Kunterbunte Mathematik

Heinz Klaus Strick

Begeisternde Erkundungen für Kinder, Lehrende und Eltern

SACHBUCH MOREMEDIA

Springer

Kunterbunte Mathematik

Heinz Klaus Strick

Kunterbunte Mathematik

Begeisternde Erkundungen für Kinder, Lehrende und Eltern

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-67312-6 ISBN 978-3-662-67313-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-67313-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recyclebar.

Vorwort

Liebe junge Mathe-Fans!

Mathematik ist bunt – das seht ihr schon an den vielen bunten Bildern in diesem Buch.

Bunt bedeutet vor allem: Mathematik hat sehr viele verschiedene Seiten!

- In Kap. 1 beginnen wir mit einfachen mathematischen **Puzzles:** Wie können wir mit einfach geformten Bausteinen bestimmte Flächen belegen?
- Weiter geht es in Kap. 2 mit **Flächenteilungen:** Wie lassen sich Quadrate und regelmäßige Dreiecke in gleich große Teilflächen unterteilen?
- In Kap. 3 beschäftigen wir uns mit **bunten Steinen:** Wie viele Steine benötigen wir für verschiedene Muster?
- Verschlungene Knoten werden uns zukünftig nicht mehr durcheinanderbringen: In Kap. 4 schaffen wir Ordnung bei den **keltischen Knoten**.
- Auch mit einfachen Fliesen kann man Flächen gestalten: In Kap. 5 untersuchen wir, welche schönen **Muster** entstehen können.
- Wer in dem folgenden Bild sofort das Wort MATHEMATIK gelesen hat, der kann das Kap. 6, das sich mit **Wortschlangen** beschäftigt, überspringen. (Übrigens: Es gibt 44 Möglichkeiten für solche Wortschlangen aus 10 Buchstaben.)

K	A	M	M	A
I	T	E	H	T

- Kap. 7 ist das umfangreichste Kapitel in diesem Buch: Wie kann man **regelmäßige Vielecke und regelmäßige Sterne** zeichnen und bunt anmalen? Und wieso kann man hiermit Spielpläne für ein Fußballturnier aufstellen?
- In Kap. 8 verschwindet beim Umlegen von Puzzleteilen ein Rechenkästchen! Und: Was hat Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci) mit diesem Problem zu tun?
- **Goldene Dreiecke** spielen in Kap. 9 eine wichtige Rolle. Wie lassen sich hiermit regelmäßige Fünf- und Zehnecke sowie 5-zackige und 10-zackige Sterne auslegen?

Und: In sozusagen letzter Minute ist noch ein besonderes Puzzle hinzugekommen – das Einstein-Puzzle. Seid ihr neugierig, was es damit auf sich hat?

- Seit vielen Jahrhunderten faszinieren **magische Quadrate** die Menschen: Kap. 10 verrät, wie man mit bunten Farben den Überblick behält.
- Auch **Würfel** können bunt sein. Kap. 11 zeigt, wie man Würfel bastelt und welche Würfelspiele fair und welche unfair sind.
- Kap. 12 ist eine Entdeckungsreise mit einem einfachen Taschenrechner. Unter anderem finden wir heraus, wieso die Zahl 2023^{2023} – das ist eine Zahl mit mehr als 6000 Stellen! – auf die Ziffern 567 endet.

In jedem Kapitel gibt es Forschungsaufträge (**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**). Erläuterungen hierzu findet ihr unter dem auf der jeweils ersten Kapitelseite angegebenen Link, dort gibt es auch Kopiervorlagen zum bunt Anmalen.

Ich bin sicher, dass ihr viel Freude mit diesem Buch habt. Vielleicht ist die eine oder andere Stelle beim ersten Lesen noch etwas zu schwierig für euch – dann hebt euch dies für später auf und blättert einfach weiter. Erfahrungsgemäß wird es aber nicht lange dauern, bis ihr dann auch damit zurechtkommt.

Und noch etwas: Im Buch sind einige Spiele beschrieben. Eure Erfahrungen damit könnt ihr mir gerne mitteilen (strick.lev@t-online.de).

I	N	Z	K
E	H	A	L
C	K	U	S
I	R	T	S

Leverkusen, im Mai 2023

Liebe Eltern, liebe Lehrerinnen und Lehrer, liebe Freundinnen und Freunde der Mathematik!

Die zahlreichen und ausnahmslos positiven Rückmeldungen, die ich in den vergangenen Jahren zu meinen drei „schönen Büchern" erhielt (*Mathematik ist schön* 2017/2019, *Mathematik ist wunderschön* 2018/2020, *Mathematik ist wunderwunderschön* 2019/2022), haben mich zu diesem Buch ermutigt.

Alle drei Bände tragen die Untertitel „Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren" – tatsächlich eignen sich zumindest jeweils die ersten Abschnitte der insgesamt 42 Kapitel in den drei Büchern auch für die besonders jungen Mathematikinteressierten.

Gleichwohl wurde vielfach der Wunsch an mich herangetragen, ein Buch mit Themen zusammenzustellen, die sich als Lektüre besonders für die Jüngeren eignet. Dabei sollte möglichst auf Ausführungen verzichtet werden, die im Allgemeinen erst im Unterricht ab der 7. Klasse behandelt werden. Insbesondere sollten möglichst keine formalen Rechnungen und keine Formeln vorkommen.

