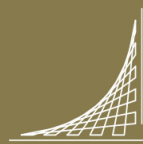


Resolución de problemas en radiocomunicaciones mediante la **CARTA DE SMITH**

Hernán Paz Penagos



ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO
EDITORIAL

 Colección de electrónica

Resolución de problemas de radiocomunicaciones mediante la **carta de Smith**

Hernán Paz Penagos

Paz Penagos, Hernán

Resolución de problemas de radiocomunicaciones mediante la **carta de Smith** / Hernán Paz Penagos.

– Bogotá: Escuela Colombiana de Ingeniería, 2023.

341 p.: il. (Colección de Electrónica)

ISBN 978-958-8726-49-6

1. CARTA DE SMITH. 2. DISEÑO DE CIRCUITOS ELECTRÓNICOS. 3. CIRCUITOS DE MICROONDAS.
4. LÍNEAS DE RADIO 5. ELECTRÓNICA - APARATOS E INSTRUMENTOS. 6. ANTENAS (ELECTRÓNICA).

CDD 621.381

***Resolución de problemas en radiocomunicaciones
mediante la carta de Smith***

Primera edición: marzo de 2023

© Hernán Paz Penagos, 2023

© Escuela Colombiana de Ingeniería

Ak 45 # 205-59

www.escuelaing.edu.co

Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería

Telefax 668 3600, ext. 397 • editor@escuelaing.edu.co

Dirección editorial

Cristina Salazar Perdomo

cristina.salazar@escuelaing.edu.co

Coordinación editorial

Jorge Cañas Sepúlveda

jorge.canas@escuelaing.edu.co

Corrección de estilo

Elkin Rivera Gómez

ISBN 978-958-8726-49-6

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio,
sin autorización escrita de la Escuela Colombiana de Ingeniería o del autor.

Contenido

Prólogo	9
Introducción	11
UNIDAD 1	
Introducción al manejo de la carta de Smith	13
1. Introducción	13
2. Objetivos	13
3. Historia	13
4. Definición de la carta de Smith	13
5. Usos	14
6. Conceptualización teórica y construcción del diagrama de impedancias	14
7. Relación entre la carta de admitancia con la carta de impedancia	21
8. Propiedades de la carta de Smith	22
9. Cuestionario	31
10. Ejercicios propuestos	32
UNIDAD 2	
Uso de diagrama de impedancias para la resolución de problemas sobre líneas de transmisión	35
1. Introducción	35
2. Objetivos	36
3. Algunos casos de uso de la carta de Smith para resolución de problemas sobre líneas de transmisión sin pérdidas	36
4. Líneas de transmisión con pérdidas	49
5. Cuestionario	72
6. Ejercicios propuestos	73
UNIDAD 3	
Uso de diagrama de impedancias para la resolución de problemas sobre acoples	79
1. Introducción	79
2. Objetivos	79
3. Definición	79
4. Técnicas de acoplamiento de banda estrecha	80
4.1 Técnicas de acoplamiento mediante sección de $\lambda/4$	80
4.2 Técnicas de acoplamiento con sintonizador (<i>stub</i>)	89
4.3 Desacoplamiento de impedancia por la variación de frecuencia	93
4.4 Técnicas de acoplamiento de banda ancha	115
4.5 Técnicas de acoplamiento mediante varios sintonizadores (<i>stub</i>)	121

4.6	Técnicas de acoplamiento mediante varias secciones de $\lambda/4$	149
5.	Cuestionario	173
6.	Ejercicios propuestos	174

UNIDAD 4

Uso de diagrama de impedancias para adaptación de impedancias con elementos reactivos localizados (<i>lumped elements</i>: elementos concentrados)		179
1.	Introducción	179
2.	Objetivos	180
3.	Configuraciones tradicionales de acoplamiento: red L, red T y red π	181
4.	Verificación del Q y rechazo de la segunda armónica	211
5.	Otras aplicaciones de la carta de Smith en el diseño de redes reactivas	216
6.	Cuestionario	224
7.	Ejercicios propuestos	225

UNIDAD 5

Diseño de simetrizadores de corrientes y transformadores de impedancias para antenas utilizando la carta de Smith		227
1.	Introducción	227
2.	Objetivos	228
3.	Simetrizadores	228
4.	Cuestionario	247
5.	Ejercicios propuestos	249

UNIDAD 6

Diseño de trampas/cargas de antenas, y acople de impedancias para líneas <i>microstrip</i>		251
1.	Introducción	251
2.	Diseño de trampas de antena	251
3.	Cargas de antenas	255
4.	Diseño de acoples de impedancias para líneas <i>microstrip</i>	250
5.	Cuestionario	272
6.	Ejercicios propuestos	273

UNIDAD 7

Determinación de la impedancia de carga en altas frecuencias mediante línea ranurada y carta de Smith		277
1.	Introducción	277
2.	Objetivos	277
3.	Línea ranurada	277
4.	Cuestionario	286
5.	Ejercicios propuestos	287

Apéndice A	289
Apéndice B	292
Apéndice C	294

Apéndice D	301
Apéndice E	306
Apéndice F	308
Apéndice G	312
Apéndice H	320
Respuestas a las preguntas y ejercicios	335
Glosario	335
Referencias	341

Prólogo

Resolución de problemas en radiocomunicaciones mediante la carta de Smith se diseñó como libro de texto modular para los cursos universitarios de electrónica de radiofrecuencia, medios de transmisión, antenas y microondas, que se imparte en uno o dos semestres en las carreras de Ingeniería Electrónica, Telecomunicaciones o Telemática. El objetivo fundamental del libro es ofrecer un tratamiento básico y actualizado de la carta de Smith como herramienta para el análisis y diseño de algunos circuitos de radiofrecuencia, aplicados a una línea de transmisión, antenas y microondas.

A lo largo de esta obra se presentan los conceptos sobre acoples de impedancia, simetrización de corrientes, diseño de trampas en antenas, etc., de forma concisa, con secuencia lógica y sentido didáctico, poniendo especial énfasis en los procesos de aprendizaje y autoaprendizaje del estudiante; así mismo, se ilustra el diseño de circuitos con ejemplos resueltos y de manera gráfica, para facilitar en el estudiante la comprensión significativa de la teoría que se explica en clase.

El libro está dirigido a estudiantes de Ingeniería Electrónica (líneas de transmisión, antenas, radiofrecuencia), Telecomunicaciones y Telemática; aunque también resulta apropiado para uno o dos cursos introductorios de posgrado en estas carreras.

Espero que este trabajo sea de satisfacción para el lector.

El autor

Introducción

La carta de Smith constituye una herramienta básica en el análisis y diseño de cualquier circuito de radiofrecuencia y microondas. El fundamento de esta carta es la transformación de impedancias y coeficientes de reflexión, haciendo uso de una representación polar en el plano de los coeficientes de reflexión. De esta manera, se obtiene una representación acotada del conjunto de todas las impedancias pasivas existentes.

