Mathematik im Kontext

David E. Rowe
Klaus Volkert

Jenseits von Flachland

Mathematische Grenzüberschreitungen und ihre Auswirkungen

Springer Spektrum

Mathematik im Kontext

Reihe herausgegeben von

David E. Rowe, Mainz, Deutschland

Klaus Volkert, Bergische Universität Wuppertal, Deutschland

Die Buchreihe Mathematik im Kontext publiziert Werke, in denen mathematisch wichtige und wegweisende Ereignisse oder Perioden beschrieben werden. Neben einer Beschreibung der mathematischen Hintergründe wird dabei besonderer Wert auf die Darstellung der mit den Ereignissen verknüpften Personen gelegt sowie versucht, deren Handlungsmotive darzustellen. Die Bücher sollen Studierenden und Mathematikern sowie an Mathematik Interessierten einen tiefen Einblick in bedeutende Ereignisse der Geschichte der Mathematik geben.

David E. Rowe • Klaus Volkert

Jenseits von Flachland

Mathematische Grenzüberschreitungen und ihre Auswirkungen

Springer Spektrum

David E. Rowe
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mainz, Deutschland

Klaus Volkert
Fakultät für Mathematik
und Naturwissenschaften
Universität Wuppertal
Wuppertal, Deutschland

ISSN 2191-074X ISSN 2191-0758 (electronic)
Mathematik im Kontext
ISBN 978-3-662-66860-3 ISBN 978-3-662-66861-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-66861-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Nikoo Azarm
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recyclebar.

Vorwort

Edwin A. Abbotts „Flachland“ (1884) war in erster Linie eine Gesellschaftskritik. Aber die „Romanze in vielen Dimensionen“ handelt auch von den Grenzen des Vorstellbaren, die vielleicht unüberwindlich scheinen, aber dennoch überwunden werden können. Paradigmatisch wird dies am Beispiel eines Flächenwesens, genannt „ein Quadrat“, erläutert, das allmählich die Beschränkung auf das zweidimensionale Flachland hinter sich lässt. Die nachfolgenden beiden Essays behandeln Fragen im Umkreis dieser Problematik: den Übergang zu mehr als drei Dimensionen in der Geometrie nebst den Reaktionen hierauf, insbesondere der denkwürdige Zöllner-Skandal, sowie die zahlreichen Überlegungen in Literatur und Philosophie, ausgelöst vor allem durch das allgemeine Bekanntwerden der nichteuklidischen Geometrien.

Im ersten Essay „Im Reich der unbegrenzten Möglichkeiten – Die vierte Dimension in Mathematik, Kunst und Philosophie“ von Klaus Volkert geht es um den Schritt in die vierte und in höhere Dimensionen, den die Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, also zu Lebzeiten Abbotts, wagte – analog dem Übergang von „Flachland“ ins „Raumland“ bei Abbott. Ein erster großer Erfolg der neuen Geometrie war, dass es um 1880 herum gelang, die Anzahl der regulären Polytope, also der Analoga der Platonischen Körper, im vierdimensionalen Raum zu bestimmen. Mit diesem überraschenden Ergebnis – es gibt deren bis auf Ähnlichkeit nämlich sechs – sicherte sich die neue Geometrie volles Bürgerrecht, wie Gauß das einmal genannt hatte. Der Nachweis war erbracht, dass sie in der Lage war, genuin geometrische Resultate zu beweisen, dass sie also mehr war als Algebra in geometrischer Einkleidung. Neben den mathematischen und philosophischen Fragen, die dieser Übergang ins unanschauliche Gebiet, insbesondere auf dem Hintergrund der Kantischen Philosophie, aufwarf, kommt die in der Mathematikgeschichte ganz ungewöhnliche Popularität des Konzepts der vierten Dimension ausführlich zur Sprache.