Deshalb habe ich hier zwölf passende Themen ausgewählt, die teilweise schon in den o. a. Büchern vorkommen, teilweise aber auch neue Inhalte umfassen.

Neu sind beispielsweise die Untersuchungen,

- wie man ein Quadrat in drei gleich große Teilflächen zerlegen kann,
- welche Möglichkeiten es gibt, Wörter in ein Rechteckraster einzutragen (sog. Wortschlangen),
- wie regelmäßige Vielecke gefärbt werden können,
- welche Figuren sich mit goldenen Dreiecken auslegen lassen,
- wie man letzte Ziffern von Potenzen herausfindet.

Allgemein wird in diesem Buch ein eher spielerischer Zugang zu den einzelnen Themen gewählt als in meinen drei anderen „schönen" Büchern.

Auch dieses Buch enthält „Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen", um die neu kennengelernten Inhalte zu festigen oder um Ideen weiterzuentwickeln. Die Lösungen hierzu lassen sich – zusammen mit einigen Kopiervorlagen – mit dem auf der jeweils ersten Kapitelseite angegebenen Link herunterladen.

Aktuelle Ergänzungen werden auch auf meiner Homepage (mathematik-ist-schoen.jimdo.com) veröffentlicht – über Anregungen Ihrerseits würde ich mich sehr freuen und diese ggf. auch auf meiner Homepage veröffentlichen.

Die einzelnen Kapitel dieses Buches sind nahezu unabhängig voneinander lesbar, und die Reihenfolge spielt kaum eine Rolle.

Die eine oder andere Anregung wird für manche Jüngere vielleicht noch etwas zu früh kommen, beispielsweise die Zusammenhänge zwischen den goldenen Dreiecken in Kap. 9. Dies sollte nicht entmutigen – die Beschäftigung mit dem betreffenden Thema wird dann sicherlich zu einem späteren Zeitpunkt gelingen.

Ganz auf Formeln habe ich nicht verzichten können, aber im Wesentlichen sind es nur wenige Regeln, die als Formel eine Rolle spielen: Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks und eines Dreiecks, die Berechnung von Dreieckszahlen (d. h. die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen) sowie die Bestimmung der Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen Vieleck.

Außerdem ist es wohl kaum möglich, die Eigenschaften geometrischer Figuren zu untersuchen, ohne die sog. Winkelsätze anzuwenden (Winkel an parallelen Geraden sowie Winkel im Kreis).

Da das Abtragen von Winkeln und das Messen von Winkelgrößen in der Regel erst im Mathematikunterricht der 7. Klasse systematisch behandelt wird, habe ich hierzu eine entsprechende Anleitung verfasst, die – bei Bedarf – im Anhang des Buches nachgelesen werden kann.

Für das letzte der zwölf Kapitel ist ein einfacher Taschenrechner ausdrücklich erwünscht, um damit Entdeckungen in der Welt der Zahlen zu machen.

Kunterbunt sind die Themen dieses Buches und nicht nur die zahlreichen farbigen Abbildungen. Wie bei fast allen Büchern, die sich mit Mathematik beschäftigen, genügt es nicht, die Texte *nur zu lesen*.

Vielmehr werden viele Anregungen gegeben wie beispielsweise

- die Figuren abzuzeichnen, auszuschneiden und auszumalen und zu variieren oder
- Gesetzmäßigkeiten von Mustern anhand von selbst gewählten Beispielen zu entdecken oder zu überprüfen sowie
- Spiele nach vorgegebenen oder eigenen Spielregeln zu spielen.

Das Buch enthält keine Hinweise auf weiterführende Literatur; hier verweise ich auf die entsprechenden umfangreichen Kommentare in den drei Bänden über „schöne“ Mathematik.

Am Ende der Arbeit an diesem Buch bedanke ich mich wieder herzlich bei all denen, die mich bei diesem Buchprojekt unterstützt haben, insbesondere

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich immer wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte, sowie
- bei Wilfried Herget, der meine Beschäftigung mit schöner Mathematik seit Jahren durch konstruktiv-kritische und aufmunternde Kommentare begleitet,
- bei Ulrich Kilian für seine Programmierunterstützung für das Wortschlangenkapitel

und nicht zuletzt bei Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer Verlag, die dieses Buch erst ermöglichten.

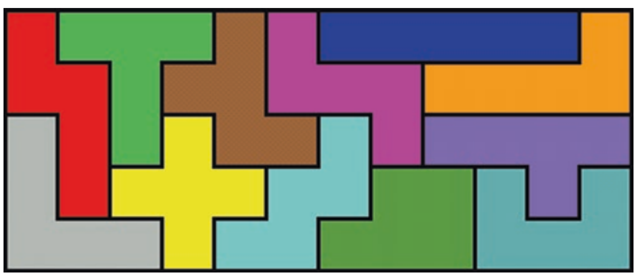
Leverkusen, Deutschland Heinz Klaus Strick
Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einfache Bausteine zum Parkettieren

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.“

(Blaise Pascal, französischer Mathematiker und Philosoph, 1623–1662)



In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, einfache Figuren wie Quadrate, Rechtecke, treppenförmige Flächen u. a. m. mithilfe von einfach geformten Puzzlestücken zu belegen.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann [https://doi.org/10.1007/978-3-662-67313-3_1].