El libro empieza con un capítulo introductorio sobre el manejo de la carta de Smith, y continúa con seis capítulos sobre el uso de esta herramienta para resolver problemas sobre líneas de transmisión y acoples, adaptar impedancias con elementos reactivos localizados, diseñar simetrizadores de corriente y adaptadores de impedancia para antenas, proyectar trampas/cargas de antenas, acoplar impedancias para *microstrip line* y determinar impedancia de carga en frecuencias altas con línea ranurada. Todos ellos terminan con un cuestionario de repaso de diez preguntas (selección múltiple) y ejercicios de aplicación, que condensan los temas principales de cada capítulo. Todo esto se pensó no solo para ayudar a los estudiantes a evaluar su comprensión de la teoría que se abordó en el capítulo, sino para involucrarlos en el proceso de aprendizaje y motivarlos, con el fin de que profundicen en el estudio de los temas que allí se tratan.

UNIDAD 1

Introducción al manejo de la carta de Smith

1. Introducción

La carta de Smith es una herramienta creada para la lectura y determinación de parámetros de las líneas de transmisión, dependiendo de su impedancia y reactancia, para facilitar el diseño de acoples, la adaptación de la impedancia, así como la optimización del ruido, de la estabilidad y otros. En este capítulo se explicarán tanto la construcción del diagrama de impedancias como su uso y manejo para hallar parámetros de diseño de acoples; así mismo, se buscará ayudar al lector a apropiarse del tema mediante ejemplos paso a paso y unos ejercicios propuestos para su solución.

2. Objetivos

- Entender y asimilar la definición de la carta de Smith como herramienta necesaria para diseño de acoples.
- Aprender el funcionamiento de la carta de Smith, los parámetros que la definen y cómo utilizarla.

3. Historia

Ingeniero eléctrico de la Universidad Tufts, Philip Hagar Smith (1905-1987) desarrolló el método gráfico que lleva su nombre mientras trabajaba en Laboratorios Bell.

En un esfuerzo por simplificar el proceso para hallar la solución del problema de la línea de transmisión, Smith utilizó la ecuación de Fleming en el desarrollo de su primera solución gráfica, en la forma de un diagrama rectangular. Este método gráfico fue una alternativa para representar las relaciones matemáticas que se podían obtener con una regla de cálculo.

4. Definición de la carta de Smith

Es una representación gráfica directa del coeficiente de reflexión en el plano complejo. Contiene círculos de resistencia constante, círculos de reactancia constante, círculos de relación de onda estacionaria constante y curvas radiales que representan los lugares geométricos de desfase en una línea de transmisión. Además, es una herramienta útil para hacer cálculos con implicación de impedancias complejas, pues no solo evita las tediosas manipulaciones con números complejos

sino que permite el diseño de circuitos acopladores de impedancia con mayor facilidad.

La carta de Smith se dibuja en el plano del coeficiente de reflexión de voltaje o plano Γ , es decir, sobre las coordenadas polares lineales de $\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{j\theta}$, donde Γ es un coeficiente de reflexión de voltaje general en cualquier punto de una línea de transmisión. Naturalmente, la carta se puede también considerar dibujada sobre coordenadas rectangulares de las componentes real e imaginaria de Γ .

5. Usos

Se emplea frecuentemente en el diseño de secciones de línea de transmisión pasivas, con baja atenuación, y para el acoplamiento de impedancias en altas frecuencias, circuitos de RF y microondas; así mismo, permite calcular la atenuación en la línea de transmisión y determinar el grado de desacoplamiento de secciones de línea para frecuencias adyacentes a la frecuencia de diseño. La carta de Smith se utiliza tanto para líneas con pérdidas como sin pérdidas.

Una de sus ventajas es que, dentro de un contorno circular que rodea a un área finita del plano del coeficiente de reflexión de voltaje, presenta una información completa que relaciona todos los valores posibles de impedancias normalizadas, coeficientes de reflexión y datos de patrones de onda estacionaria para todos los circuitos de líneas de transmisión que utilizan solamente impedancias pasivas conectadas. En esta perspectiva, la carta de Smith está completamente contenida dentro de un círculo unidad, del plano, centrado en el origen. El interior del círculo unidad representa el caso de reflexión de un circuito pasivo (en el origen no hay reflexión y en el borde, $\Gamma = 1$, la reflexión es máxima), por lo que es la región de interés más habitual. El movimiento del coeficiente de reflexión a lo largo de la línea de transmisión sin pérdidas da lugar a un movimiento cíclico, que se repite cada media longitud de onda, en el que su módulo permanece constante y solo cambia el ángulo.

Muchas de las características de los circuitos de microondas se pueden representar sobre la carta de Smith como círculos; por ejemplo, las regiones de la figura de ruido y de estabilidad de los amplificadores. El “punto en el infinito” representa el límite del aumento muy grande de la reflexión y, por lo tanto, no hay necesidad de considerarlo para los circuitos prácticos. Una proyección simple del lugar geométrico de la impedancia (o admitancia) en el diagrama sobre el eje real da una lectura directa de la razón de onda estacionaria (*ROE* o *VSWR*).

6. Conceptualización teórica y construcción del diagrama de impedancias

La impedancia vista a lo largo de una línea se expresa mediante la siguiente ecuación (ecuación 1.1):

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_i(z) + V_r(z)}{I_i(z) - I_r(z)} = Z_0 \frac{V_i(z) + V_r(z)}{V_i(z) - V_r(z)} = Z_0 \frac{V_0^+ e^{-\gamma \cdot z} + V_0^- e^{\gamma \cdot z}}{V_0^+ e^{-\gamma \cdot z} - V_0^- e^{\gamma \cdot z}} \quad (1.1)$$

Si $Z(z)$ se divide entre la impedancia característica de la línea y se considera en una línea de transmisión sin pérdidas, es decir, $\alpha = 0, \gamma = \alpha + j\beta = +j\beta$, se obtiene esta ecuación, que está normalizada (ecuación 1.2):

$$Z_N(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \frac{V_0^- e^{\gamma \cdot z}}{V_0^+ e^{-\gamma \cdot z}}}{1 - \frac{V_0^- e^{\gamma \cdot z}}{V_0^+ e^{-\gamma \cdot z}}} = \frac{1 + \Gamma_L e^{j2\beta z}}{1 - \Gamma_L e^{j2\beta z}} \quad (1.2)$$

Si se reemplaza $\Gamma(z) = \Gamma_L e^{j2\beta z}$ en la ecuación 1.2, se obtiene la siguiente ecuación (ecuación 1.3); entonces:

$$Z_N(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (1.3)$$

$Z_N(z)$ es una cantidad compleja y está en función de z . Se puede representar por esta notación binómica (ecuación 1.4):

$$Z_N(z) = R + jX \quad (1.4)$$

Donde R es la resistencia normalizada y X es la reactancia normalizada. Así mismo, ambas están en función de z .

De igual manera, $\Gamma(z)$ es una cantidad compleja y se puede representar mediante la siguiente notación rectangular (ecuación 1.5):

$$\Gamma(z) = u + jv \quad (1.5)$$

Sustituyéndose los puntos de los planos complejos $\Gamma(z)$ y $Z_N(z)$ en la ecuación $Z_N(z) = \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$, se obtiene la transformación bilineal expresada a continuación (ecuación 1.6) y con las siguientes propiedades de conformidad (excepto en puntos singulares):

1) Cualquier circunferencia en el plano $Z_N(z)$ se transforma en otra circunferencia del plano $\Gamma(z)$.