Hierzu verhalf ihm auch ein Skandal, der durch den Leipziger Physiker Karl Friedrich Zöllner um 1880 herum ausgelöst wurde. Dieser versuchte, spiritistische Séancen mit Hilfe der vierten Dimension – gewissermaßen wissenschaftlich – zu erklären: Allen voran das Verknoten oder Entknoten von geschlossenen Fäden, Seilen und dergleichen. Diese

Möglichkeit, Knoten in einem vierdimensionalen Raum aufzulösen, war eine verblüffende Entdeckung der Mathematiker, allen voran Felix Klein, in den 1870er Jahren. Im deutschsprachigen Raum setzte sofort eine breite Diskussion ein, die bis in die Tagespresse ging und sich in allgemeinen Nachschlagewerken niederschlug. Für die Mathematik stellte sich das Problem, wie sie sich gegen solchen Missbrauch zur Wehr setzen sollte. Die Rückkehr ins „Gedankenland", also die Idee, Mathematik sei eine reine Schöpfung des menschlichen Geistes fern aller Wirklichkeit, wurde zur Standardreaktion der Betroffenen. Damit bahnte sich eine Entwicklung an, die im 20. Jahrhundert als sogenannte moderne Mathematik bekannt werden sollte.

Erstaunlich früh tauchte in der Geschichte der höherdimensionalen Geometrie eine Frau auf: Alicia Boole Stott, die sich – entgegen der gängigen Meinung über weibliches Raumvorstellungsvermögen – u.a. durch ihr ausgeprägtes geometrisches Vorstellungsvermögen auszeichnete. Verbindungen ergeben sich hier zu ihrer bemerkenswerten Mutter, Mary Boole Everest, und zum Philosophen der vierten Dimension, Howard Hinton. Für letzteren wie für viele andere Autoren wurde die vierte Dimension eine Metapher für ungeahnte neue Möglichkeiten des Handelns und Denkens – für allgemeine Befreiung durch Aufbruch in und Erkenntnis von höheren Welten.

Das neue Konzept der vierten Dimension fand auch in den Künsten Beachtung, neben der bildenden Kunst, insbesondere dem Kubismus, ist hier natürlich die Literatur zu nennen. Gerade der letztere Aspekt, die Literatur, wird im zweiten Essay „Mathematiker als Schriftsteller und Dichter: Geometrie und Naturphilosophie, 1700-1900" von David Rowe behandelt. Hier geht es vor allem um die vielfältigen Auseinandersetzungen über den Raumbegriff und ab etwa 1870 die mögliche Relevanz der neulich aufgedeckten nichteuklidischen Geometrien. Die Faszination der vierdimensionalen Geometrien im Zeitalter von Abbotts *Flatland* erscheint aus dieser Perspektive als Teil eines breiteren Diskurses, wobei die Akzente innerhalb der britischen und deutschen Kulturkreise ganz verschieden gesetzt wurden. Indem wir Rückschau auf ältere Debatten nehmen, wie z.B. diejenige zwischen Newton (bzw. Clark) und Leibniz in Bezug auf absolute bzw. relative Raumkonzepte, wird deutlich, dass die im ersten Essay ausführlich beschriebene Zöllner-Episode sich durchaus in einen längerfristigen Entwicklungsprozess einordnet, währenddessen die alte Harmonie zwischen der euklidischen Geometrie und einem implizit Newtonschen oder Kantischen physikalischen Raumbegriff langsam zerfiel.

In seinen 1889-1890 gehaltenen Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie beschrieb Felix Klein vier charakteristische Richtungen für deren Rezeption bei Mathematikern wie auch Philosophen. Er selbst hatte in seiner Erstlingsarbeit hierzu einen agnostischen Standpunkt eingenommen, wie er in einem Brief vom 4. Februar 1872 an Wilhelm Fiedler attestierte: „[...] als ich jetzt den Aufsatz schrieb, [schien mir] die Hauptaufgabe, die Sache möglichst klar und durchsichtig darzustellen, vom Einzelnen zum Allgemeinen aufzusteigen und alle nicht gerade mathematischen allgemeinen Betrachtungen über Räume von 4 Dimensionen etc. zu unterdrücken.“ Er nannte später folgende vier Gruppen als typisch für die Zeit um 1890: 1) Kantianer und Orthodoxe; 2) Skeptiker (vor allen Gymnasiallehrer); 3) Rezeptive (insbesondere jüngere Philosophen); 4) Enthusiasten (hier nannte er sowohl W. K. Clifford als auch K. F. Zöllner in einem Zuge, da beide Anhänger eines endlichen Riemannschen Universums waren).

