geometrie - Zum Gedenken an Hans Schupp“ durch.

Hans Schupp verstarb im Mai 2021 im Alter von 86 Jahren. Neben seinen weitreichenden Beiträgen zur Stochastik, die in der Sekundarstufe I großen Einfluss auf die Curriculum-Entwicklung in Deutschland hatten, war er auch in der Geometrie substantiell breit aufgestellt und hat zahlreiche, didaktisch begründete, konstruktive Vorschläge zur Re-Geometrisierung des Mathematikunterrichts publiziert. In diesem unserem Feld aber gibt es in der schulischen Praxis leider weiterhin Defizite und großen Nachholbedarf, nicht nur bei Kurven und in der Raumgeometrie. Dies war Grund genug, um uns auf unserer Tagung mit dem Erbe von Hans Schupp und – darauf aufbauend – mit der Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts zu beschäftigen.

Einen Orientierungsrahmen für die Tagung boten die fünf Fundamentalziele für einen allgemein bildenden Mathematikunterricht, die Hans Schupp bereits 1972 formulierte:

a) das pragmatische Ziel („anwenden können“)
   α) über elementare mathematische Kulturtechniken verfügen
   β) Sachzusammenhänge mathematisieren können
   γ) zeittypische Erscheinungen mathematischer Art verstehen

b) das logisch-methodologische Ziel („denken können“)
   α) argumentieren können
   β) definieren können
   γ) beweisen können
   δ) lokal ordnen können

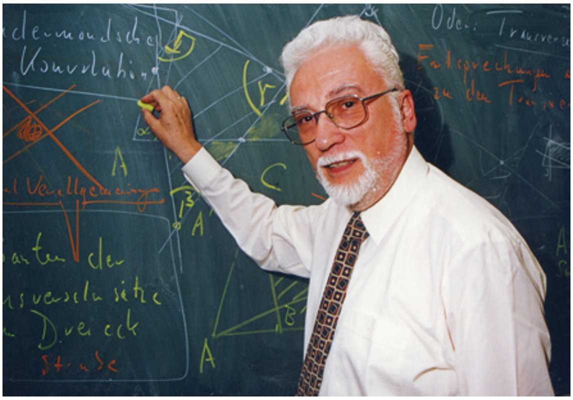
c) das heuristische Ziel („Probleme sehen und lösen können“)
d) das erzieherische Ziel (z. B. „sachliche Eigen- und Fremdkritik üben können“)
e) das ästhetisch-spielerische Ziel („sich mit nicht unmittelbar Nützlichem auseinandersetzen können“)

Hans Schupp

Den Hauptvortrag auf der Tagung hielt *Marie-Christine von der Bank* (Saarbrücken). In ihrem Beitrag „Freude ... und weitere nichtkognitive Ziele von Mathematikunterricht" plädiert sie im Sinne von Hans Schupp dafür, Bildung als personenbezogenen Prozess ernst zu nehmen, und unterstreicht die Forderung, die im Unterricht agierenden Personen – Lernende sowie Lehrende – als zentral anzusehen. Schupps didaktisches Dreieck Mensch – Welt – Mathematik um die Dimension des achtsamen Unterrichts erweiternd, stellt der Beitrag ein strukturiertes und strukturierendes Tetraedermodell vor, das die wechselseitigen Beziehungen zwischen Person, Welt, Mathe und Achtsamem Unterricht visualisiert und somit für weitere Forschungsfragen zugänglich macht. Den Fokus auf die wechselseitigen Einflüsse der Person und der anderen Komponenten des Tetraeders legend, wird anhand der Theorie der Fundamentalen Ideen und konkreter Praxisbeispiele gezeigt, welche nichtkognitiven Aspekte der Mathematiktreibenden im Unterricht eine Rolle spielen und wie diese gezielt angesprochen werden können. Mit Rückgriff auf Emotionsforschung und Pädagogische Psychologie können die in der Mathematikdidaktik vorhandenen Theorieansätze zur Entwicklung des Konzepts Math-e-motion genutzt werden. Durch die explizite Berücksichtigung des emotionalen Erlebens der Lernenden, aber auch der Lehrenden ergibt sich somit ein lehr- und lernpersonenzentrierter Unterricht.

In vielfältiger Weise knüpft *Wilfried Herget* in seinem Beitrag *„Wie viel Phantasie passt in einen Heißluftballon? – Anregungen, den Mathematikunterricht etwas anders weiterzudenken"* an Hans Schupp an, u. a. an seine Aussage „Lieber eine hübsche Denksport-, eine interessante historische, eine offensichtlich eingekleidete Aufgabe als eine ernst gemeinte Scheinanwendung" sowie an seine Arbeiten zur Variation von Aufgaben. Herget wirbt dafür, (raum-)geometriehaltige Anlässe zu nutzen, weil sich diese zum einen sehr für das mathematische Modellieren im Matheunterricht sowie zum anderen für formelarmes Argumentieren eignen. Er plädiert – wie auch von der Bank – für einen „Achtsamen Mathematikunterricht", der nicht nur lehrreich ist, sondern auch diskursiv, nützlich und nicht zuletzt unterhaltsam. Der Beitrag enthält viele Beispiele, die für Lernende spielerisch-attraktiv und anschaulich-vorstellbar sind, einfach genug für ein möglichst selbstständiges Erarbeiten von Lösungswegen (auch im Team) und doch hinreichend reichhaltig für eine Vielfalt an Lösungswegen.

Der Beitrag von *Lothar Profke* zum Thema *„Geometrie im Alltag"* fasst insbesondere das oben genannte „pragmatische Ziel" der von Hans Schupp formulierten Fundamentalziele ins Auge, wobei aber auch das „ästhetisch-spielerische Ziel" und in diesem Zusammenhang die Motivation angesprochen werden. Es wird eine Reihe von Beispielen aufgezeigt, die sowohl Geometrisches enthalten als auch im Alltag vorkommen können und in Lehrveranstaltungen mehrmals eingesetzt waren. Dabei zeigen sich auch verblüffende, nicht sofort zu durchschauende, doch aufzuklärende Einzelheiten. Der Beitrag ist durchwoben mit Vorschlägen zum methodischen Vorgehen sowie zum Anwenden von Mathematik und für praktizierende Lehrerinnen und Lehrer gedacht.



Vorlesung von Hans Schupp

Intensiv hat sich Hans Schupp aus fachlicher und didaktischer Sicht mit der Lehre von den Kegelschnitten beschäftigt, sein Buch *Kegelschnitte* (1988 erschienen) wird nach wie vor gern herangezogen. Insofern ist es nicht verwunderlich, dass sich zwei Beiträge in diesem Band unter sehr unterschiedlichen Gesichtspunkten mit Kegelschnitten befassen:

Ysette Weiss betrachtet in ihrem Beitrag *„Kegelschnitte – eine schöne Tradition"* die Thematik aus kulturhistorischer Perspektive und geht der Frage nach, welche Kriterien mathematische Inhalte erfüllen müssen, die im Hauptfach Mathematik an Gymnasien unterrichtet werden. Sie beschreibt vier Denkkollektive: das Denkkollektiv der Mathematikerinnen und Mathematiker, das der Mathematikhistorikerinnen und -historiker, das der Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker sowie das der „Schulfrauen und -männer" und zeigt, dass der Gegenstandsbereich Kegelschnitte Bedeutsamkeit für jedes dieser vier Denkkollektive besitzt.

Hans-Jürgen Elschenbroich unterscheidet in seinem Beitrag *„Kegelschnitte mit GeoGebra 3D – genetisch, ganzheitlich, dynamisch, anschaulich"* zwischen der stereometrischen Sicht, der planimetrischen Sicht und der analytischen Sicht auf Kegelschnitte und zeigt auf, wie man mit dem Werkzeug GeoGebra diese Sichtweisen in einem genetischen Zugang verbindet und dabei mit dynamischer Visualisierung und systematischer Variation jeweils eine ganzheitliche Sicht aller Kegelschnitt-Typen ermöglicht. Dabei geht es um den Schnitt infiniter Doppelkegel mit Ebenen, um wahre Größe, Dandelin-Kugeln, Brennpunkte und Leitgeraden, um Abstandseigenschaften, Ortslinien, implizite Gleichungen, parametrische Kurven und numerische Exzentrizität.

Die Nutzung digitaler Medien – ein Gebiet, auf dem Hans Schupp ein Pionier war – steht auch im Mittelpunkt weiterer Beiträge dieses Bandes.