H. K. Strick, *Kunterbunte Mathematik*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-67313-3_1

1.1 Parkettieren mit einfachen Bausteinen

Die Felder eines 2×2-Quadrats können auf verschiedene Arten mit vier 1×1-Quadraten **parkettiert** werden, d. h. mit geometrischen Bausteinen lückenlos und vollständig *bedeckt* werden.

Wählt man 1×1-Quadrate in verschiedenen Farben, dann gibt es

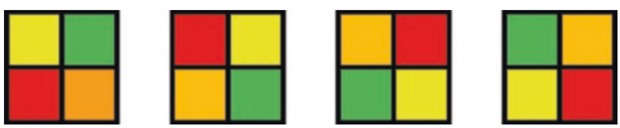
- für das Färben des ersten Feldes (links oben) 4 Möglichkeiten,
- für das zweite Feld (rechts oben) 3 mögliche Farben,
- für das dritte Feld (links unten) bleiben dann noch 2 mögliche Farben und
- für das vierte Kästchen bleibt dann noch 1 der 4 Farben übrig.

Da jede der Möglichkeiten mit jeweils den anderen Möglichkeiten kombiniert werden kann, sind dies insgesamt $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ Möglichkeiten.

In Abb. 1.1 sind alle diese Möglichkeiten zu sehen.

Welche Zusammenhänge gibt es zwischen den 24 Fällen?

Dreht man beispielsweise das erste 2×2-Quadrat jeweils um 90° im Uhrzeigersinn, dann ergeben sich hieraus 3 weitere Möglichkeiten, vgl. die folgende Abbildung. Dreht man die letzte Figur noch einmal um 90°, dann ergibt sich wieder die Ausgangsfigur.



Hieraus folgt, dass sich die 24 möglichen Parkettierungen in 6 Gruppen von jeweils 4 Figuren unterteilen lassen; die Parkettierungen, die zu einer Gruppe gehören, gehen jeweils durch eine 90°-Drehung hervor.

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.1: Stelle diese 5 weiteren Vierergruppen von jeweils 4 Quadraten zusammen.

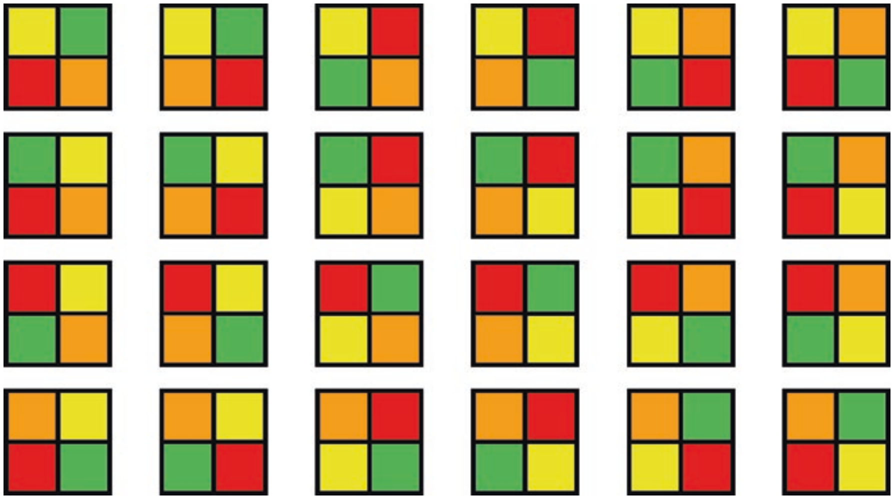
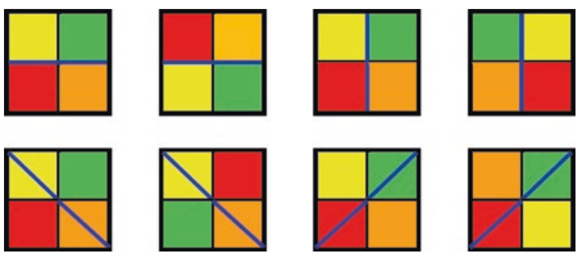


Abb. 1.1 Die 24 möglichen Färbungen eines 2×2-Quadrats

Eine andere Einteilung der 24 Möglichkeiten ergibt sich durch verschiedene Arten der Spiegelung. In den folgenden Abbildungen sind die Spiegelachsen eingezeichnet.

Jeweils 2 Figuren ergeben sich wechselseitig

- durch eine Spiegelung an einer horizontalen Achse (1. und 2. Figur) oder
- durch eine Spiegelung an einer vertikalen Achse (3. und 4. Figur) oder
- durch eine Spiegelung an einer diagonalen Achse (untenstehende Figuren).



Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.2: Welche Färbung eines 2×2-Quadrats ergibt sich, wenn du

a. die erste Figur erst an einer horizontalen, dann an einer vertikalen Achse spiegelst,
b. nacheinander die beiden diagonalen Spiegelungen durchführst,
c. die erste Figur erst um 90° im Gegenuhrzeigersinn drehst, dann an einer horizontalen (vertikalen, diagonalen) Achse spiegelst?