Diese Gliederung passt wohl gut für die Einordnung der Stimmen innerhalb Deutschlands, aber sie übersieht ein wichtiges Phänomen, das zum Verständnis der englischen Mathematik erforderlich ist. Dies wird sofort klar, wenn man die Bedeutung der Universität Cambridge und die Rolle von zwei Autoren, Euklid und Newton, in ihrem Lehrplan berücksichtigt. Selbst der führende Cambridge Mathematiker Arthur Cayley, ein Kenner der Theorie Lobachevskis, hielt an dieser ehrwürdigen Tradition fest. Für ihn wie auch für die überwiegende Mehrheit der britischen Mathematiker war die nichteuklidische Geometrie eine Kuriosität ohne nennenswerte Bedeutung.

Es gab allerdings heftige Debatten über die klassische Geometrie in England, aber diese hatten beinahe nichts mit dem hierzu parallel laufenden Diskurs in Deutschland zu tun. Stellvertretend für das damalige konservative Lager steht im zweiten Essay der Oxford Mathematiker Charles Dodgson, den man besser unter seinem Pseudonym Lewis Carroll kennt, also als den Autor von *Alice im Wunderland* und *Alice im Spiegelland*. Viel weniger bekannt ist sein merkwürdiges Buch *Euclid and his Modern Rivals*, das er 1879 in Form eines Theaterstücks erscheinen ließ und das 1885 in einer zweiten Auflage gedruckt wurde. Trotz des Titels finden wir an keiner Stelle in Dodgsons Buch die leiseste Andeutung zur Existenz von Geometrien, die das Parallelenpostulat Euklids nicht erfüllen. Obwohl manchmal humorvoll geschrieben, merkt der Leser sehr schnell, dass dies kein unterhaltsames Buch sein soll. Denn für Dodgson ging es darum, scharfe Argumente gegen die Kritiker der *Elemente* zu formulieren, und zwar in der festen Überzeugung, dass es überhaupt kein geeigneteres

Lehrbuch für den Geometrieunterricht gebe. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts gewann die Gegenseite in England die Oberhand, womit eine schon lange angestrebte Reform endlich zur Modernisierung der Mathematik in Cambridge führen konnte.

Natürlich gab es zuvor bereits Befürworter der neuen Geometrien in England, allen voran Clifford, aber viele andere Mathematiker betrachten die Ideen von Riemann und Helmholtz nur mit Skepsis. In der Zeit, als Abbotts *Flatland* erschien, nahmen einige Engländer die Debatte in Deutschland über die Geometrie des Raumes zur Kenntnis, aber eher aus der Distanz. Der Logiker Stanley Jevons meinte z.B., es handele sich dabei um die Fortsetzung eines alten Streits zwischen Anhängern von Kants idealistischer Raumlehre und einer anderen Gruppe von Philosophen, die einen empirischen Standpunkt vertraten. Als Vertreter der ersten Gruppe galt der Schriftsteller und Mathematiker Kurd Laßwitz, dessen Werke lange Zeit ziemlich in Vergessenheit gerieten – mit Ausnahme seines Science-Fiction-Romans *Auf zwei Planeten*. Als überzeugter Kantianer bekämpfte er nicht nur die Ansichten von Helmholtz, sondern auch jedwede Vorstellung eines real existierenden vierdimensionalen Raumes. Sein Humor war ein ganz anderer als der von Lewis Carroll, zumal Laßwitz seine Fantasiebilder gerne in Gestalt lustiger Gedichte verfasste und manchmal bei feierlichen Anlässen vorlas. Wir werden ihn jedoch auch von der ernsthaften Seite kennenlernen.

