

}essentials{

Jan Swoboda

Grundkurs partielle Differentialgleichungen

Eine Einführung für natur- und
ingenieurwissenschaftliche
Studiengänge



Springer Spektrum

essentials

essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Fachwissen von Springerautor*innen kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials* sind Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autor*innen aller Springer-Verlagsmarken.

Jan Swoboda

Grundkurs partielle Differentialgleichungen

Eine Einführung für natur- und
ingenieurwissenschaftliche
Studiengänge



Springer Spektrum

PD Dr. habil. Jan Swoboda
Mathematisches Institut
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

ISSN 2197-6708

ISSN 2197-6716 (electronic)

essentials

ISBN 978-3-662-67643-1

ISBN 978-3-662-67644-8 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-67644-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2023

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Nikoo Azarm

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Was Sie in diesem *essential* finden können

- Aus der Physik motivierte Einführung in die partiellen Differentialgleichungen Laplace-, Wärmeleitungs- und Wellengleichung
- Zusammenfassende Darstellung der analytischen Hilfsmittel Fourierreihen und Fouriertransformation
- Explizite Ausarbeitung von Lösungen von Anfangs- und Randwertaufgaben in verschiedenen Anwendungsbeispielen
- Herleitung der Grundlösung der Laplacegleichung, der Greenschen Funktionen und des Wärmeleitungskerns und zahlreiche Anwendungen auf Anfangs- und Randwertprobleme
- Lösungsmethoden für die ein- und mehrdimensionale Wellengleichung
- Diskussion der qualitativen Eigenschaften von Lösungen und Darstellung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede der betrachteten Differentialgleichungstypen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Hilfsmittel aus der Analysis	3
2.1	Funktionenräume	3
2.1.1	Normierte Räume und Vollständigkeit	3
2.1.2	Hilberträume	5
2.2	Fourierreihen	8
2.2.1	Das Problem der schwingenden Saite	8
2.2.2	Orthogonalitätsrelationen, reelle und komplexe Fourierreihen	10
2.3	Fouriertransformation	14
2.3.1	Definition und Rechenregeln	14
2.3.2	Der Raum der schnellfallenden Funktionen.	17
3	Laplacegleichung	19
3.1	Physikalische Motivation.	19
3.2	Randwertprobleme.	21
3.2.1	Entwicklung nach Eigenfunktionen.	22
3.2.2	Rechteckgebiete	25
3.2.3	Kreisscheibe.	27
4	Grundlösung der Laplacegleichung und Greensche Funktionen	31
4.1	Herleitung der Grundlösung	31
4.2	Poissonsche Darstellungsformel	36
4.3	Lösung der Poissongleichung auf \mathbb{R}^n	37
4.4	Greensche Funktionen und Anwendungen	38
4.4.1	Definition der Greenschen Funktion eines Gebiets	38