Frederik Dilling und Julian Sommer diskutieren für den Mathematikunterricht in dem Beitrag *„Die App Mathe-AR – Raumgeometrie mit Augmented Reality aktiv erleben"* Potenziale und Herausforderungen der Augmented-Reality-Technologie (AR-Technologie), die die virtuelle Erweiterung der Realität beispielsweise über die Kamera und den Bildschirm eines Smartphones ermöglicht. Hierzu wird zunächst ein Überblick über die technischen Grundlagen und erste Forschungsergebnisse aus dem Bildungsbereich gegeben. Anschließend erfolgt die Vorstellung einer von den Autoren für den Mathematikunterricht entwickelten AR-Anwendung. In einem Ausblick werden weitere Entwicklungspotenziale erörtert.

Dörte Haftendorn geht es in ihrem Beitrag *„NURBS – Grundlage für Animationsfilme"* vor allem um die mathematischen Grundlagen von mit Computern erzeugten Medien. Ausgehend von der (geometrischen) Konstruktion von Bézier-Splines werden die Bernsteinpolynome eingeführt, die den Einstieg in das Konzept der B-Splines bilden. Letztere können nicht nur leicht auf beliebig viele Steuerpunkte ausgedehnt, sondern durch Gewichtungen auch zu rationalen B-Splines ausgebaut werden. Dabei dürfen ihre „Knoten" (Intervallgrenzen) beliebige Abstände haben. Das Akronym NURBS sagt genau dies: Non Uniform Rational B-Splines. Am Beispiel der Trisektrix und ihrer Metamorphose zum Kreis wird gezeigt, dass auch exakte geometrische Objekte mit NURBS konzipiert werden können.

Günter Graumann beschreibt, wie *„Spielerische Erkundungen mit den Werkzeugen einer dynamischen Geometriesoftware"* dazu beitragen, bei Schülerinnen und Schülern ab dem 5./6. Schuljahr Freude und Interesse für Geometrie zu entwickeln. Hierzu gibt er Anregungen, was man an Figuren diskutieren kann, die sich mit Standardwerkzeugen einer dynamischen Geometriesoftware erzeugen lassen. An Dreiecken als Grundfigur werden mit der Mittelpunktbildung und dem Aufsetzen von regelmäßigen Vielecken Figuren erzeugt, die Anlass zu einer näheren Betrachtung bieten. Für das Aufsuchen von Spuren bestimmter Dreieckspunkte eignet sich der Zugmodus.

Variation ist ein einfaches Prinzip, durch das – insbesondere in der Geometrie – reichhaltige Mathematik entstehen kann. Hans Schupp hat mit einer Monographie erhellt, wie Variation den Unterricht befruchtet. Im Folgenden führt diese u. a. auf ungewöhnlichen Wegen zu Ellipsen.

Jörg Meyer geht in dem Beitrag *„Zur Konkurrenz der Dreieckshöhen“* von dem bekannten (auf Gauß zurückgehenden) Beweis aus, dass die Dreieckshöhen konkurrieren, d. h. sich in einem Punkt treffen, meint aber, dieser Beweis sei „wie eine Autobahn, mit der man zwar schnell am Ziel ist, aber fast nichts von der Landschaft sieht“. Er stellt Variationen vor, die die Reichhaltigkeit und den Beziehungsreichtum der Thematik „besondere Linien im Dreieck“ verdeutlichen und bis zu einer In-Ellipse führen.

Hans Walser untersucht in seinem Beitrag *„Invariante Flächensummen“* einige geometrische Sätze, insbesondere den Satz des Pythagoras, unter diesem Aspekt. Diese neue Sichtweise ermöglicht ein ganzes Feld von Verallgemeinerungen und zugehörigen Illustrationen. Er gelangt dabei unter anderem zur Sinuskurve, zu Lissajous-Kurven, Ellipsen (als speziellen Lissajous-Kurven) sowie zu den Sätzen von Apollonios und al Sijzi. Die Vielfalt der Variationen wird durch zahlreiche interessante und ästhetisch ansprechende Abbildungen illustriert.

Öffentlicher Vortrag von Hans Schupp

Hans Schupp stand aktiv für eine Re-Geometrisierung des Mathematikunterrichts, die auch eine Reduktion der Betonung des Kalküls zu Gunsten anschaulichen Verständnisses in der Analysis intendierte.

Manfred Schmelzer nimmt in seinem Beitrag *„Geometrisch argumentieren in der Analysis“* die Anregung auf, im Schulunterricht stärker mit Skalierungen zu argumentieren. Die Ableitungen und Integrale der elementaren Basisfunktionen u. a. der Sinus-, Potenz- und Exponentialfunktionen werden von ihm geometrisch hergeleitet. Die Skalierung von Funktionsgraphen überträgt sich auf deren Tangenten und Integralflächen. Dabei treten Grenzwerte, die *h*-Methode sowie Ober- und Untersummen in den Hintergrund. Alle vorgestellten Herleitungen verzichten auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Getreu dem Motto „Bilder sagen mehr als tausend Worte“ wird die Perspektive in der Analysis von der formal-algebraischen zur konstruktiv-geometrischen Ebene gedreht.

Mathematikunterricht soll allgemeinbildend sein. Für Hans Schupp bedeutete dies auch stets, alle mit ihren jeweils persönlichen Möglichkeiten in den Blick zu nehmen.

Swetlana Nordheimer geht in ihrem Beitrag *„Beweise jenseits der Stille …“* der Frage nach, wie Mathematikunterricht mithilfe von geometrischen Visualisierungen für Kinder und Jugendliche mit und ohne Hörschädigung gestaltet werden kann. Es geht darum, wie Schülerinnen und Schüler zwischen den Welten Brücken bauen können. Im Mittelpunkt steht die Frage, wie sie durch ihre eigenen Erfahrungen kleine geometrische Sätze beweisen und dabei sprachlich gefördert werden können. Als Einstieg soll im Sinne von Schupp eine gewöhnliche Aufgabe dienen, die visualisiert, variiert, gemeinsam besprochen und schließlich neu und anders bewiesen sowie mit eigenen Worten beschrieben wird.

Wir wünschen Ihnen liebe Leserin, lieber Leser Freude an Geometrie und hoffen, mit den vorliegenden Beiträgen auch etwas von unserer Freude daran weiterreichen zu können – und wir ermuntern auch selbst bei Hans Schupp weiterzulesen.

März 2023

Andreas Filler
Anselm Lambert
Marie-Christine von der Bank

Inhaltsverzeichnis

Autorenverzeichnis

Marie-Christine von der Bank Fachrichtung Mathematik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Deutschland

Frederik Dilling Didaktik der Mathematik, Fakultät IV Department Mathematik, Universität Siegen, Siegen, Deutschland

Hans-Jürgen Elschenbroich Ehemals Studienseminar Neuss, Medienberater bei der Medienberatung NRW, Neuss, Deutschland

Günter Graumann Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Dörte Haftendorn Haftendorn, Lüneburg, Deutschland

Wilfried Herget Institut für Mathematik, Martin-Luther-Universität, Halle (Saale), Deutschland

Jörg Meyer Studienseminar Hameln, Hameln, Deutschland

Swetlana Nordheimer Mathematisches Institut, Universität Bonn, Bonn, Deutschland

Lothar Profke Institut für Didaktik der Mathematik, Justus-Liebig-Universität Gießen, Gießen, Deutschland

Manfred Schmelzer Regensburg, Deutschland

Julian Sommer Didaktik der Mathematik, Fakultät IV Department Mathematik, Universität Siegen, Siegen, Deutschland

Hans Walser Frauenfeld, Schweiz

Ysette Weiss Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Mainz, Deutschland

Freude … und weitere nichtkognitive Ziele von Mathematikunterricht

1

Marie-Christine von der Bank

Zusammenfassung

Mathematik und Mathematiktreiben bestehen nicht nur aus kognitiven Aspekten! Dies wurde schon vielfach von großen Mathematikern betont. Im Beitrag wird daher dafür plädiert, nichtkognitiven Aspekten im Mathematikunterricht explizit Raum zu geben. Auch dies ist nicht neu: Schon bei Hans Schupp finden wir Bildung als personenbezogenen Prozess und damit die Forderung, die Person des Lernenden im Unterricht als zentral anzusehen. Ausgehend von Schupps didaktischem Dreieck *Mensch – Welt – Mathematik* stellt der Beitrag ein strukturiertes und strukturierendes Tetraedermodell vor, das die wechselseitigen Beziehungen zwischen Person, Welt, Mathe und Achtsamem Unterricht visualisiert und so für weitere Forschungsfragen zugänglich macht. Den Fokus auf die Einflüsse der Person auf die anderen Komponenten des Tetraeders legend, wird anhand der Theorie Fundamentaler Ideen gezeigt, welche nichtkognitiven Aspekte der Mathematiktreibenden im Unterricht eine Rolle spielen und wie diese gezielt angesprochen werden können. Dies geschieht anhand konkreter Praxisbeispiele aus meinem Geometrieunterricht, die ich im Sinne des „Cognitive Apprenticeship" vorstelle. Ausgehend von Reflexionen meiner Lernenden wird deren emotionales Erleben beim Mathematiktreiben deutlich. Mit Rückgriff auf Emotionsforschung und Pädagogische Psychologie können die in der Mathematikdidaktik vorhandenen Theorieansätze zur Entwicklung des Konzepts *Math-e-motion* genutzt werden. Ein wichtiger Gelingensfaktor für positives emotionales Erleben der Lernenden ist dabei die Lehrperson. Ihre Einstellungen und Sichtweisen zu Mathematik