Man findet Stellen in den Schriften von Kurd Laßwitz, die einen unwillkürlich an *Flatland* erinnern, obwohl es zweifelhaft ist, dass er Abbotts Buch jemals in der Hand hielt. Schon im selben Jahr, als es erschien, schrieb er:

> [...] wenn wir bloß eine zweidimensionale Raumanschauung hätten, wenn wir alle Dinge nur auf eine Fläche wie in einem Gemälde projiciert wahrnähmen, nur als Schattenrisse oder Querprofile, so würde ja unsere dreidimensionale Welt uns nur in zwei Dimensionen erscheinen und zahllose Vorgänge in derselben würden uns unerklärt bleiben. Könnte denn nicht unsere Welt wirklich bloß die Projektion einer vierdimensionalen Welt sein? (Laßwitz 1883, 165)

Seine Antwort hierauf fiel klar und eindeutig aus: „Jeder Versuch, andere Räume vorzustellen, hebt die Bedingungen der Erfahrung selbst auf und wird dadurch zum Widersinn“ (ebd.). Natürlich gibt es vielfältige Überschneidungen zwischen den beiden Essays, worauf an ausgewählten Stellen Verweise aufmerksam machen. Während im Essay von K. Volkert der Schwerpunkt auf dem deutschsprachigen Raum liegt, widmet derjenige von D.E. Rowe viel Aufmerksamkeit dem englischsprachigen Raum – vor allem in Hinblick auf die zentrale Rolle der *Elemente* Euklids im britischen Schulsystem, ein auffallendes Merkmal der viktorianischen Kultur.

Falls nicht anders angegeben, stammen die Übersetzungen fremdsprachlicher Texte von den Autoren der vorliegenden Essays. Die Autoren danken Herrn Robert Wengel für die aufwändige Erstellung des Manuskripts, Frau Mirjam Rabe für Hinweise zum Text und den Lektorinnen Frau Annika Denkert und Frau Nikoo Azarm des Springer-Verlags für ihre Unterstützung.

David E. Rowe
(Mainz)
Klaus Volkert
(Wuppertal/Luxemburg)

Inhaltsverzeichnis

Im Reich der unbegrenzten Möglichkeiten – Die vierte Dimension in Mathematik, Kunst und Philosophie

Klaus Volkert[1]

1. Flächenwesen und höhere Dimensionen

Abbotts Buch handelt, mathematisch gesehen, hauptsächlich von der Frage, wie zweidimensionale Wesen Dreidimensionales wahrnehmen und verstehen können. Es ist somit naheliegend, als erstes einen Blick auf die Geschichte der Raumgeometrie zu werfen, also jenes Teils der Geometrie, der sich mit den räumlichen Verhältnissen beschäftigt. Darin enthalten sind natürlich auch diejenigen der Ebene. In Blick auf Abbott ist zudem die vierdimensionale Geometrie von Interesse: Was für Flächenwesen die dritte Dimension, ist für Raumwesen die vierte – auf diese Analogie spielt ja auch das Quadrat an, ohne bei der Kugel auf Verständnis zu treffen.

In der Geschichte der Geometrie war die Raumgeometrie schon früh entwickelt, Euklids „Elemente" (etwa 280 v. u. Z.) behandeln sie ausführlich in den Büchern XI bis XIII. Hier lag keine Grenze für das mathematische Verständnis, wohl aber eine Dimension höher: Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. fand die Geometrie des vier- und mehrdimensionalen Raumes allgemeine Beachtung, diese stellte ganz analog zu „Flachland" das Problem, wie Mathematikerinnen und Mathematiker, also dreidimensionale Wesen, diese Welt verstehen können. Dabei meint „verstehen" mehr als „in der vierdimensionalen Koordinatengeometrie rechnen können", eher so etwas wie „sich anschaulich machen" oder „richtige geometrische Objekte konstruieren". Im Unterschied zu Abbott, der auf die allseits bekannte dritte Dimension zurückgreifen konnte (vgl. seinen Slogan „Nach oben, nicht nach vorne"), war die vierte Dimension gänzlich unbekannt, eine Begrifflichkeit stand zu ihrer Beschreibung nicht zur Verfügung, wie ja auch Abbott richtig bemerkt. Umso wichtiger waren Analogien und Möglichkeiten der zwei- oder dreidimensionalen Veranschaulichung.