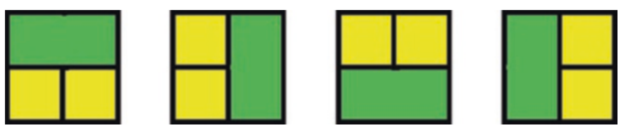
A 1.3: Durch die Kombination von Spiegelungen und Drehungen kannst du aus der ersten Figur jede der übrigen 23 Formen erhalten. Zeige dies an selbst gewählten Beispielen.

Bei den folgenden Überlegungen verwenden wir verschieden große Bausteine, die unterschiedlich gefärbt sind, damit wir die Bausteine besser unterscheiden können.

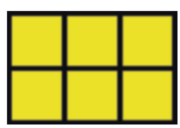
Um ein 2×2-Quadrat mit diesen Bausteinen zu parkettieren, haben wir verschiedene Möglichkeiten.

Wenn wir nur 1er-Bausteine verwenden, gibt es nur *eine* Möglichkeit (vgl. die Figur links). Wenn wir nur 2er-Bausteine (Dominobausteine) zum Parkettieren benutzen, gibt es 2 Formen, die sich aber nur durch eine Drehung voneinander unterscheiden.

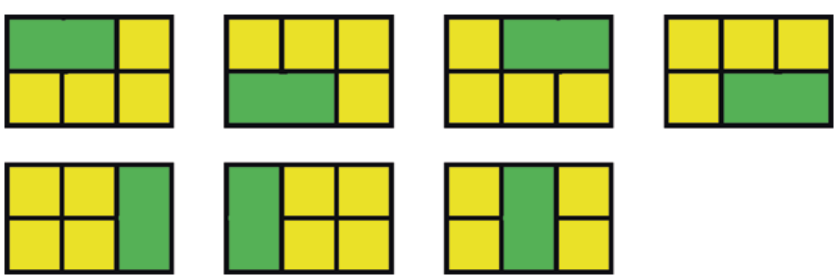
Verwendet man Bausteine von beiden Sorten, dann gibt es 4 Formen, die jedoch durch Drehungen oder Spiegelungen ineinander übergeführt werden können – es gibt also nur *eine* **Grundform**.



Als Nächstes untersuchen wir ein 3×2-Rechteck. Verwendet man nur 1er-Bausteine, dann sieht das wie folgt aus:



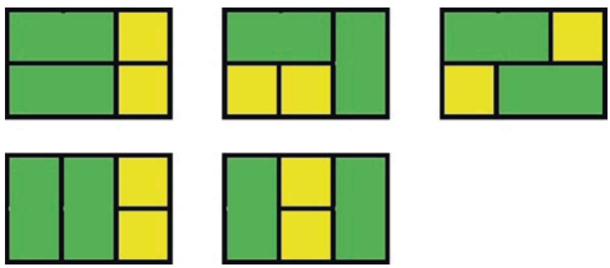
Kommen außer den 1er-Bausteinen auch 2er-Bausteine für das Parkettieren in Frage, dann gibt es die folgenden 7 Parkettierungen (ein 2er-Baustein und vier 1er-Bausteine):

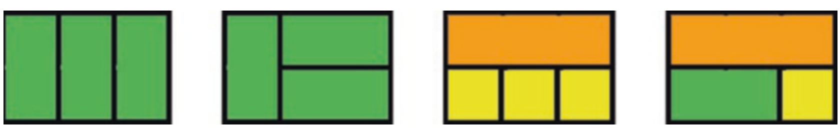


Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen
A 1.4: Eigentlich handelt es sich nicht um 7 verschiedene Formen, sondern nur um *3* verschiedene *Grundformen*, aus denen sich die anderen Formen durch Spiegelung oder Drehung ergeben. Erläutere.

Darüber hinaus gibt es weitere Grundformen:

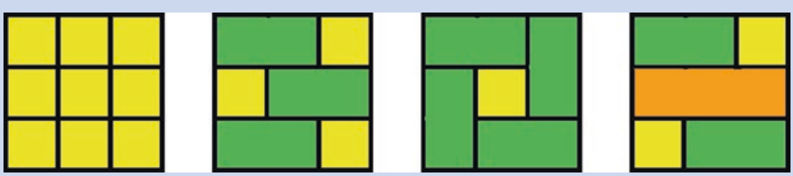
- *5* Grundformen mit zwei 2er-Steinen und zwei 1er-Steinen,
- *2* Grundformen mit drei 2er-Steinen und
- jeweils *eine* Grundform für die Kombination aus einem 3er-Stein (Tromino) und drei 1er-Steinen bzw. je einem 1er-, einem 2er- und einem 3er-Stein.