2) Si dos curvas en el plano $Z_N(z)$ se cortan formando un cierto ángulo, sus transformadas se cortarán formando el mismo ángulo en magnitud y sentido en el plano $\Gamma(z)$.

$$R + jX = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = \frac{(1 + u + jv)(1 - u + jv)}{(1 - u - jv)(1 - u + jv)} = \frac{(1 - u^2 - v^2) + j2v}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (1.6)$$

Se igualan las partes reales e imaginarias para obtener esto (ecuaciones 1.6.1 y 1.6.2):

$$R = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (1.6.1)$$

$$X = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (1.6.2)$$

Resolviendo 1.6.1, se halla (ecuación 1.7):

$$u^2(1 + R) - 2uR + v^2(1 + R) = 1 - R \quad (1.7)$$

Se completan cuadrados en la ecuación 1.7 y se obtiene lo siguiente (ecuación 1.7.1):

$$u^2 - 2u \frac{R}{1+R} + \left(\frac{R}{1+R}\right)^2 + v^2 = \frac{1-R}{1+R} + \left(\frac{R}{1+R}\right)^2 \quad (1.7.1)$$

Se simplifica 1.7.1 para hallar la ecuación de una familia de círculos (ecuación 1.7.2).

$$\left(u - \frac{R}{1+R}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1+R)^2} \quad (1.7.2)$$

Esta transformación toma líneas verticales (R constante) y las transforma en circunferencias sobre el eje u , con centro en el punto $(R/(1+R), 0)$ y de radios $1/|1+R|$. Para $R = 0$, se simplifica a la ecuación $u^2 + v^2 = 1$ y coincide con el círculo exterior de la carta (figura 1.1), que contiene a todos los demás círculos de R constante (lugares geométricos de resistencia constante en el plano Γ), y para $R \rightarrow \infty$ se obtiene la ecuación $(u-1)^2 + v^2 = 0$ y coincide con el círculo con centro en $(1,0)$.

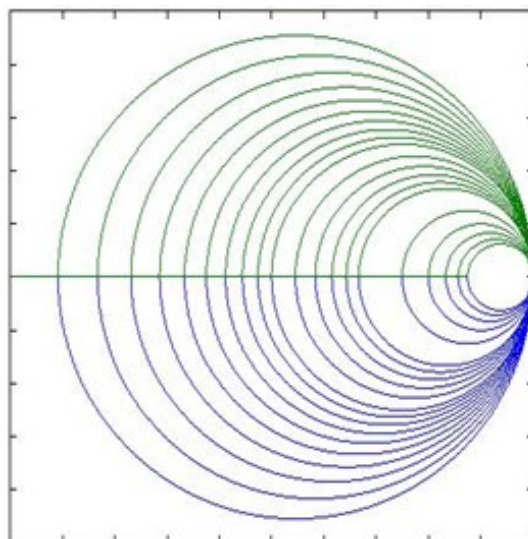


Figura 1.1 Círculos de R constante.

Análogamente, de la ecuación 1.6.2: $X = \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2}$ se obtiene la ecuación:

$(1-u)^2 + v^2 = 2\frac{v}{X}$, se completan cuadrados: $(1-u)^2 + v^2 - 2\frac{v}{X} + \frac{1}{X^2} = \frac{1}{X^2}$ y finalmente se obtiene la familia de círculos, expresada así (ecuación 1.8):

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2} \quad (1.8)$$

A continuación se muestran las curvas de reactancia X constante (arcos de circunferencias) (figura 1.2):

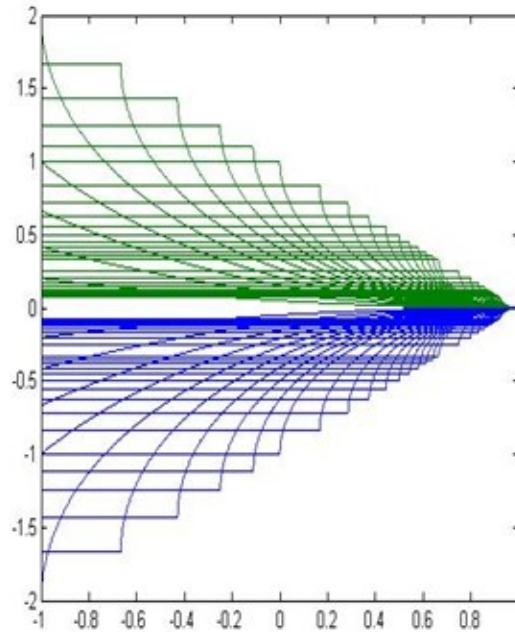


Figura 1.2 Círculos de $\pm X$ constante.

Esta ecuación representa la transformación de líneas horizontales (X constante) en otra familia de círculos en el mismo plano, con centro en el punto $(1, \frac{1}{X})$ y radio igual a $\frac{1}{|X|}$. Para $X = 0$, el radio se hace infinito y la curva coincide con el eje real. Para $X \rightarrow \infty$, se tiene la ecuación $(u - 1)^2 + v^2 = 0$, que nuevamente coincide con el punto $(1, 0)$.

Un camino alternativo para la construcción de los círculos de resistencia constante y de reactancia constantes en la carta de Smith es realizarlo de acuerdo con las siguientes consideraciones:

- Las líneas rectas verticales y horizontales son un caso particular de circunferencias cuando su radio se hace infinito.
- Una circunferencia se puede construir conociéndose tres puntos de ella; si adicionalmente se tiene información suplementaria (por ejemplo, se conoce la recta en la que se encuentra su centro), el número de puntos podría reducirse (por ejemplo, las dos intersecciones con la recta del centro que determinan un diámetro).
- A todos los puntos del infinito del plano $Z_N(z)$, es decir: $R \rightarrow \infty$, $X \rightarrow \infty$, o ambos, corresponde $\Gamma = 1$.
- Según la ecuación 1.9, a valores de $Z_N(z)$ simétricos respecto al eje de las abscisas corresponden valores de $\Gamma(z)$ también simétricos respecto del eje de las abscisas.

$$Z_2 = Z_1^* \Gamma_2 = \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} = \frac{Z_1^* - 1}{Z_1^* + 1} = \Gamma_1^* \quad (1.9)$$

Por tanto, a curvas simétricas con respecto al eje R en $Z_N(z)$ también corresponden curvas en $\Gamma(z)$ con la misma simetría. En particular, las líneas de resistencia constante en $Z_N(z)$ se transformarán en círculos en $\Gamma(z)$ con un diámetro sobre el eje real, por lo que su identificación solo requiere dos puntos, de los cuales uno es $\Gamma = 1$.