M.-C. von der Bank (✉)
Fachrichtung Mathematik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Deutschland
E-Mail: m.vonderbank@schule.saarland

A. Filler et al. (Hrsg.), *Freude an Geometrie – Zum Gedenken an Hans Schupp*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-67394-2_1

und Unterricht und natürlich auch ihr emotionales Erleben gilt es ebenfalls in der didaktischen Forschung zu berücksichtigen: Es geht um einen *lehr- und lernpersonenzentrierten Unterricht.*

1.1 Einstimmung

Freude, Begeisterung, Neugier, Interesse, Intuition, Kreativität, Beharrlichkeit – sie sind wesentlich für das Mathematiktreiben, sie betreffen das Wesen der Mathematiktreibenden. In der Schule, in der sich das Fach Mathe stets durch seinen Beitrag zu einer Allgemeinbildung der Lernenden beweisen muss, heißt dies, Bildung als personenbezogenen Prozess anzuerkennen und die im Unterricht agierenden Personen ernst zu nehmen, mit all ihren individuellen und kollektiv geteilten Einstellungen zur Sache Mathematik, zum Mathematiktreiben und zum Lernen.

Neben inhaltlichem und heuristischem Wissen sollten wir Lehrende eben auch nichtkognitive Aspekte (wie Sichtweisen, Einstellungen, Haltungen) an die uns anvertrauten Lernenden weitergeben wollen. Für die Beschäftigung mit Mathematik sind dies mindestens die sieben eingangs genannten Aspekte, die von großen Mathematikern herausgestellt wurden und die wir alle bei der eigenen Beschäftigung mit Mathematik schon einmal erlebt und gespürt haben.

Damit ist das Ziel klar – wie nun aber dahinkommen? Wer kann schon mittwochs in der 2. Stunde seine Klasse *in Freude* unterrichten? Aber *mit Freude* unterrichten, das können und das sollten wir! Wir haben die Chance, unsere Einstellungen zur Mathematik und zum Mathematiktreiben authentisch und empathisch vorzuleben und sie so den Lernenden zugänglich zu machen, damit sie dann in eben jenen (nach)wirken. Es bedarf dazu einer wertschätzenden Atmosphäre im Unterricht, in der inhaltliches Arbeiten in Lernumgebungen möglich ist, die zum Einlassen einladen und zum Ausleben Raum bieten.

Freude, Begeisterung und all die anderen oben genannten Aspekte sind zunächst *Emotionen,* die in uns als handelnden Personen wirken. Sie mögen von der Sache Mathematik oder der Beschäftigung mit jener hervorgerufen werden, und doch liegen sie zunächst in der Person selbst. Es ist also lohnenswert, genau jene Personen auch gezielt in den Blick der Didaktik zu nehmen. Den personenbezogenen Bildungsbegriff auf die Mathematikdidaktik übertragend, hat Hans Schupp immer wieder auf die wechselseitigen Einflüsse von *Mensch – Welt – Mathematik* hingewiesen und diese als Ecken eines didaktischen Dreiecks übersichtlich dargestellt, siehe Abb. 1.1. Dieses didaktische Dreieck wurde von Schupp stets im Kontext des Mathematikunterrichts gedacht. Das Konzept *Achtsamer Unterricht* von Katharina Wilhelm (Wilhelm & Andelfinger, 2021) als Weiterentwicklung des „sanften Mathematikunterrichts“ nach Bernhard Andelfinger bettet Schupps didaktisches Dreieck ein und schafft einen fruchtbaren Rahmen,

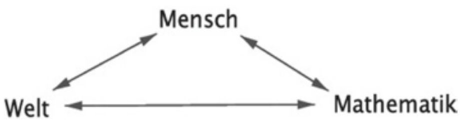


Abb. 1.1 Didaktisches Dreieck mit den drei Komponenten *Mensch – Welt – Mathematik*

in dem *Mensch, Welt* und *Mathe* im Unterricht gleichermaßen Berücksichtigung finden. Das gegenseitige Wechselspiel der nun vier Ecken kann als didaktisches Tetraedermodell visualisiert werden, das durch seine Kanten und Seiten weitere relevante Aspekte und Zusammenhänge fasst, in denen die Person der und des Mathematiktreibenden eine Rolle spielt.

Die in der Mathematikdidaktik tradierte Theorie der *Fundamentalen Ideen* berücksichtigt explizit *Persönlichkeitsideen,* die von großen Mathematikern als wesentlich für das Mathematiktreiben herausgestellt wurden – wie Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und Beharrlichkeit –, und ermöglicht, die Person der Mathematiktreibenden als zentral für diesen Prozess anzusehen (vgl. von der Bank, 2016, S. 201–220; Titz, 2021). Für den Mathematikunterricht ermöglicht diese Öffnung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen – nach seiner unterrichtspragmatischen Reduktion zu einem *Vernetzungspentagraphen* (a. a. O., S. 227 ff.) –, dass auch dort die Person der Lernenden im Sinne des Achtsamen Unterrichts ernst genommen wird. Damit ergibt sich ein personenzentrierter Unterricht als Teilprozess des Achtsamen Unterrichts, der sich durch eine besondere Wertschätzung des emotionalen Erlebens von Mathematiktreiben auszeichnet.

Wie dies konkret in den Unterricht transportiert werden kann, möchte ich hier im Sinne des „Cognitive Apprenticeship“ aus meiner praktischen Unterrichtserfahrung heraus berichten und reflektieren. Gerade Beispiele aus dem Bereich der Schulgeometrie bieten dabei ein fruchtbares Feld, nichtkognitive Aspekte bei der Analyse von Lernmaterial in den Blick zu nehmen und auf dieser Basis Lernumgebungen zu konstruieren oder anzureichern, die jene Aspekte wiederum in besonderem Maße den Lernenden erfahrbar machen.

Anhand von Rückmeldungen meiner Lernenden wird dabei deutlich, dass deren emotionales Erleben über die in den Persönlichkeitsideen meiner Theorie Fundamentaler Ideen aufgehobenen Aspekte hinausgeht. Freude, Begeisterung, Faszination, Frustration werden dort bewusst nicht gefasst, da sie auch im „Atmosphärischen des Unterrichts“ (Führer, 1997) liegen. Um nun diesen wichtigen, aber nicht leicht greifbaren Bereich des personenzentrierten Unterrichts besser beschreiben zu können, werden die Theorieansätze zu dieser Thematik von Roland Fischer und Lutz Führer mit Aspekten der Emotionsforschung und der Pädagogischen Psychologie kombiniert. Dies führt zu einer Theorie der *Math-e-motion,* wie ich es nennen will, die es in weiteren Forschungsarbeiten auszubauen gilt.

Als wesentlich für das Atmosphärische im Unterricht rücken sodann auch die Lehrpersonen in den Fokus. Ihr kognitives als auch nichtkognitives Erleben von Mathematiktreiben, ihre Einstellungen, Sichtweisen und Überzeugungen zu Lernprozessen und schließlich ihre Zugewandtheit zu ihren Lernenden spielen eine zentrale Rolle im Unterricht und übertragen sich eben auch auf jene. Die Pädagogische Psychologie stellt als Leitbild insbesondere drei lernförderliche Persönlichkeitsmerkmale von Lehrenden bereit, die empirisch gut erforscht sind: *Zuwenden, Einfühlen, Echtsein.* Diese lassen sich auch auf den Mathematikunterricht übertragen und bilden damit eine theoretische Grundlage, um so im personenzentrierten Unterricht auch die Person der Lehrenden explizit in den Blick zu nehmen.