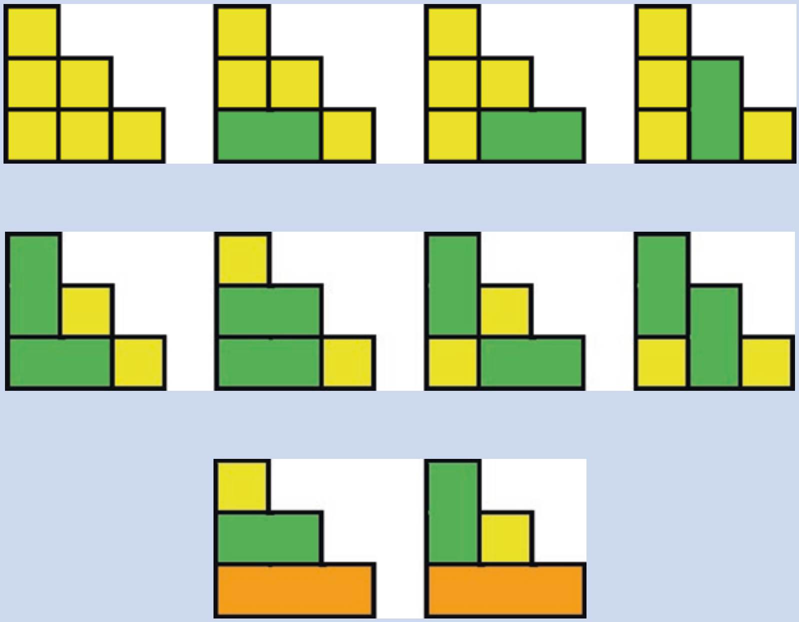
Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen
A 1.5: Welche anderen Formen erhält man aus den zuletzt betrachteten Grundformen des 3×2-Rechtecks durch Spiegelung oder Drehung?

A 1.6: Finde alle möglichen Grundformen, ein 3×3-Quadrat mit Bausteinen zu bedecken. Einige Fälle sind hier abgebildet.



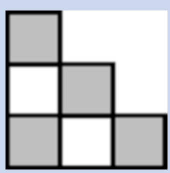
A 1.7: Die folgenden Figuren zeigen verschiedene Möglichkeiten, eine treppenartige 3-stufige Figur durch Bausteine zu bedecken. Sind alle Grundformen erfasst?

Welche weiteren Figuren erhält man durch eine Spiegelung an einer diagonalen Achse, also einer Achse, die von links unten nach rechts oben verläuft?

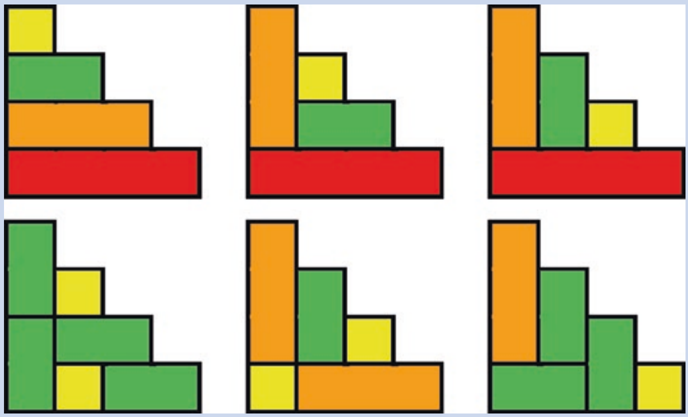


A 1.8: Warum ist es nicht möglich, eine 3-stufige-Treppe nur mit 2er-Bausteinen zu bedecken?

Tipp: Betrachte die folgende „Färbung“ einer 3-stufigen-Treppe in der Art eines Schachbretts, vgl. die folgende Abbildung. Wenn du einen 2er-Stein hinlegst, ist stets ein dunkles und ein helles Feld bedeckt.



A 1.9: Untersuche die möglichen Grundformen, eine 4-stufige Treppe mit 1er-, 2er-, 3er- oder 4er-Bausteinen zu bedecken; einige Möglichkeiten sind im Folgenden abgebildet. Welche Fälle fehlen noch? Welche Fälle sind *nicht* möglich? (Beachte den Tipp aus **A 1.8**)

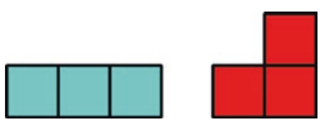


1.2 Einfache Polyominos

In Anlehnung an das Wort *Domino* schuf der amerikanische Mathematiker Solomon W. Golomb im Jahre 1953 die Begriffe **Tromino, Tetromino, Pentomino, Hexomino**, … und den Oberbegriff **Polyomino** für Puzzlestücke dieses Typs.

- **Dominos:** Ein Dominostein entsteht, indem man zwei Quadrate so aneinandersetzt, dass sie eine Quadratseite gemeinsam haben – hier gibt es nur *einen* Typ.

- **Trominos:** Wenn man drei Quadrate aneinandersetzt, dann sind *zwei* Typen (Grundformen) von Puzzlestücken möglich.

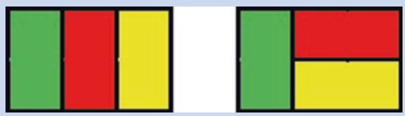


Domino- und Tromino-Steine lassen sich durch Drehungen um 90°, 180°, 270° in eine andere Lage bringen.

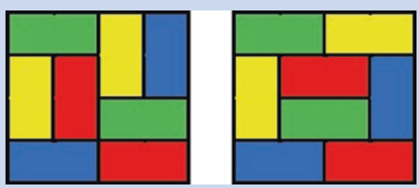
Im Folgenden werden wir Formen grundsätzlich nicht als unterschiedlich ansehen, wenn eine Grundform gedreht oder geklappt wird – denn Polyomino-Steine können beliebig gedreht und umgeklappt (also beidseitig verwendet) werden.