Entonces la construcción de los círculos de resistencia constante de la figura siguiente es muy sencilla (figura 1.3):

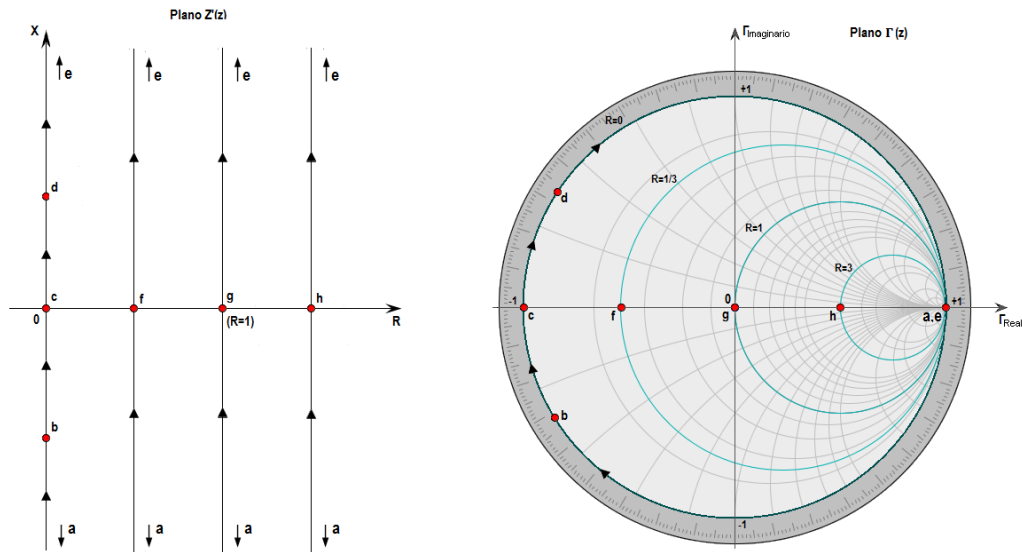


Figura 1.3 Transformación de las líneas de resistencia normalizadas a círculos constantes R sobre el plano complejo u, jv del coeficiente de reflexión. Simulado con el software Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

De la anterior figura se puede inferir la siguiente información:

$R = 0$, $|\Gamma| = 1$: círculo de radio unitario. Todo lo que se dibuje fuera de él no tiene sentido práctico. Cualquier impedancia normalizada queda encerrada en el diagrama con circunferencia $R = 0$.

El punto c ($R = 0, X = 0$) corresponde a $\Gamma = -1$.

A los puntos del infinito (a, e) les corresponde $\Gamma = 1$.

$R \neq 0$, $R < 1$: al punto f le corresponde $\Gamma = ((R - 1)/(R + 1)) < 0$

$R \neq 0$, $R = 1$: al punto g le corresponde $\Gamma = 0$

$R > 1$: al punto h le corresponde $\Gamma = ((R - 1)/(R + 1)) > 0$.

Un círculo de menor radio representa mayor valor de resistencia.

Para construir los círculos de reactancia constante, una vez conocido lo anterior, basta con partir de los puntos a , b , c , d y e (figura 1.4) y recordar que, en virtud de la conformidad, han de cortar ortogonalmente a las líneas de R constante y confluir en el transformado del punto de infinito del plano $Z_N(z)$, esto es, el punto $\Gamma = 1$.

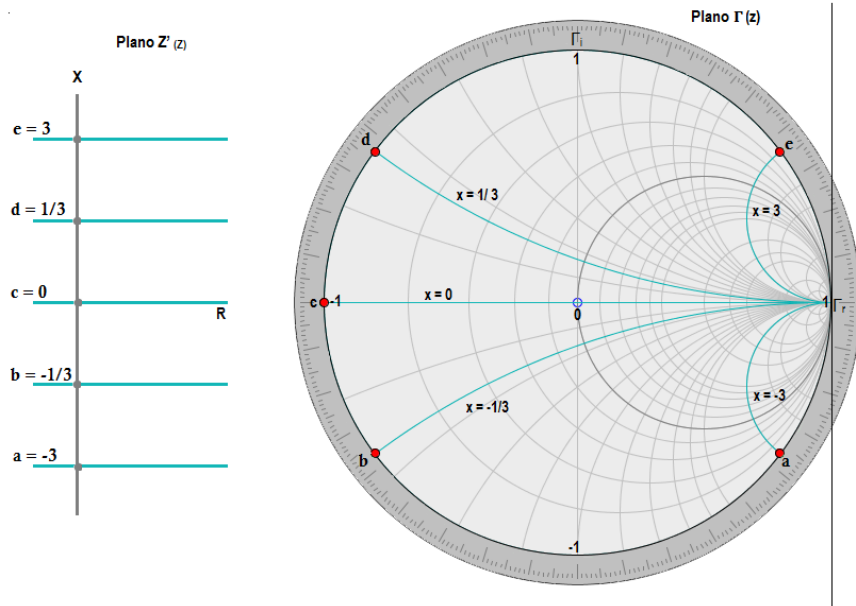


Figura 1.4 Construcción de los círculos de reactancia X sobre el plano complejo u, jv del coeficiente de reflexión a partir de las líneas de reactancia normalizada. Simulado con el *software* Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

Que todas las circunferencias de X constante tengan su centro en la recta $u = 1$ (recta vertical tangente a la carta de Smith por la derecha) puede verse de la siguiente manera:

Si $Z_{1N}(z) = R + jX$ y $Z_{2N}(z) = -(R + 2) + jX$

Entonces (ecuaciones 1.10.1 y 1.10.2):

$$\Gamma_1(z) - 1 = \frac{R + jX - 1}{R + jX + 1} - 1 = \frac{-2}{(1 + R) + jX} \quad (1.10.1)$$

$$\Gamma_2(z) - 1 = \frac{-2}{-(1 + R) + jX} \quad (1.10.2)$$

Es decir, $\Gamma_1(z)$ y $\Gamma_2(z)$ son simétricos respecto a la recta $u = 1$. Por lo tanto, la circunferencia completa transformada de la recta X constante ($-\infty < R < \infty$) ha de ser simétrica respecto a esta recta y tener su centro en ella.

Con los procedimientos anteriores se construye la carta de Smith que se muestra a renglón seguido (figura 1.5).

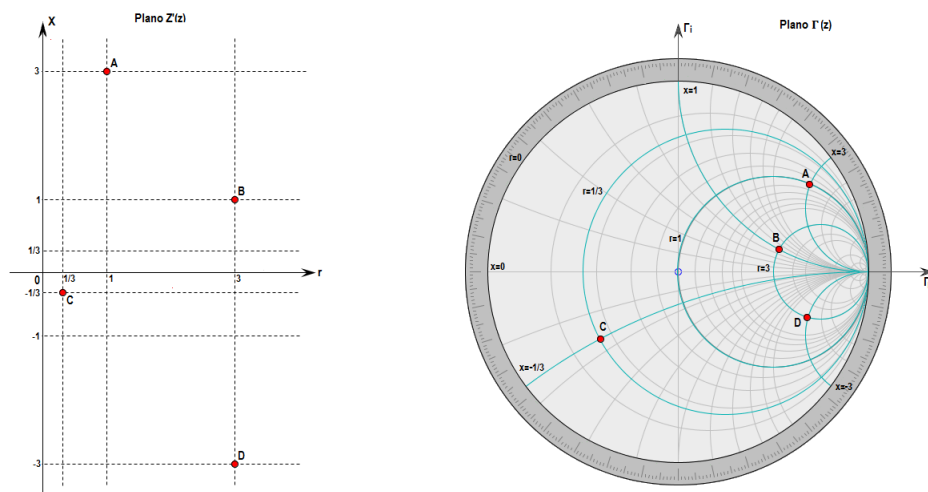


Figura 1.5 Carta de Smith. Simulado con el software Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

En la figura anterior se puede observar que el círculo de radio unitario $R = 0$ contiene todos los demás círculos de resistencia constante y secciones de los círculos de X normalizados (arcos).