Die Komplexität der Bereiche nichtkognitiver Ziele von Unterricht, dessen Atmosphärisches sowie das subjektiver Erleben aller Beteiligten – Lernende und Lehrende – lassen im vorliegenden Rahmen an einigen Stellen nur ein Anreißen einer theoretischen Fundierung zu. Dieser Artikel möchte daher in erster Linie durch die Bereitstellung einer Theoriesprache für die komplexen Prozesse eines personenzentrierten Unterrichts einen Beitrag zur Begriffsbestimmung und -präzisierung liefern. Dies beginnt schon beim Begriff „Person“.

1.2 Mensch – Person – Persönlichkeit

Der Begriff „Mensch“ ist sehr vielschichtig und in der Forschung nicht eindeutig definiert: Menschen werden u. a. als biologische Lebensform, als Krone der Schöpfung, als Abbild Gottes oder als vernunftfähige Wesen angesehen. Für die vorliegende Theorie Fundamentaler Ideen der Mathematik gilt es, den Menschen im Umgang mit Mathematik genauer zu beschreiben. Dazu ist insbesondere die letztgenannte Deutung fruchtbar. Für den Menschen als Wesen, das sich durch Vernunft, Freiheit und Sprache auszeichnet, ist der Begriff der Person in der psychologischen und pädagogischen Forschung etabliert (Weigand, 2004, S. 53). Der Begriff der Person zielt dabei auf kognitive, soziale und emotionale Bereiche des Menschseins ab und weniger auf biologische Mechanismen. Zugleich beinhaltet er die wechselseitige Beziehung zwischen dem Menschen als Individuum und seiner Sozietät (Dorsch, 2014, S. 1239).

Personsein wird im pädagogischen Verständnis[1] sowohl als Prinzip als auch als Prozess verstanden. Zum einen ist der Mensch von Geburt an und zu jeder Lebensphase Person. Zum andern wird der Mensch durch seine Lebensgeschichte

[1] Andere Interpretationen und Anwendungen des Personenbegriffs wie in den Rechtswissenschaften, die als Person Rechtssubjekte und damit auch wirtschaftliche Gesellschaften fassen, sind für die hier vorgestellte Theorie unbrauchbar.

zur Person. Die Verbindung vom Prinzip der Person und des Prozesshaften fasst Gabriele Weigand, dabei Winfried Böhm folgend, in der Formel, dass Person „Ausgang und durchtragender Grund“ ist (Weigand, 2004, S. 67). Da das Personwerden ein prinzipiell nicht abgeschlossener Prozess ist, der durch die Lebensgeschichte des Menschen geprägt wird, hat das Umfeld (Familie, Schule, Beruf usw.) des Menschen Einfluss darauf. Demnach gibt es Bereiche der Person, auf die auch die Beschäftigung mit Mathematik Auswirkungen hat.

Persönlichkeit wird in der psychologischen Forschung als die „Gesamtheit aller überdauernden individuellen Besonderheiten im Erleben und Verhalten“ einer Person definiert (Dorsch, 2014, S. 1244). Die Psychologie beschreibt Persönlichkeit durch verschiedene Persönlichkeitsmerkmale, die individuell ausgeprägt sind und sich in der Lebensgeschichte weiterentwickeln können.[2] Diese Merkmale werden als Dispositionen verstanden, also als Tendenzen, Situationen in bestimmter Weise zu erleben und sich in bestimmter Weise zu verhalten (Dorsch, 2004, S. 1244). Persönlichkeitsmerkmale werden typischerweise nach folgenden Bereichen gegliedert (von denen jene, die in der vorliegenden Arbeit für die vorgestellten Persönlichkeitsideen von Wichtigkeit sind, durch fette Hervorhebung gekennzeichnet sind): Temperament, Selbstregulation **(Informationsverarbeitung),** kognitive und soziale Kompetenzen, **Kreativität,** Motive und **Interesse, Bewährungsstile im Umgang mit Belastungen,** Werthaltungen, spezifische Einstellungen (z. B. Präferenzen für Parteien), individuelle Besonderheiten im Selbstkonzept.[3] Neben kognitiven Komponenten enthalten Persönlichkeitsmerkmale auch soziale und emotionale Aspekte wie soziale Kompetenzen, Werthaltungen und Temperament. Solche Aspekte werden im Weiteren *nichtkognitive* Aspekte genannt.

Für die im Folgenden vorgenommene Argumentation innerhalb der Theorie der Fundamentalen Ideen ist demnach der Begriff „Persönlichkeit“ zu wählen – und, wenn im Unterricht eben auch die Sozietät und das emotionale Erleben der Lernenden mitberücksichtigt werden, der der „Person“. Bei der Darstellung der nun folgenden Theorien, die sich mit der Person der Mathematiktreibenden beschäftigen, wird allerdings die dort jeweils verwendete Begrifflichkeit ebenfalls verwendet. Bei Schupp ist dies „Mensch“.

---

[2] Gerade diese Entwicklung und die Einflussnahme der Gesellschaft vereint die philosophische Richtung des Personalismus. Deren Anhänger und Anhängerinnen sehen die Persönlichkeit als Grundlage aller anderen Werte und ihre „Vervollkommnung“ als höchstes sittliches Ziel (Dorsch, 2014, S. 1242).

[3] Zur Beschreibung von Persönlichkeitsmerkmalen wurde nicht das „Fünf-Faktoren-Modell“ angeführt (Dorsch, 2014, S. 1245), da diese Kategorisierung zu grob für die hier im Fokus stehenden Persönlichkeitsideen ist.

1.3 Bildung – ein personenbezogener Prozess

Ziel von Schule und somit auch schulischem Matheunterricht ist Allgemeinbildung. Dies ist ein schillernder und facettenreicher großer Begriff. Der Allgemeinbildungsbegriff von Hans Schupp unterscheidet sich signifikant vom derzeit in Deutschland dominierenden und durch die Kultusminsterkonferenz (KMK) institutionell manifestierten. Denn er zielt wesentlich auf die Wirkung von Bildung im einzelnen Menschen und weniger auf eine vermeintlich messbare Wirkung für das System. So kritisiert Schupp schon 1972 die KMK-Empfehlungen für die Hauptschule, in denen es unverblümt heißt:

> ‚Unser wirtschaftliches Wachstum hängt davon ab, daß hinreichend viele, naturwissenschaftlich, mathematisch und technisch gut ausgebildete Menschen zur Verfügung stehen (sic!) (Schupp, 1972, S. 73).‘

Zurverfügungstehen darf aber eben nicht begründendes Motiv für allgemeine Bildung durch öffentliche Schulen sein, denn alle Menschen haben ein Recht auf eigene Teilhabe an einer gebildeten Gesellschaft. Zudem: Welches Wachstum und welchen Wohlstand eine Gesellschaft anstrebt, ist keine Prämisse, sondern ein Resultat von Bildungsprozessen (Lambert & von der Bank, 2021, S. 105).

Dann im Jahr 2004, kurz nach der Veröffentlichung der Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss, rät Schupp, sich stattdessen an Winters Allgemeinen Haltungen und Fähigkeiten von 1972 bzw. Grunderfahrungen von 1995 zu orientieren

> nicht in dem Sinne, daß konkrete, kurzfristige Ziele daraus abgeleitet werden könnten (das ist grundsätzlich nicht möglich), sondern daß unterrichtliche Bemühungen und Planung sich davor zu verantworten habe (Schupp, 2004, S. 5; Amalric & Dehaene, 2016).

Er favorisiert eine Definition von Bildung des Deutschen Ausschusses für das Erziehungs- und Bildungswesen von 1966, die Dimensionen von Allgemeinheit berücksichtigt, auf die Bildungsbedürftigkeit des Menschen hinweist und gleichzeitig heraushebt, dass Bildung als personenbezogener Prozess grundsätzlich (nicht de facto) unabhängig von Schule und Kenntnisstand ist, vom Bestehen von Tests ganz zu schweigen:

> Gebildet ist, wer in der ständigen Bemühung lebt, sich selber, die Gesellschaft und die Welt zu verstehen und diesem Verstehen gemäß zu handeln (Schupp, 2004, S. 8)

Hans Schupp liegt damit in der Tradition neuhumanistischer Bildung nach Wilhelm von Humboldt, die Bildung als einen Prozess sieht, dem es nicht primär um Effizienz in einem Kompetenzwettbewerb geht, sondern um die Bildung des Menschen in seiner vertiefenden und be-sinnenden Begegnung mit der Welt. Zur Bestimmung von *allgemein* in Allgemeinbildung mit den drei Bedeutungen von allgemein nach Wolfgang Klafki (Totalität der Welt, Gesamtheit der Gesellschaft,

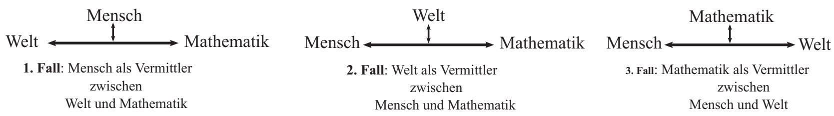


Abb. 1.2 Drei Fälle des Spannungsverhältnisses, in denen jeweils eine Komponente des didaktischen Dreiecks als Vermittler zwischen den anderen beiden auftritt

Medium des Allgemeinen) schließt Schupp explizit auch an Wolfgang Klafki an und spricht bevorzugt von allgemeiner Bildung (Lambert & von der Bank, 2021).