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.10: Eine Rechteckfläche von 3 LE × 2 LE = 6 FE kann man (bis auf Spiegelung oder Drehung) auf 2 Arten mit 3 Dominosteinen belegen, eine Fläche von 4 LE × 3 LE = 12 FE auf 5 Arten, vgl. die folgenden Abbildungen.

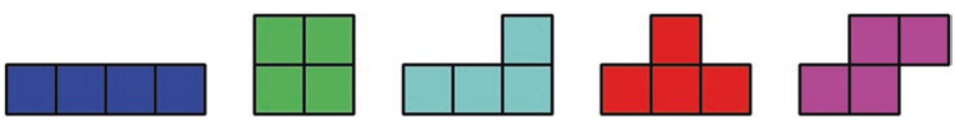


Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Fläche von 4 LE × 4 LE = 16 FE mit Dominosteinen zu belegen? (Vgl. die folgenden beiden Beispiele)



- **Tetrominos:** 5 Typen (Grundformen) von Puzzlestücken sind möglich, wenn man vier Quadrate aneinandersetzt.

Üblicherweise werden die 5 Typen mit den Buchstaben I, O, L, T und S bezeichnet.

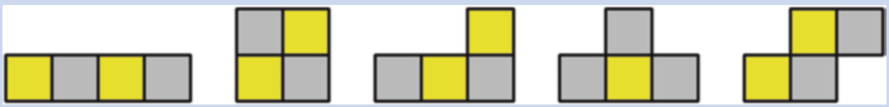


Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

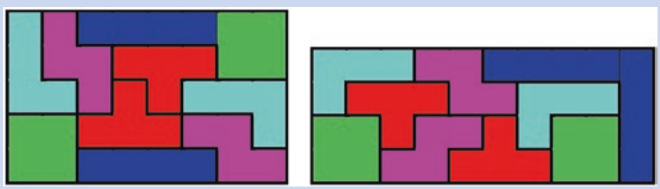
A 1.11: Mit 5 Steinen aus dem Tetromino-Spiel lässt sich eine Fläche von 20 FE bedecken.

Warum ist es aber *nicht* möglich, dafür die 5 *verschiedenen* Tetromino-Steine zu benutzen – weder für die Parkettierung eines 2×10-Rechtecks noch für ein 4×5-Rechteck?

Tipp: Färbe die 20 Felder der beiden Rechtecke und außerdem die 5 Tetrominos wie ein Schachbrett abwechselnd dunkel und hell.



A 1.12: Mit dem doppelten Puzzlesatz kannst du eine Rechteckfläche von 40 FE parkettieren. Finde weitere Möglichkeiten, diese Rechteckflächen zu bedecken.



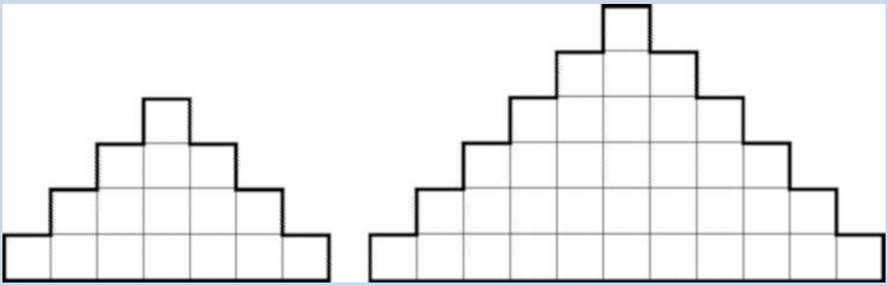
A 1.13: Warum ist es *nicht* möglich, eine 4×4-Quadratfläche (16 Felder) mit 4 *verschiedenen* Tetrominos auszulegen.

A 1.14: Ist es möglich, eine Rechteckfläche mit 4 × 6 = 24 Feldern (4 × 7 = 28 Felder; 6 × 6 = 36 Felder) zu parkettieren und dabei *mindestens* ein Element von jeder Sorte zu verwenden?

A 1.15:

a. Kann eine Treppenfigur aus 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 Feldern (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 Felder) mit Tetromino-Steinen ausgelegt werden, wobei jede Form mindestens einmal vorkommen soll?

b. Die folgenden achsensymmetrischen Dreiecksfiguren haben 1 + 3 + 5 + 7 = 16 bzw. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 Felder. Wie lassen sie sich mit Tetrominos auslegen?



1.3 Pentominos

Es gibt 12 Möglichkeiten, fünf Quadrate zu einem Pentomino-Element zusammenzusetzen. Üblicherweise werden diese mit den Buchstaben F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z bezeichnet, vgl. Abb. 1.2.

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen
A 1.16: Färbe die 12 Pentomino-Elemente wie ein Schachbrett abwechselnd dunkel und hell (ähnlich wie die Tetrominos in **A 1.10**). Beschreibe den Unterschied.