Una carta similar se puede desarrollar para las admitancias $Y = \frac{1}{Z}$ a través de la transformación $\Gamma = \frac{Y_0 - Y}{Y_0 + Y}$, donde $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$

Al igual que en el diagrama de impedancias, en la carta de admitancias (figura 1.6) se identifican las curvas (circunferencias) de conductancias y susceptancias constantes. Se acostumbra presentar sobre el mismo plano las cartas de impedancia y admitancia, para facilitar su aplicación.

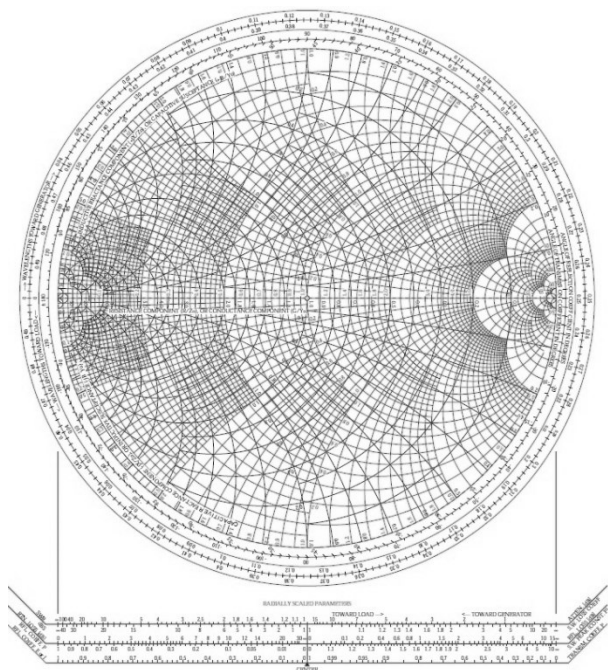


Figura 1.6 Diagrama de admitancias en la carta de Smith.

7. Relación entre la carta de admitancia y la carta de impedancia

Carta de admitancia

La construcción del diagrama de admitancias sigue un procedimiento similar al de la carta de impedancia. La admitancia normalizada es el inverso de la impedancia normalizada, como se enuncia a continuación (ecuación 1.11).

$$Y_N(z) = \frac{1}{Z_N(z)} = G + jB = \frac{1 - \Gamma(z)}{1 + \Gamma(z)} \quad (1.11)$$

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado para hallar las familias de círculos en el diagrama de impedancias presentes en la carta de Smith, se obtienen las familias de círculos para conductancia (ecuación 1.12) y susceptancia (ecuación 1.13).

$$\left(u + \frac{G}{1 + G}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1 + G)^2} \quad (1.12)$$

$$(u + 1)^2 + \left(v + \frac{1}{B}\right)^2 = \frac{1}{B^2} \quad (1.13)$$

En la figura siguiente se aprecia el resultado de graficar las ecuaciones 1.12 y 1.13, para valores de conductancia y susceptancia constantes. Cabe destacar que el diagrama de admitancias se puede asemejar al diagrama de impedancias rotado 180° (figura 1.7).

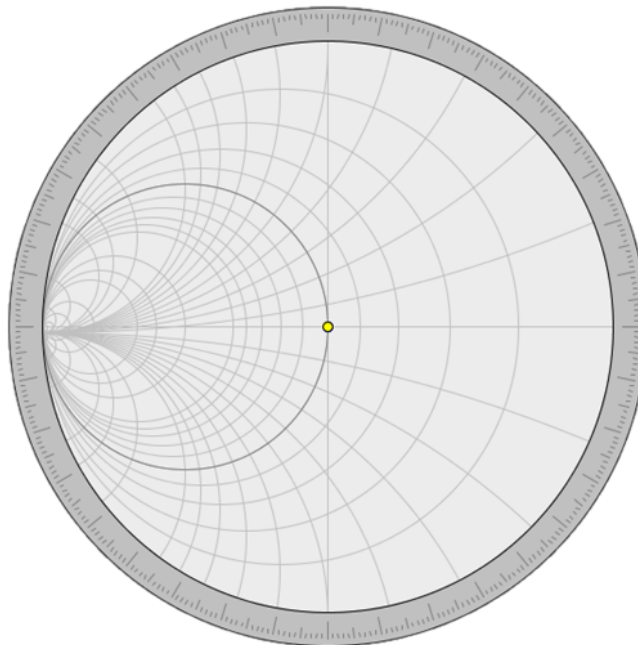


Figura 1.7 Carta de Smith para admitancias. Simulado con el software Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

Relación entre cartas

De la intersección de un círculo de resistencia constante (ecuación 1.6.1) con otro de reactancia constante (ecuación 1.6.2) se forma un punto de impedancia (R , X). Por otra parte, de la intersección de un círculo de conductancia constante (ecuación 1.14)

y uno de susceptancia constante (ecuación 1.15) se forma un punto de admitancia (G , B).

$$G = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 + u)^2 + v^2} \quad (1.14)$$

$$B = \frac{-2v}{(1 + u)^2 + v^2} \quad (1.15)$$

De las ecuaciones anteriores, se puede notar que el punto de impedancia y el de admitancia están en cuadrantes opuestos, y a la misma distancia del centro; en consecuencia, se puede obtener uno de esos puntos a partir del otro, mediante un desfaseamiento de 180° .

Se puede utilizar la misma carta de impedancias para la transformación a admitancias, teniendo en cuenta las siguientes salvedades:

- Las circunferencias de resistencia constante son ahora de conductancia constante y las circunferencias de reactancia constante son ahora de susceptancia constante.
- Los puntos de corte de las circunferencias $G = \text{constante}$, con la mitad derecha del eje real, representan admitancias máximas, esto es, puntos de voltaje mínimo. Lo contrario sucede con la mitad izquierda.
- La fase del coeficiente de reflexión, que se lee directamente en la carta, correspondiente a una admitancia dada, va desfasada 180° de la real. Hay, pues, que sumar esta cantidad al ángulo leído en la carta.

Estas propiedades pueden comprenderse fácilmente con tan solo observar la relación entre Γ_Y (coeficiente de reflexión para admitancias) y Γ_Z (coeficiente de reflexión para impedancias): $\Gamma_Z = -\Gamma_Y$

8. Propiedades de la carta de Smith

- El origen de la carta corresponde a Z_0 normalizada $\rightarrow Z_N = 1$.
- Existe una correspondencia biunívoca (excepto para los puntos del infinito) entre los puntos del plano $\Gamma(z)$ y los del plano Z_N o Y_N , de manera que la situación de un valor particular de $\Gamma(z)$ en la carta de Smith proporciona, por lectura en el diagrama de Z_N o Y_N , los valores correspondientes. Recíprocamente, la situación de un valor particular de Z_N (o de Y_N) en la malla correspondiente coincide con el extremo del vector $\Gamma(z)$ asociado.

La ubicación de una impedancia cualquiera de la línea de transmisión sobre la carta de Smith implica normalizarla previamente $Z_N(z) = \frac{Z(z)}{Z_0}$. Después se identifican sus partes real e imaginaria.

Las resistencias normalizadas se buscan sobre el eje real del plano complejo (figura 1.8), teniendo en cuenta que aquellas mayores que la unidad están contenidas dentro del círculo de resistencia constante que pasa por el origen. No olvide que el círculo $R = 1$ corresponde a la impedancia (resistencia) que adapta la línea.