Die Begegnung des Menschen mit der Welt findet sich bei Schupp auch im didaktischen Dreieck *Mensch – Welt – Mathematik,*[4] das er ursprünglich nutzt, um 11 Funktionen des Spiels im Mathematikunterricht herauszustellen (siehe Abb. 1.1).

Für ihn leistet das Spiel „eine unverzichtbare Brückenfunktion im Dreieck und wehrt dem Bild der Mathematik als einer knöchernen und esoterischen Disziplin, das so viele Schüler – und nicht die schlechtesten – abstößt“ (Schupp, 1978, S. 112; Schupp, 1972). Hier nennt er u. a. die unterbrechende (Spiel als Intermezzo), darstellende, einübende, verdeutlichende, problematisierende, heuristische, analysierende, mediale, strategische, produzierende (Spiel als Kreation) und modellierende Funktion des Spiels. Er verweist damit auf wichtige Aktivitäten im Mathematikunterricht und setzt sie allesamt auch mit nichtkognitiven Aspekten von Mathematiktreiben in Verbindung.

1.4 Das Spannungsverhältnis *Mensch – Welt – Mathematik*

Dieses didaktische Dreieck bietet je nach Blickwinkel verschiedene Möglichkeiten, seine Komponenten als Spannungsverhältnisse miteinander in Beziehung zu setzen. Dabei tritt jeweils eine Komponente als (innerer) Vermittler zwischen den beiden anderen auf. Prinzipiell sind drei Fälle möglich (siehe Abb. 1.2):

[4] In der didaktischen Forschung existieren weitere didaktische Dreiecke, deren Ecken je nach inhaltlichem Schwerpunkt oder der untersuchten Fragestellung variieren. Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) nutzt beispielsweise das didaktische Dreieck *Lehrkräfte – Lernende – Lerngegenstand* (Prediger et al., 2017, S. 3). Mit Blick auf die Zielsetzung, Impulse für Forschung und Entwicklung von Fortbildungen zur gegenstandsbezogenen Professionalisierung von Lehrkräften zu liefern, findet die Ecke *Welt* dort keine explizite Berücksichtigung. So auch bei David Tall, der das didaktische Dreieck *Teacher – Pupil – Mathematics* nutzt, um die Rolle des Computers im Mathematikunterricht zu verorten (Tall, 1986, S. 5). In Rezat und Sträßer (2012) findet die Komponente *Welt* als „hidden dimension“ implizit Einzug in deren didaktisches Dreieck *Student – Mathematics – Mediating Artefacts* (a. a. O., S. 644). Den drei Forschungsansätzen ist gemeinsam, dass sie, so wie es auch hier in Abschn. 1.6 vorgestellt wird, ausgehend vom jeweils gewählten didaktischen Dreieck eine Erweiterung zu einem (oder mehreren) Tetraeder(n) vornehmen.

Die verschiedenen Blickwinkel auf das Dreieck machen ganz unterschiedliche didaktische Fragestellungen und Debatten sichtbar, die zwar alle schon häufig in der Mathematikdidaktik diskutiert wurden, selten jedoch in direktem Bezug zu diesem didaktischen Dreieck. Lediglich Schupps Betrachtungen zur palintropischen Beziehung zwischen Mensch und Welt (hier Fall 3) stellen eine Ausnahme dar (vgl. Schupp, 2004). Für jeden Blickwinkel soll hier jeweils ein zentraler Fragenkomplex genügen.

Im ersten Fall tritt der Mensch als Vermittler zwischen Welt und Mathematik auf. Dies geschieht beispielsweise, wenn er nach der Art/der Natur von mathematischen Objekten fragt oder wenn es (etwas größer) um die Frage geht: „Wie entsteht Mathematik?“ Mögliche Antworten beschreibt der Mensch im Wesentlichen durch zwei vorherrschende, allerdings konträre Theorien: Realismus und Konstruktivismus. Vertreter und Vertreterinnen des Realismus gestehen mathematischen Objekten eine von der sinnlichen Welt verschiedene Realität zu. René Descartes war Realist und verdeutlicht seine Sichtweise mit diesem bekannten Zitat:

> Wenn ich mir ein Dreieck denke, selbst wenn es vielleicht an keinem Ort der Welt außerhalb meines Denkens eine solche Figur gibt und sie je gegeben hat, so hat diese Figur dennoch eine gewisse Natur oder Form oder wohlbestimmte Essenz, die unveränderlich und ewig ist, die ich nicht erfunden habe und die in keiner Weise von meinem Verstand abhängt (zit. n. Changeux & Connes, 1992, S. 8).

Konstruktivisten und Konstruktivistinnen argumentieren dagegen, dass die mathematischen Objekte im Denken der Mathematiktreibenden geschaffen werden und an keine Welt eigener Realität gebunden sind. Spannend daran ist, dass sich nicht nur Mathematiker und Mathematikerinnen mit der Frage nach der Art der mathematischen Objekte beschäftigen. Schon 1992 diskutieren der Neurobiologe Jean-Pierre Changeux und der Mathematiker Alain Connes in „Gedanken-Materie“ die unterschiedlichen Standpunkte. Der Reiz des Buches liegt nicht nur im interdisziplinären Ansatz, sondern auch in der gewählten Dialogform, die Sichtweisen gegenüberstellt und Berührpunkte zwischen Mathematik und Neurobiologie aufzeigt (Changeux & Connes, 1992).

Für die Existenz einer mathematischen Realität unabhängig vom Menschen argumentiert Connes mit der Fähigkeit, über die mathematischen Objekte hinauszugehen. Somit erschaffen Mathematiker und Mathematikerinnen, beispielsweise mit der axiomatischen Methode, eine mathematische Realität, „die ganz ohne materielle Unterstützung“ auskommt (Changeux & Connes, 1992, S. 9). Für die konstruktivistische Sichtweise sprechen nach Changeux neuere Ergebnisse der Hirnforschung. Die mathematischen Objekte sind als mentale Objekte „weitgehend mit physikalischen Zuständen unseres Gehirns identisch“ und somit von einer materiellen Existenz abhängig. Als physikalische Zustände des Gehirns sind diese „*im Prinzip* von außen mit zerebralen Abbildungsverfahren [zu] beobachten“ (Changeux & Connes, 1992, S. 10). Im Jahr 1992 hatten die zur Verfügung stehenden Messgeräte für eine tatsächliche Beobachtung allerdings eine zu geringe Darstellung. Es gelang dann 2016 einem französischen Forscherteam, mathematisches Denken zu visualisieren. Marie Amalric und Stanislas Dehaene konnten jene Regionen im Hirn identifizieren, die bei mathematisch Professionalisierten besonders ausgeprägt sind und bei der Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen stark durchblutet werden (Amalric & Dehaene, 2016).

Die Diskussion um die Art der mathematischen Realität ist auch im Folgenden bedeutsam. Unabhängig von der Antwort auf die Frage, ob Mathematik gefunden oder gemacht wird, spielt die mathematiktreibende Person eine zentrale Rolle. Der Mensch wird zum Vermittler zwischen Welt und Mathematik, indem er das Entstehen von Mathematik in der Welt erkenntnistheoretisch, philosophisch, kognitionspsychologisch oder neurobiologisch durch Rekonstruktion oder Erschaffung deutet. Beim Prozess des Mathematiktreibens wird der Mensch von seinen persönlichen Einstellungen, Sichtweisen und Haltungen zur Sache Mathematik geleitet, und diese werden wiederum im Prozess ausgeprägt und verändert. Jene Aspekte, die Persönlichkeitsmerkmale betreffen und mit Mathematik zu tun haben, werden im Folgenden als *Persönlichkeitsideen,* als Fundamentale Ideen der Mathematik identifiziert.