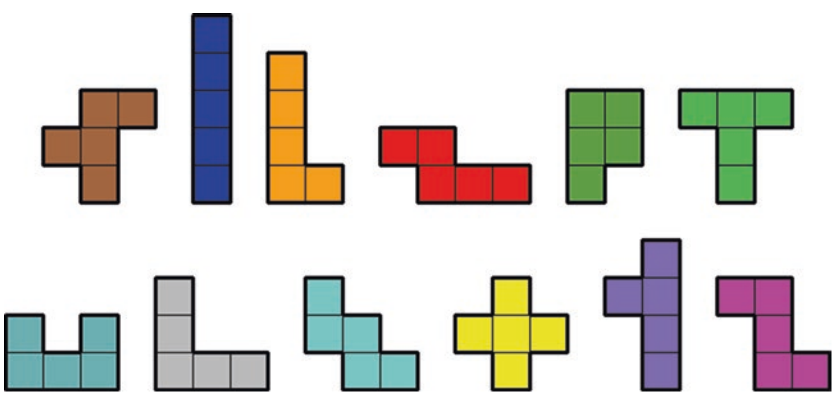


Abb. 1.2 Die 12 möglichen Pentomino-Elemente

1.3.1 Parkettierung von Rechtecken durch Pentominos

Mit den 12 Pentomino-Elementen kannst du eine Fläche von insgesamt 60 Flächeneinheiten parkettieren.

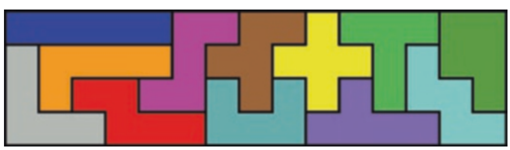
Es gibt 6 verschiedene Rechtecke mit Flächeninhalt 60 FE (und ganzzahligen Seitenlängen): 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12 und 6×10.

Da man für die Pentomino-Elemente F, T, L, W, X und Z mindestens eine Höhe von 3 LE benötigt, kommen das 1×60-Rechteck und das 2×30-Rechteck für die Parkettierung mit *allen* Pentominos *nicht* in Frage. Daher bleiben also das 3×20-Rechteck, das 4×15-Rechteck, das 5×12-Rechteck und das 6×10-Rechteck.

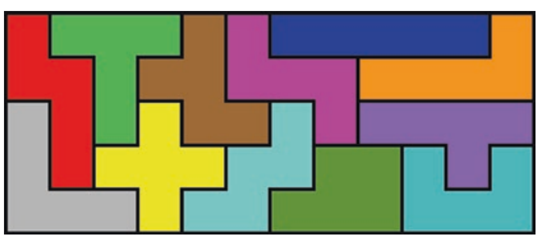
Für die Parkettierung einer Rechteckfläche mit 3 × 20 Feldern gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten.

Dagegen ist die Anzahl der möglichen Parkettierungen der anderen Rechtecke erheblich größer:

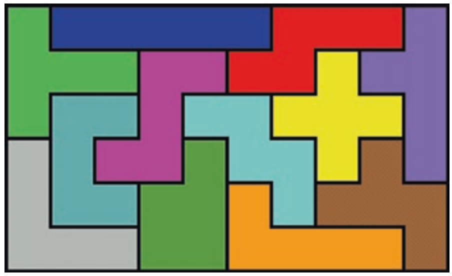
Für die Parkettierung eines 4×15-Rechtecks gibt es 368 Möglichkeiten, davon ist *eine* abgebildet:



Für die Parkettierung eines 5×12-Rechtecks gibt es 1010 Möglichkeiten, davon ist *eine* abgebildet:



Für die Parkettierung eines 6×10-Rechtecks gibt es 2339 Möglichkeiten, davon ist *eine* abgebildet:



Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.17: Obwohl es sehr viele mögliche Parkettierungen gibt, fällt es nicht leicht, eine Belegung der 60 Felder mit genau den 12 Pentomino-Elementen vorzunehmen. Finde außer den abgebildeten Beispielen noch mindestens eine weitere Möglichkeit, ein 4×15-Rechteck, ein 5×12-Rechteck bzw. ein 6×10-Rechteck mit 12 verschiedenen Pentominos zu parkettieren.

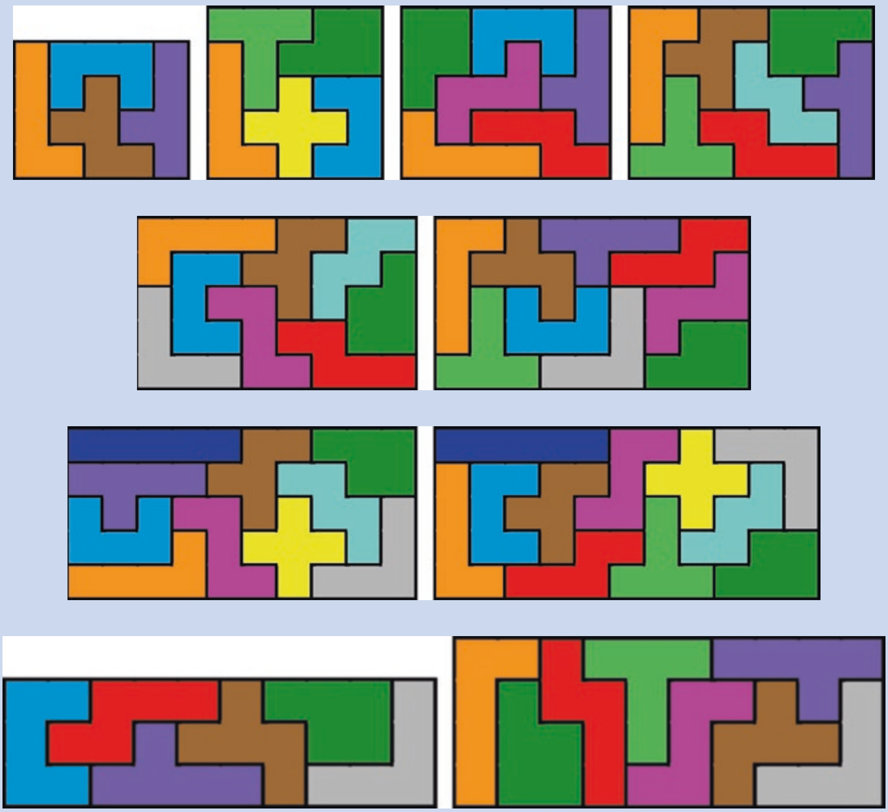
A 1.18: Es gibt 7 Möglichkeiten, eine Rechteckfläche mit 3 × 5 = 15 Feldern mit 3 *verschiedenen* Pentomino-Elementen auszulegen. Finde möglichst viele.