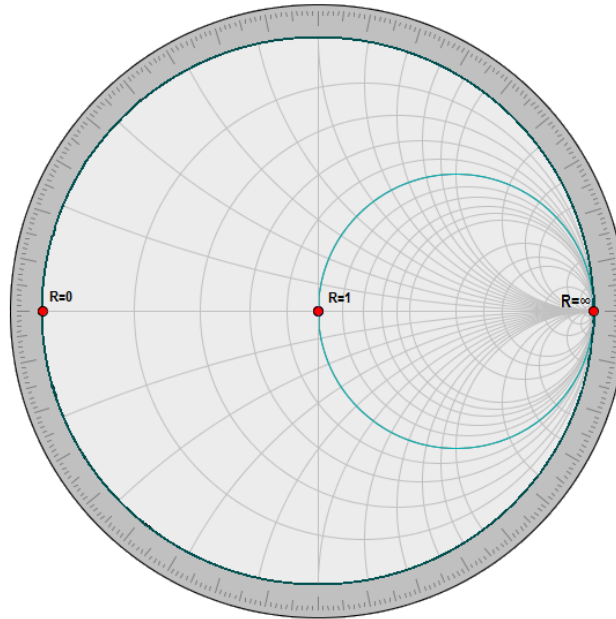


Figura 1.8 Círculos de impedancia normalizada constante. Simulado con el *software* Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

Para ubicar la parte imaginaria de la impedancia normalizada, considere el signo de esta: si es positivo, ubíquela en la mitad superior del diagrama de impedancias y considérela como reactancia inductiva jX_L ; de lo contrario, es una reactancia capacitiva jX_C y se encuentra en la parte inferior (figura 1.9).

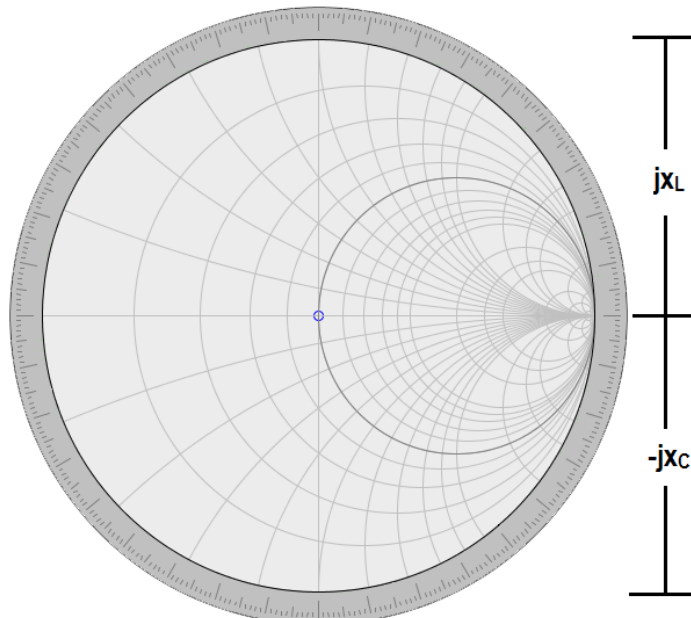


Figura 1.9 Arcos de reactancia normalizada constante sobre el plano complejo inductiva (positiva) y capacitiva (negativa). Simulado con el *software* Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

La intersección entre el círculo R y el arco X en el plano complejo corresponde al valor de la impedancia normalizada. En consecuencia, esta se representa con un punto, sin importar si dicha impedancia es la de entrada de la línea, la de la carga o la vista en cualquier lugar intermedio.

- La admitancia normalizada $Y_N(z)$, equivalente a una impedancia normalizada, se deriva directamente de la carta Smith mediante un giro de 180° a partir de la $Z_N(z)$.
- El coeficiente de reflexión en cualquier punto de una línea de transmisión sin pérdidas es un número complejo y se puede escribir de forma polar con una magnitud y fase (ecuación 1.16.1):

$$\Gamma(z) = \Gamma_L e^{j2\beta z} \quad (1.16.1)$$

Para hallar la magnitud del coeficiente de reflexión en el diagrama de impedancias se usa la siguiente ecuación, a saber: se ubican los puntos (0, 1), que corresponden al centro de la carta, y A, que es el punto de la impedancia de carga normalizada; los mismos puntos se unen a través de una línea radial que termina en el perímetro o círculo más externo. Allí se señala el punto B. Con una escala en milímetros, se miden las distancias $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, y después se evalúa el cociente entre los segmentos, así:

$$|\Gamma| = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad (1.16.2)$$

La magnitud máxima que puede tomar el coeficiente de reflexión es 1 y todo lo que se dibuje fuera del círculo unitario no tendrán ningún sentido práctico.

La fase del coeficiente de reflexión se lee directamente sobre el segmento $\overline{OB}$, sobre la escala en grados de la carta Smith. Por convención, el ángulo θ se mide desde el eje real positivo en sentido antihorario. La fase varía linealmente con la razón de una circunferencia completa (360°) cada media longitud de onda.

- La razón de onda estacionaria (ROE) en cualquier punto de la línea de transmisión se lee directamente en la carta de Smith sobre la intersección entre el círculo de la impedancia y el eje real (desde el centro hasta el extremo derecho de la carta). Ese punto también corresponde al de resistencia máxima (valor de la razón de onda estacionaria por impedancia característica), tensión o voltaje máximo y corriente mínima.

Ejemplo 1

Una línea de transmisión sin pérdidas con $Z_0 = 75\Omega$ está terminada en una carga $Z_L = 215 + j120(\Omega)$. Calcular: Γ_L y ROE

Solución:

Paso 1. Normalizar la impedancia de carga y ubicarla en la carta de Smith

$$Z_{LN} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{215 + j120\Omega}{75\Omega} = 2.9 + j1.6$$

Paso 2. Trazar el círculo ROE , tomando como referencia el centro del diagrama de impedancias y el punto de ubicación de la impedancia de carga normalizada. El valor de la magnitud del $ROE = 4$.

Paso 3. Trazar una línea radial que una los puntos del paso anterior y termine en el perímetro. Nombrar los puntos así: O el centro de la gráfica, A el punto de ubicación de la impedancia de carga normalizada y B el límite de la circunferencia exterior de la carta de Smith.

La magnitud se calcula mediante la relación de los siguientes segmentos:

$$|\Gamma_L| = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cong 0,6$$

El ángulo se lee directamente sobre la escala, en el sentido contrario a las manecillas del reloj:

$$\Gamma_L \approx 0,6 \angle 18,2^\circ$$

Los pasos anteriores se evidencian de manera gráfica en la figura siguiente (figura 1.10).