Im zweiten Fall wird die Welt (gemeint ist die soziale und natürliche Welt) als Vermittler zwischen Mensch und Mathematik angesehen. Im Unterschied zum dritten Fall beschreibt der zweite Fall den konkreten Umgang des Menschen mit Mathematik, der ja nicht losgelöst von der den Menschen umgebenden Welt stattfindet. Das Erfahrungsfeld des Menschen hat Einfluss auf die Art und Weise, wie dieser sich mit Mathematik beschäftigt.

Der lerntheoretische Ansatz der Persönlichkeitsforschung geht von einer wechselseitigen Beeinflussung von Lernen und Persönlichkeitsentwicklung aus. Zum einen bildet sich die Persönlichkeit eines Menschen unter wesentlicher Beteiligung von Lernprozessen aus.[5] Zum anderen bringt der Mensch individuelle Persönlichkeitsmerkmale als Präpositionen zum Lernen mit, die wiederum das Lernen bedingen. Fasst man die Beschäftigung mit Mathematik – sei es in der Schule, im Alltag oder als berufliche Professionalisierung – als Lernprozess auf, so kann obige wechselseitige Beziehung, wie in Abb. 1.3 dargestellt, beschrieben

[5] Forschungen zu solchen Auswirkungen finden sich in der Mathematikdidaktik in einigen Facetten. So bringt eine Suche in den „Beiträgen zum Mathematikunterricht" der letzten zehn Jahre Arbeiten hervor, die sich allgemein mit dem Zusammenhang von Persönlichkeitsmerkmalen und der Art, wie mathematische Probleme gelöst werden, beschäftigen (Pundsack, 2011; Fritzlar, 2013; Berromeo Ferri, 2014). Arbeiten zu einzelnen Persönlichkeitsmerkmalen wie Kreativität (Rosebrock, 2011; Gleich, 2020), Intuition (Käpnick, 2012) beziehen sich meist auf Begabtenförderung im Mathematikunterricht oder auf den Einsatz Neuer Medien (Kortenkamp, 2015). Zu „Interesse" ergab die Suche Treffer, die sich mit unterschiedlichen Maßnahmen zur Förderung von Interesse beschäftigen (Bikner-Ahsbahs, 2014) und dazu meist auf Modellierungssituationen abstellen (Schulze Elfringhoff & Schukajlow, 2020). Die Idee „Beharrlichkeit" wird meist unter anderen Bezeichnern, beispielsweise Ausdauer, indirekt mitdiskutiert (Guljamow & Vollstedt, 2015). Auch in Bezug auf die Ausprägung negativer Persönlichkeitsmerkmale wie Coping und Stressempfinden (Berens, 2019) sowie Meidungsverhalten in Bezug auf Mathematikunterricht (Kollosche, 2018) liegen Untersuchungen vor.

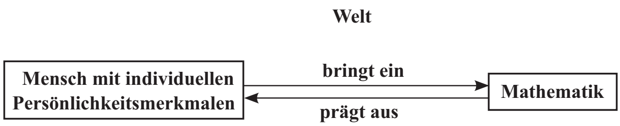


Abb. 1.3 Wechselwirkung zwischen Persönlichkeitsmerkmalen des Menschen und Mathematik

werden: Zur Beschäftigung mit Mathematik nutzt der Mensch jene Dispositionen, die ihm geeignet scheinen, und bringt sie bestmöglich ein, um beispielsweise ein Problem zu lösen; zugleich wirkt die Beschäftigung mit Mathematik wieder auf den Menschen zurück, indem die eingebrachten Dispositionen ausgeprägt und weiterentwickelt werden.

Dieses Wechselspiel von Persönlichkeit und Sache (hier Mathematik) vor dem Hintergrund der Welt findet sich auch in der Pädagogik immer wieder. John Dewey, der die philosophische Richtung des Pragmatismus nach Charles Sanders Peirce auf die Pädagogik überträgt, stellt es in den Mittelpunkt seiner Erkenntnistheorie. Dewey sieht Erkenntniserwerb in einem mehrstufigen und immer wieder durchlaufbaren Forschungsprozess an, an dessen Beginn eine fragwürdige Situation steht. Sich mit den vorliegenden Daten der Situation auseinandersetzend, entwickelt der Mensch auf Basis der ihm zur Verfügung stehenden Mittel Hypothesen/Lösungsansätze (englisch „ideas")[6], deren Richtigkeit/Anwendbarkeit an ihrer Verträglichkeit mit seiner kognitiven Gesamtstruktur sowie an der Feststellung ihres Wahrheitswerts bei ihrer praktischen Erprobung gemessen werden. In diesen Vorgang der „progressive inquiry" bringt der Mensch stets auch individuelle Sichtweisen und Einstellungen ein. Zudem spielt sich sein Denken und Handeln im gesellschaftlichen Rahmen ab:

> Neither inquiry nor the most abstractly formal set of symbols can escape from the encultural matrix in which they live, move and have their being (Dewey (LW 12), 1986, S. 28).

Wissenschaftliche Erkenntnis ist damit nie frei von individuellen oder kollektiv geteilten Werturteilen. Andersherum bedingt der gesellschaftliche Rahmen wiederum den Erkenntnisprozess. Da sich Erkenntnis im Diskurs entwickelt, muss sie sich vor einem „Common Sense" der Gesellschaft oder einer spezialisierten Teilgruppe aus dieser behaupten. Nach Jean-François Lyotard hat jede Wissenschaft, also auch Mathematik, zwingend eine Erinnerung und einen Entwurf.[7]

---

[6] Zum pragmatischen Begriffsverständnis von „idea" in Abgrenzung zum deutschen Idealismus vgl. von der Bank (2016).

[7] Lyotard argumentiert in seinem „Bericht" über „Das postmoderne Wissen", dass mit dem Übergang ins „postmoderne Zeitalter" auch das Wissen seinen „Status wechselt" (Lyotard 2009, S. 29). Ohne in der vorliegenden Arbeit auf das weite Diskussionsfeld des Begriffs „Postmoderne" eingehen zu können, sei dies bemerkt: Lyotard sieht das Wissen nun als Ware für den „Verkauf

In eben jene Erinnerung müssen sich neue Erkenntnisse argumentativ einordnen lassen, um zum Teil des Entwurfs zu werden. Das Bild eines Wissenschaftsbereichs (hier Mathematik) kann dabei ständigem Wandel unterliegen. Gerade in der Mathematik haben historische Veränderungen und gesellschaftliche sowie bildungspolitische Einflüsse auf Mathematik(-unterricht) zu einem stark veränderten Verständnis von Gebieten, Erkenntnis- und Begründungskulturen, von Systemen und der zu verwendenden Sprache geführt. Beispielsweise unterliegt es einem stets wandelbaren wissenschaftlichen Zeitgeist, bestimmte Inhalte zu Gebieten zusammenzufassen, und einem bildungspolitischen Zeitgeist, aus den Gebieten der Mathematik jene für den Mathematikunterricht auszuwählen. Auch der geforderte Grad von Strenge bei Begriffsdefinitionen oder Beweisen kann sich ändern. Beispiele für solche Entwicklungen sind die Anwendung des Formalismus, insbesondere der moderne axiomatische Aufbau der Geometrie nach David Hilbert, die Definition des Grenzwertbegriffs, der je nachdem, ob Anschaulichkeit oder formale Strenge angestrebt werden, seit der Grundlegung der Epsilontik in der Analysis sehr unterschiedlich formuliert werden kann, sowie die Zusammenfassung von unterschiedlichen Inhalten zum Gebiet der Algebra, die sich im ausgehenden 19. und beginnenden 20. Jahrhundert von einer Wissenschaft des Gleichungslösens hin zur Untersuchung von Strukturen entwickelte.

Dieser Fall des Spannungsverhältnisses macht erneut deutlich, dass (mathematische) „Theorien Sichtweisen von Menschen sind“, wie auch schon Roland Fischer und Günther Malle treffend festhalten (Fischer & Malle, 2004, S. 142). Sie haben eine Entwicklung durchlaufen und dienen bestimmten Zwecken, die inner- oder außermathematischer Natur sein können. Zudem sind in ihnen (und in den Begriffen, die eine Theorie verwenden) gewisse sozial-kommunikative Interessen codiert, die zu ihrer Entstehung beigetragen haben. Ihr Ausblenden beim Umgang mit Mathematik führt zu Kommunikationsproblemen zwischen Experten und Laien und kann dadurch Lernprozesse hemmen (Fischer & Malle, 2004, S. 146).[8]

Der dritte Fall des obigen Spannungsverhältnisses, in dem Mathematik zwischen Mensch und Welt vermittelt, bettet die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten in Bildungsdebatten ein (siehe Abb. 1.4). Mathematik kann als Medium einer palintropischen Beziehung zwischen Mensch und Welt verstanden werden. Diese Deutung von Mathematik wurde von Schupp aus philosophischen und pädagogischen Arbeiten in die mathematikdidaktische Diskussion eingebracht (Schupp, 1978, 2004).