Auch bei anderen Rechteckflächen, deren Flächeninhalt durch 5 teilbar ist, gibt es zahlreiche Möglichkeiten, diese Flächen mit der entsprechenden Anzahl von Pentomino-Elementen auszulegen, wobei keines der Puzzlestücke doppelt verwendet werden darf, vgl. die folgende Tabelle.

Rechteck	4x5	5x5	6x5	7x5	8x5
Anzahl der Möglichkeiten	50	107	541	1396	3408
Rechteck	9x5	10x5	11x5	3x10	4x10
Anzahl der Möglichkeiten	5902	6951	4103	145	2085

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

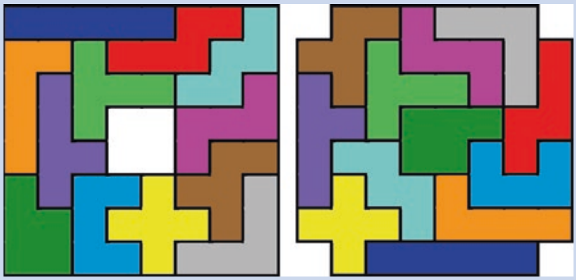
A 1.19: Die folgenden Beispiele zeigen verschiedene Parkettierungen von Rechteckflächen. Finde jeweils mindestens eine weitere Möglichkeit, diese Rechtecke mit *verschiedenen* Pentomino-Elementen auszulegen.



A 1.20: Die folgenden Figuren haben einen Flächeninhalt von 60 FE. Finde außer den abgebildeten Beispielen noch mindestens eine weitere Möglichkeit, diese Figuren mit *verschiedenen* Pentomino-Elementen zu parkettieren.

Hinweise: Es gibt insgesamt 65 Möglichkeiten, eine Quadratfläche mit $8 \times 8 = 64$ Feldern, bei der die 4 Felder in der Mitte ausgespart sind, mit den 12 *verschiedenen* Pentomino-Elementen zu parkettieren.

Es gibt insgesamt sogar 2170 Möglichkeiten, eine Quadratfläche mit $8 \times 8 = 64$ Feldern, bei der die 4 Eckfelder ausgespart sind, mit den 12 *verschiedenen* Pentomino-Elementen zu parkettieren.



A 1.21: Die folgenden Abbildungen zeigen zwei mögliche Raster für das Kalenderblatt eines Monats. Nach Auflegen von 6 geeigneten Pentomino-Elementen auf $5 \times 6 = 30$ Felder bleibt genau ein Feld frei – das heutige Datum!

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	

	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31	

1.3.2 Parkettierung von vergrößerten Pentomino-Figuren durch Pentominos

Wie oben angegeben, werden die verschiedenen Pentominos mit den Buchstaben F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z bezeichnet. Diese Formen kann man vergrößern, nämlich 3-mal so hoch und 3-mal so breit wie die Puzzlestücke selbst. Die vergrößerten „Buchstaben“ enthalten also $3 \times 3 \times 5 = 45$ quadratische Felder.

Um diese 45 Felder zu parkettieren, benötigt man also 9 der 12 Pentomino-Elemente.

Eine besondere Herausforderung ist dann die folgende Aufgabe:

Für die Parkettierung des vergrößerten Pentomino-Elements sollen verschiedene Pentomino-Elemente verwenden werden, aber nicht das „kleine“ Pentomino-Element. Trotz dieser Erschwernis gibt es dennoch etliche Möglichkeiten der Parkettierung. Diese Anzahl kann aus der folgenden Tabelle entnommen werden.

Pentomino-Typ	F	I	L	N	P	T
Anzahl der Möglichkeiten	125	19	113	68	497	106
Pentomino-Typ	U	V	W	X	Y	Z
Anzahl der Möglichkeiten	48	63	91	15	86	131

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.22: In den folgenden Abbildungen ist jeweils ein Beispiel für die Parkettierung der vergrößerten Pentomino-Figuren mit jeweils 9 der übrigen 11 Pentomino-Elemente dargestellt. Finde jeweils noch mindestens eine weitere Möglichkeit der Parkettierung dieser Figuren.