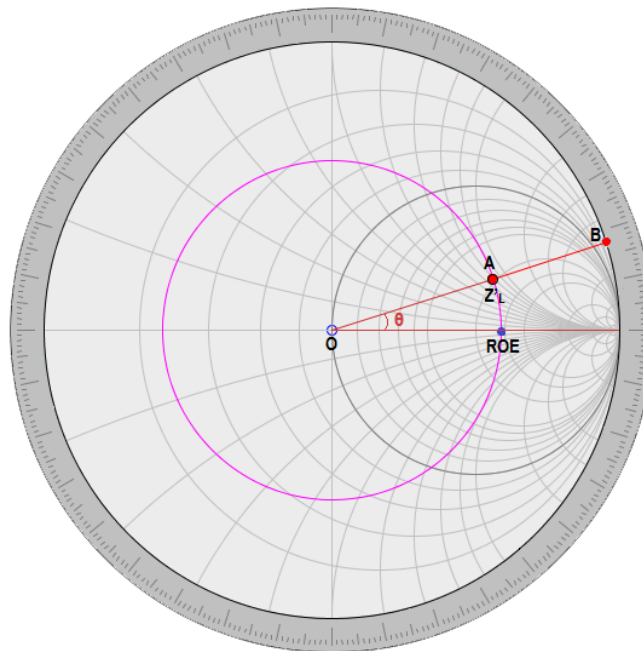


Figura 1.10 Carta de Smith para el ejemplo anterior. Simulado con el *software* Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

El ROE se puede leer sobre el eje real en el hemisferio derecho (figura 1.10), o identificar sobre la escala ROE que se encuentra en la parte inferior izquierda del diagrama de impedancias. A continuación se muestra la manera de encontrarlo (figura 1.10):

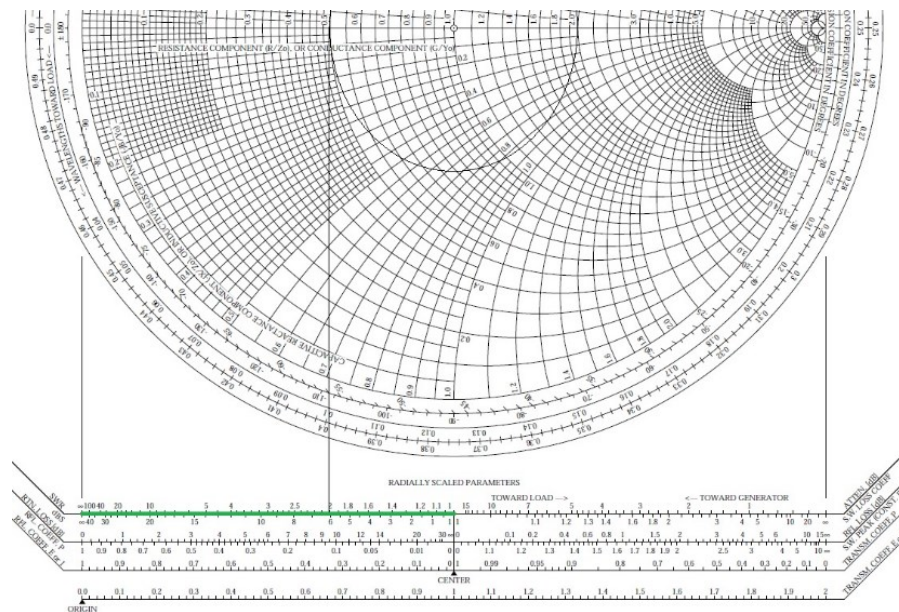


Figura 1.11 Escala para medición del ROE en la carta de Smith.

La información sobre el ROE (VSWR) obtenida por cualquiera de los dos métodos debe coincidir con el mismo resultado.

- La escala en fracciones λ sirve para trasladar un punto a lo largo de la línea. Por ejemplo, determinar la impedancia de entrada de una línea de transmisión que se encuentra ubicada a cualquier distancia de la impedancia de carga. Como se muestra en la figura siguiente (figura 1.12), un giro negativo antihorario representa un movimiento hacia la carga y otro positivo en el sentido horario, un movimiento hacia el generador. El círculo exterior de la carta está tabulado en grados sexagesimales o longitudes de onda que permiten medir los desplazamientos.

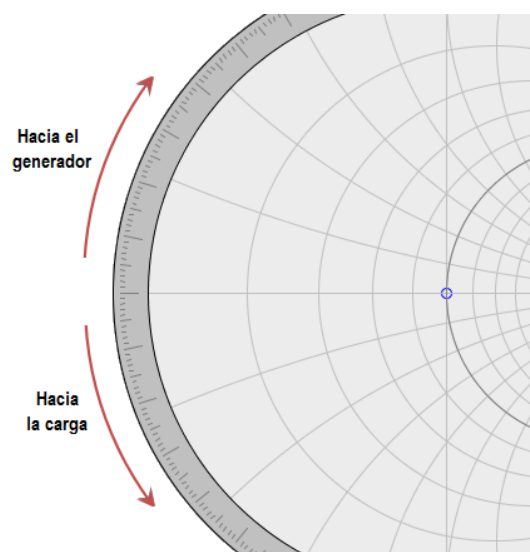


Figura 1.12 Escalas en la carta de Smith. Simulado con el software Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

- En el punto en que $|V|$ es máximo e $|I|$ es mínimo, la impedancia es resistiva y presenta un valor máximo. En efecto, $|V|$ es máximo cuando $V^+e^{-j\beta z}$ y $V^-e^{j\beta z}$ se suman en fase, y entonces $I^+ = V^+/Z_0$ y $I^- = V^-/Z_0$ se suman en oposición de fase y producen un vector I colineal con el vector V .

La ecuación siguiente permite obtener el valor de la impedancia máxima desnormalizada (ecuación 1.17):

$$Z_{max} = \frac{V}{I} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} Z_0 = ROE * Z_0 \quad (1.17)$$

Con $Z_0 = 1$ (valores normalizados) resulta $Z = ROE$.

Análogamente, cuando $|V|$ es mínimo, $|I|$ es máximo y la impedancia vuelve a ser resistiva y, esta vez, mínima y de valor:

$$Z_{min} = \frac{Z_0}{ROE}$$

Estos puntos se corresponden con la carta de Smith con el eje real (reactancia nula).

En relación con los valores de admitancias $Y = G \pm jB$, son los mismos de las impedancias $Z = R \pm jX$ rotados 180° .

Como se muestra a continuación, es importante tener cuidado con los signos de la susceptancia B y recordar que son opuestos a los valores correspondientes al de las reactancias: X (figura 1.13).

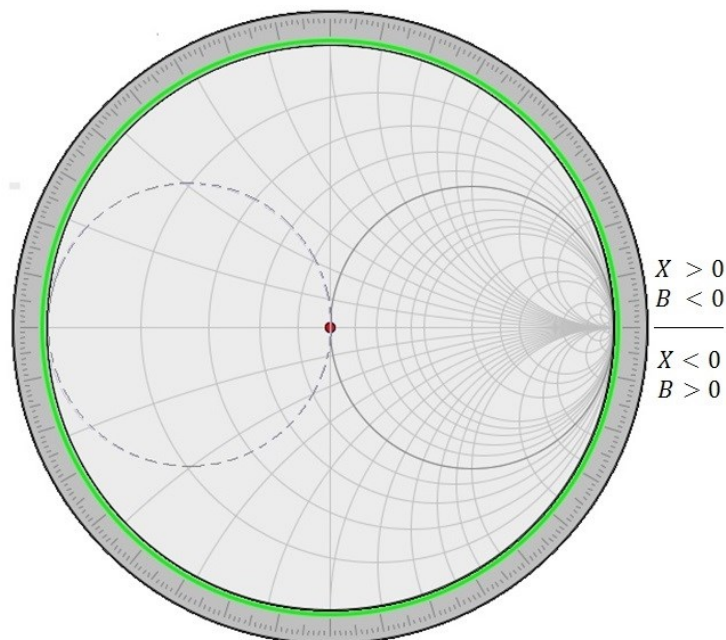


Figura 1.13 Carta de Smith en términos de impedancias y reactancias. Simulado con el *software* Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

El coeficiente de reflexión en términos de admitancias se expresa así (ecuación 1.18):

$$\Gamma = \frac{1 - Y}{1 + Y} \quad (1.18)$$

Se observa que es idéntica a Γ para impedancias, excepto por un cambio de signo que supone un giro de 180° .