[…] für eine Verwertung in einer neuen Produktion“ (Lyotard, 2009, S. 31). Er rückt in seiner Arbeit daher die Sprache zur Weitergabe von Wissen in den Vordergrund und unterscheidet zwei Arten von Wissen, die sich unterschiedlicher sprachlicher Spielzüge bedienen. Zum einen das „narrative Wissen“, das sich „beglaubigt […] durch […] Übermittlung, ohne auf Argumentationen und Beweisführungen zurückzugreifen“ (Lyotard, 2009, S. 78). Zum anderen die Wissenschaft, deren Aussagen sich in schon vorhandene Aussagen einordnen müssen. Als Sender einer Aussage gilt man dabei als „wissenschaftlich, wenn man verifizierbare oder falsifizierbare Aussagen über einen den Experten zugänglichen Referenten auszusprechen imstande ist“ (Lyotard, 2009, S. 74 f.). Dieser Prozess des Einordnens verlangt reflektierendes Handeln und die Fähigkeit, den mit anderen geteilten Grundkanon einer Wissenschaft zu hinterfragen (Lambert, 2003).

[8] Auf diese Problematik wird in Abschn. 1.9 in Bezug auf Mathophobie erneut eingegangen.

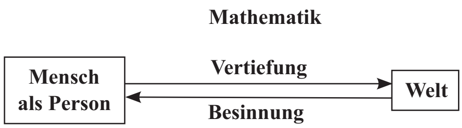


Abb. 1.4 Palintropische Beziehung zwischen Mensch und Welt. (Nach Schupp, 2004)

Ausgangspunkt und Betreiber dieser wechselseitigen Beziehung ist erneut der bildungsbedürftige und selbsttätige Mensch. Dieser steht mit der Welt

> in einem in sich zurücklaufenden, fortwährenden Einwirkverhältnis, wobei die diallel gefügten, einander ablösenden und ergänzenden Akte der Vertiefung (als Einlassen des Menschen in die Welt außerhalb) und Besinnung (als Rücknahme aus dieser Welt und distanzierender Reflexion) einen Prozess konstituieren, in dessen Verlauf Mensch und auch Welt zu sich selbst kommen (Schupp, 2004, S. 9).

Für seine pädagogische Beschreibung von Lernprozessen finden sich die von Schupp genannten Diallelen „Vertiefung" und „Besinnung" schon 1806 bei Johann Friedrich Herbart in seiner „Allgemeinen Pädagogik aus dem Zwecke der Erziehung abgeleitet" (Herbart, 1965).[9] Dort wechseln sich Vertiefung und Besinnung ebenfalls ab und sind weiterhin unterteilt in verschiedene Zustände, sodass Erkenntniserwerb in vier Phasen verläuft: Klarheit als ruhende Vertiefung, Assoziation als Aufnahme eines neuen Lerngegenstandes, System als ruhende Besinnung und Methode als fortschreitende Vertiefung. Die Herbart-Schüler Tuiskon Ziller und Wilhelm Rein unterteilten die ruhende Vertiefung in zwei Phasen und gaben den Phasen jeweils deutsche Bezeichnungen. Für den Unterricht ergibt sich somit dieser mögliche Ablauf:

- Vorbereitung: Das Vorwissen der Lernenden wird aktiviert durch Zielangabe, Einstimmung des Gedankenkreises durch die Lehrenden.
- Darbietung: Der neue Stoff wird durch Vortrag, Erzählung, Vorlesen, fragend-entwickelndes Gespräch den Lernenden zugänglich gemacht.
- Verknüpfung: Die neuen Vorstellungen werden mit den schon vorhandenen verknüpft.
- Zusammenführen: Die allgemein gewonnene Erkenntnis wird in eine Regel, ein Gesetz, einen Grundgedanken gefasst.
- Anwendung: Das Wissen wird nun in Können überführt, auf Einzelfälle angewendet und im Gebrauch des Neuen geübt.

Zwar werden dadurch wesentliche Elemente der Erkenntnisgewinnung beschrieben, die so auch heute noch einen Orientierungsrahmen für Unterricht bieten, dennoch vollzieht sich Lernen nicht als striktes Durchlaufen dieses Phasenmodells.

---

[9] Auch bei Fischer finden sich einer Argumentation des Philosophen Peter Heintel folgend das Wechselspiel von „sich einlassen" und „bei sich bleiben" (Fischer, 1984, S. 57 f.).

Schupp verweist nicht explizit auf Herbart. Dessen Rezeption und dogmatische Weiterentwicklung seines Ansatzes zum Herbartianismus lässt das Wechselspiel zwischen Vertiefung und Besinnung zu starren Unterrichtssequenzen gerinnen. Mit der Beschreibung dieses Wechselspiels als palintropisch macht Schupp es hingegen wieder dynamisch. Er verdeutlicht, dass es sich dabei um einen subjektiven Prozess handelt, der vielfach und vielfältig, mal intensiv oder mal weniger intensiv sein kann. Sieht man die Akte von Vertiefung und Besinnung als Mensch und Welt verbindende Gummibänder, so können diese mal mehr, mal weniger gespannt sein. Entscheidend ist, dass der Mensch sich als aktiv handelnde Person immer wieder auf beide Diallelen einlässt. Denn erst

> Be-sinnung schafft Sinn, Besonnenheit und Gesinnung (Herder). Sie setzt Vertiefung als Hinwendung zur Welt in möglichst vielen ihrer Erscheinungs- und Darstellungsformen voraus, weil sonst die Gefahr der Oberflächlichkeit, ja des Spintisierens besteht. […] Andererseits käme es ohne Phasen der Besinnung zur bloßen Benommenheit, ja Verlorenheit (Schupp, 2004, S. 9).

Auf die negativen Auswirkungen, die ein Ausblenden dieser beiden Phasen (Vertiefen und Besinnen) für das Lernen bedeutet, hat auch Fischer hingewiesen und die mögliche Abwehrhaltung der Lernenden auf die Mathematik mit „Mathophobie“ bezeichnet (Fischer, 1984, S. 55).

Mathematik kann zwischen den Polen Mensch und Welt vermitteln, bietet sie doch im Unterricht für beide Phasen fruchtbare Anlässe. Nach Schupp gilt es dabei, der meist vernachlässigten Phase der Besinnung mehr Raum zu geben:

> Im Gegensatz zu solcher landläufigen Praxis bietet der Mathematikunterricht viele und vielfältige Gelegenheiten zum Nach-Denken, in bezug auf erhaltene Lösungen, angewandte Methoden und Medien (insbesondere auch den Computer), begangene Fehler, Relevanz von Aufgaben und nicht zuletzt auch den stattgefundenen Unterricht schlechthin […] (Schupp, 2004, S. 10).

Dabei rückt Schupp erneut die im Unterricht agierenden Personen in den Vordergrund. Zum einen kommt es beim Ergreifen dieser Gelegenheiten auf Engagement, Kompetenz und „ein Gespür für günstige Gelegenheiten“ (Schupp, 2004, S. 10) der Lehrpersonen an, aber auch auf die Einbindung sowie aktive Beteiligung der Lernenden am Unterrichtsgeschehen und der Reflexion darüber.

Fall 3 des obigen Spannungsverhältnisses, in dem Mathematik als Vermittler in der palintropischen Beziehung zwischen Mensch und Welt auftritt, macht demnach einen Unterricht nötig, der inhaltliche und methodische Gelegenheiten zur Vertiefung und Besinnung vor dem Medium Mathematik bietet und dabei die im Unterricht agierenden Personen ernst nimmt.

1.5 Der Achtsame Unterricht

„Mathe weckt Emotionen – oft Angst vor Versagen oder gar Hass und auch Ablehnung. Zu selten werden Neugier, Freude und Faszination hervorgerufen“, konstatieren Katharina Wilhelm und Bernhard Andelfinger mit Blick auf den Matheunterricht (Wilhelm & Andelfinger, 2021, S. 2). Diesen negativen Emotionen gilt es entgegenzuwirken, sie zu lindern und im Bestfall in positive zu transformieren. Einen geeigneten Rahmen für solch ein Unterfangen bietet der Achtsame Unterricht, der von Wilhelm auf Basis des Konzepts eines „sanften Mathematikunterrichts“ nach Andelfinger entwickelt wurde (Wilhelm, 2022):

> **Achtsam** steht dabei für einen die Person *und* die Sache in besonderem Maße wertschätzenden Unterricht. Er verfolgt das Ziel, die Bereitschaft der Lernenden zu entwickeln, sich der Mathematik auch über die Grenzen der Schule zu bedienen – so auch bei Fragen, Aspekten oder Entscheidungen, die den Bereich der Nachhaltigkeit betreffen (Wilhelm, 2022, S. 3).