Abbott war nicht der erste und nicht der einzige Autor, der sich der Idee von Flächenwesen bediente. Viel Aufmerksamkeit im deutschsprachigen Raum erregte vor allem Hermann Helmholtz mit

[1] Der nachfolgende Text beruht in Teilen auf dem Buch Volkert 2018. Die Schreibweisen in den Zitaten folgen den Originalen.

D. E. Rowe, K. Volkert, *Jenseits von Flachland*, Mathematik im Kontext,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-66861-0_1

seinem Versuch, die Vorstellungswelt von Flächenwesen als Stütze für seine empiristische Auffassung von Geometrie zu verwenden. Bevor wir uns der vierten Dimension zuwenden, folgen hier einige Hinweise zur Geschichte dieser fiktiven Wesen.

Eine der frühesten Erwähnungen der Flächenwesen findet sich in André Marie Ampère's (1775 – 1836) „Essai sur la philosophie des sciences“ (Abhandlung über die Philosophie der Wissenschaften, 1834) in einem Abschnitt, der der Geometrie gewidmet ist:

> Reid hat gezeigt, dass der Mensch, wäre er auf das bloße Sehen reduziert, nur die oberflächliche Ausdehnung von zwei Dimensionen erkennen könnte. Er würde als gerade Linien dasjenige nehmen, was in Wirklichkeit Großkreisbögen auf einer Sphäre sind, deren Mittelpunkt in seinem Auge läge. Die Dreiecke, die er als geradlinige betrachtet, könnten zwei rechte oder sogar drei rechte oder stumpfe Winkel besitzen. Die Geometrie eines derartigen Menschen würde sich sehr von der unsrigen unterscheiden. So treffen sich beispielsweise zwei der Linien, die er gerade nennt, immer in zwei Punkten. Folglich wäre für ihn der Begriff der Parallelität widersprüchlich. (Ampère 1834, S. 67)[2]

Bei Ampère sind die Flächenwesen in ihrer Wahrnehmungsfähigkeit reduzierte Menschen, die auf einer Kugel leben – im Unterschied zu Abbotts Flächenwesen, die in einer Ebene existieren. Virtuelle Flächenwesen treten in G. Th. Fechners (1801 – 1887), Leipziger Naturforscher, Psychologe und Philosoph, satirischem Essay „Der Raum hat vier Dimensionen“ (1846) auf, veröffentlicht unter seinem Pseudonym Dr. Mises. Bei Fechner dienen die Flächenwesen dazu, per Analogie einen Zugang zur vierten Dimension zu eröffnen.

> Man denke sich ein kleines buntes Männchen, das in der camera obscura auf dem Papiere herumläuft; da hat man ein Wesen, was in zwei Dimensionen existiert. Was hindert, ein

[2] Reid a montré que si l'homme était réduit au simple sens de la vue, ne pouvant dès lors connaître que l'étendue superficielle à deux dimensions, et prenant pour des lignes droites ce qui sera réellement de arcs de grand cercles tracés sur une surface sphérique dont le centre sera dans son œil, les triangles qu'il considérait comme rectilignes pourraient avoir deux angles ou même leurs trois angles droits ou obtus, et la géométrie d'un tel homme sera toute différente de la nôtre ; deux de ces lignes qu'il prendrait pour droites se rencontrant, par exemple, toujours en deux points, en sorte que la notion de deux droites parallèles serait contradictoire pour lui.