- El diagrama de impedancias es una herramienta útil para el diseño de acoples y resolución de ejercicios sobre teoría de líneas de transmisión. Para el primer caso (diseño de acoples), siempre se presumirá que la atenuación en las secciones de acoplamiento es despreciable, ya que a altas frecuencias $\omega L \gg R$ y $\omega C \gg G$; además, las longitudes de las secciones de líneas utilizadas para los acoples son eléctricamente cortas y las pérdidas acumuladas desde el punto de acoplamiento hasta llegar a la carga son muy pequeñas. Sin embargo, para el segundo caso hay situaciones (líneas de transmisión largas) en que es necesario tomar en consideración el efecto del coeficiente de atenuación α , ya que este influye sobre parámetros como el coeficiente de reflexión, la impedancia de entrada y la potencia que finalmente se entrega a la carga. En estas circunstancias, se recurre a la escala de atenuación (figura 1.14). Más adelante se explicará el procedimiento que hay que seguir cuando se resuelven ejercicios sobre teoría de líneas de transmisión con pérdidas.

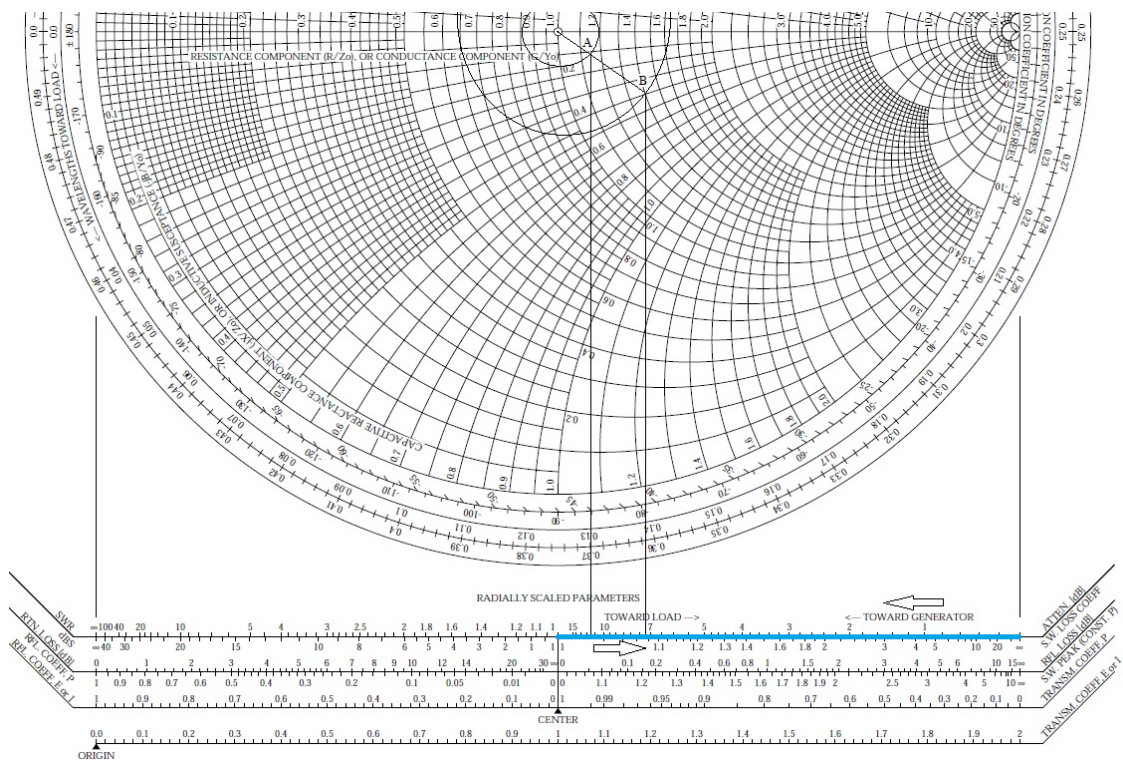


Figura 1.14 Escala de atenuación que deberá utilizarse en la carta de Smith cuando se resuelven ejercicios de líneas con pérdidas.

Ejemplo 2

Una carga $Z_L = 50 - j25 \Omega$ se conecta a una línea de transmisión sin pérdidas de 100Ω . Use la carta de Smith para encontrar Z a una distancia $l = 0,4 \lambda$ de la carga.

Solución

Se normaliza la carga:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{50 - j25}{100} = 0,5 - j0,25 \Omega$$

Se ubica el punto sobre la carta de Smith (ver P1 en la figura 1.15).

Luego de esto, se hace un desplazamiento desde P1 hacia el generador (sentido de las manecillas del reloj) una distancia de $0,4\lambda$, y se llega a P2. Este punto corresponde al valor de impedancia solicitado.

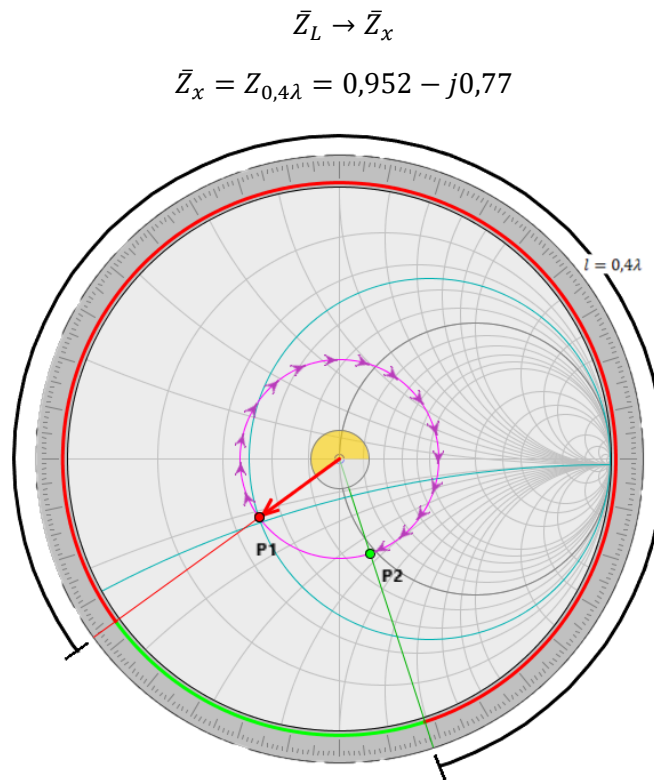


Figura 1.15 Desarrollo del ejemplo 2 en la carta de Smith, simulado con el *software* Fundamentals of Applied Electromagnetics, 6/E®, tomado de la página web <http://www.amanogawa.com>.

Finalmente, se desnormaliza con respecto a la impedancia de la línea, esto es, con Z_0 , y se obtiene otro valor de impedancia ubicada a una distancia $0,4 \lambda$.

$$Z_L = 95,2 - j77 \Omega$$

En el *software* Amanogawa se verifica que el proceso de resolución del ejercicio sea correcto (figura 1.16).