Wilhelm stellt mit ihrem Konzept eine Theoriesprache zur Beschreibung einer Unterrichtskultur zur Verfügung, die sich durch ein Zusammenspiel von vier Facetten auszeichnet – in Anlehnung an Ralf Dahrendorfs „öffentliche Wissenschaft“: Unterricht muss demnach Lerngelegenheiten bieten (also „lehrreich“ sein), den Lernenden ermöglichen, den „diskursiven“ Charakter von Mathematik zu erfahren, und sowohl von „nützlichen“ als auch von „unterhaltsamen“ Aspekten geprägt sein (Wilhelm, 2022, S. 3).

Ausgehend von den im Achtsamen Unterricht agierenden Personen lassen sich zwei Prozessschleifen unterscheiden (siehe Abb. 1.5).

Jeder Person wird von der sozialen Wirklichkeit eine Rolle zugewiesen. Um Wirklichkeit aktiv mitgestalten zu können – beispielsweise über das Entwickeln von Alternativen und somit der Übernahme von Verantwortung –, bedarf es im Unterricht eines sich gegenseitigen Aufklärens durch Mathe[10]. So kann sich eine Wertschätzung gegenüber der Sache einstellen. Dies kann schon im Kleinen erfahren werden, wenn Lernende sich direkt am Unterricht beteiligen können und dieser ihnen wiederum Momente ermöglicht, die Selbstwirksamkeit erfahrbar machen. Ein solches Ernstnehmen in Mathe ist Basis für Wertschätzung der Person der Schüler[11]. Diese positiven Erfahrungen im Unterricht bedingen die Bereitschaft der Lernenden, Mathe wieder aus dem Unterricht in die Wirklichkeit zu tragen und dort anzuwenden. Dieses Wechselspiel von Unterricht – Person – Wirklichkeit wird gerahmt von der Gesellschaft, die einen Mathematikunterricht

---

[10] Genau wie in Wilhelm und Andelfinger (2021) wird auch hier die Unterscheidung von „Mathe“ (Fach Mathematik in der Schule) und „Mathematik“ (Fachmathematik an der Hochschule) vorgenommen, um erneut (vgl. Andelfinger, 2014; Lambert, 2020) zu betonen, dass sich diese beiden grundlegend (wissens-)soziologisch, epistemologisch und semiotisch unterscheiden. Der institutionalisierte Mathematikunterricht wird jedoch weiter bei seinem offiziellen Namen genannt, auch wenn dort Mathe unterrichtet wird.

[11] Welche Implikationen der Achtsame Unterricht für eine Wertschätzung der Person der Lehrenden bietet, wird später andiskutiert.

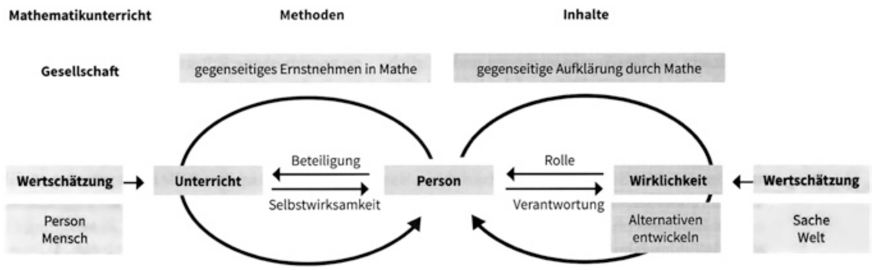


Abb. 1.5 Die Prozesse des Achtsamen Unterrichts nach Wilhelm (Wilhelm & Andelfinger, 2021, S. 3)

zur Verfügung stellt, „welcher durch ein passendes Zusammenspiel von Inhalten und Methoden einen Beitrag zu dieser Herausforderung leistet“ (Wilhelm & Andelfinger, 2021, S. 3).

Der Achtsame Unterricht von Wilhelm bietet eine wertvolle Ergänzung des in der mathematikdidaktischen Forschung tradierten Spannungsverhältnisses *Mensch – Welt – Mathematik,* indem er eine neue Dimension auftut.

1.6 Eine neue Dimension – das didaktische Tetraedermodell

Schon bei Schupp finden sich viele Hinweise, dass das von ihm vorgeschlagene didaktische Dreieck *Mensch – Welt – Mathematik* vor dem Hintergrund von Mathematikunterricht zu sehen ist. Die explizite Berücksichtigung des Achtsamen Unterrichts als erweiternde Komponente dieses didaktischen Dreiecks kann als Tetraedermodell visualisiert werden (siehe Abb. 1.6).

In dieser Sicht auf das Tetraedermodell tritt der Achtsame Unterricht aus dem Hintergrund als Träger (als „äußerer“ Vermittler) für das nach vorne gewandte didaktische Dreieck *Person – Welt – Mathe* auf. Er schafft durch seine charakteristischen Prozesse des gegenseitigen Ernstnehmens von Person und Sache sowie dem gegenseitigen Aufklären über Mathe und der damit einhergehenden Möglichkeit zur Teilhabe der Person in der Welt einen fruchtbaren Rahmen für die sich ergebenden Spannungsverhältnisse im didaktischen Dreieck.

Genau wie das didaktische Dreieck ermöglicht dieses didaktische Tetraedermodell, den Blick auf unterschiedliche didaktisch relevante Facetten zu legen. Stellt man sich das Tetraeder nun im Raum gedreht vor, wird jeweils eine andere Ecke zum Träger, der Implikationen für eine jeweils nach vorne gedrehte Seite hat (ein didaktisches Dreieck). Dadurch werden jeweils unterschiedliche Fragestellungen sichtbar, die alle für den Mathematikunterricht relevant sind und dabei unterschiedliche Schwerpunkte setzen. Folgende Fälle sind denkbar:

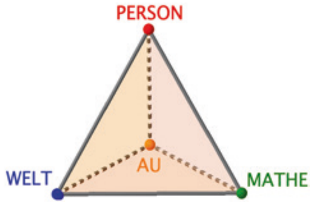


Abb. 1.6 Achtsamer Unterricht (AU) als Träger.

- **Kanten** des Tetraeders als didaktische Spannungsverhältnisse:
  - Person – Welt
  - Person – Mathe
  - Person – Achtsamer Unterricht
  - Mathe – Welt
  - Mathe – Achtsamer Unterricht
  - Welt – Achtsamer Unterricht
- **Seiten** des Tetraeders als didaktische Dreiecke
  - Person – Welt – Mathe
  - Person – Welt – Achtsamer Unterricht
  - Person – Mathe – Achtsamer Unterricht
  - Welt – Mathe – Achtsamer Unterricht
- **Ecken** des Tetraeders als Träger ihrer gegenüberliegenden Seite („äußere" Vermittlung)
  - Achtsamer Unterricht als Träger des didaktischen Dreiecks *Person – Welt – Mathe*
  - Mathe als Träger des didaktischen Dreiecks *Person – Welt – Achtsamer Unterricht*
  - Welt als Träger des didaktischen Dreiecks *Person – Mathe – Achtsamer Unterricht*
  - Person als Träger des didaktischen Dreiecks *Welt – Mathe – Achtsamer Unterricht*

1.6.1 Exemplarische Blickrichtungen auf das Tetraedermodell

Nimmt man die Ecke „Mathe" in die äußere Vermittlung (siehe Abb. 1.7) und fragt nach deren Implikationen auf das so zum Vorschein kommende didaktische Dreieck *Person – Welt – Achtsamer Unterricht,* so stellt sich die Frage, welche für Mathe typischen Inhalte, Methoden und Strategien geeignet sind, die agierenden Personen und die Welt im Achtsamen Unterricht in Beziehung zu setzen.

Einen Beitrag zur Beantwortung dieser Frage liefert Wilhelm mit der Einbeziehung von Fermi-Aufgaben, die sich mit Nachhaltigkeit beschäftigen und somit in die größere Diskussion um die zukunftsorientierte Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) einzuordnen sind. Damit Mathe zu einem Denkwerkzeug wird, das