solches Wesen lebendig zu denken. Haben wir doch früher gesehen, daß sich selbst ein Schattenmann lebendig denken läßt. Daß er es ist, wollen wir hier nicht noch einmal behaupten: es ist genug, es einmal getan zu haben; aber denken kann man sich's doch. Nun, insofern alles Sehen, Hören, Dichten und Trachten eines bloß in zwei Dimensionen existierenden Wesens auch bloß in diesen zwei Dimensionen beschlossen wäre, so würde es natürlich eben so wenig von einer dritten Dimension wissen können, als wir, die wir nur in drei Dimensionen leben, von einer vierten. Das experimentierende Schatten- oder Farbenmännchen würde eben so auf seiner Fläche herumlaufen und vergebens nach der dritten Dimension suchen, eben so vergebens Mikroskope und Fernröhre danach aufspannen, als unser Naturforscher nach der vierten; es kann doch mit dem Blicke sich nicht über die Fläche erheben, sondern nur in der Richtung der Fläche fortblicken. Und das philosophierende Schattenmännchen würde, da seine Begriffe sich unstreitig im Zusammenhange mit seinen Anschauungen bilden würden, eben so wenig über die Zwei als unser Philosoph über die Drei hinauskommen können. Beide würde es also unmöglich halten, daß eine dritte Dimension existiert, daß sich durch einen Punkt mehr als Zwei auf einander senkrechte Gerade ziehen lassen. Sie wüßten absolut nicht, wo sie die dritte anbringen sollten. Und doch existiert diese dritte Dimension. Sie existiert für uns, die selbst eben in drei Dimensionen leben. Wir sind nur Farben- oder Schattenmännchen in drei Dimensionen statt in zweien. Da wir sehen, daß bei der zwei kein Aufhören ist, außer für Wesen, die selbst in der zwei aufhören, ist nicht abzusehen, warum in der Drei ein Aufhören sein sollte, außer für Wesen, die eben auch selbst in der Drei aufhören. Soll etwa die Welt nicht über Drei zählen können? Es ist auch nicht der allergeringste Grund da, warum sie bei Drei aufhören sollte; und so schließe ich nach dem Gesetz des hinreichenden Grundes, daß sie wirklich nicht dabei aufhört. Man überlege doch: sieht denn die dritte Dimension um ein Haar anders aus, als die zweite und erste? Wenn aber keine größere Kunst dazu gehörte, die dritte als die zweite und erste zu schaffen, so wird auch keine größere Kunst dazu gehören, die vierte und fünfte als die dritte und zweite zu schaffen. Wo hört die Natur sonst auf einen Anfang fortzusetzen, außer

> wenn ihr die Kraft gebricht. Aber die dritte Dimension ist noch nicht kürzer, als die beiden andern. Man sieht, wenn wir nur erst die vierte Dimension haben, so haben wir auch sofort die fünfte, sechste, siebente, bis zur unendlichsten Dimension; wir können in Dimensionen wahrhaft schwelgen, sie wie Stecknadeln fabrizieren, ihr Sparrwerk ausbauen, soweit wir wollen. Sonst dünkte uns eine Dimension eine absonderliche Sache; nun werden die Dimensionen spottwohlfeil werden, und wenn man in ganz Baiern zu jeder Hopfenstange, und in Österreich zu jedem Schlagbaum, und in Rußland zu jedem Knutenstrick eine neue Dimension verwendete: es würde nicht an Stoff zu eben so viel neuen fehlen. (Fechner 1846, S. 24 – 25)

Obwohl Fechner den Schritt zur vierten Dimension motivieren will, erklärt er seinen dreidimensionalen Lesern die Verhältnisse des vierdimensionalen Raums nicht konkret-inhaltlich – dennoch eine erstaunlich frühe Referenz auf den vierdimensionalen Raum. An einer Stelle gibt es allerdings eine konkrete Anspielung auf die höherdimensionale Geometrie:

> Wen ich in Wahrheit bedauere, sofern zu den drei Dimensionen noch eine vierte kommen sollte, sind die Schüler, die schon jetzt erschrecken, wenn sie von der Ebene der Planimetrie auf den Berg der Stereometrie steigen sollen; nun steht ihnen sogar noch eine Geometrie von vier Dimensionen, ein Pelion auf dem Ossa, bevor. Was werden das für perspektivische Zeichnungen sein müssen, wenn es gelten wird zu beweisen, daß das Prisma von vier Dimensionen sich in vier Pyramiden gleichen Inhalts zerlegen lasse. [. . .] Nun sie mögen immerhin ihre sphärische Trigonometrie für die Sphäre von vier Dimensionen bereit halten, denn jetzt werde ich die vierte Dimension gleich bringen. (Fechner 1846, S. 23)

Die Flächenwesen spielen bei Fechner eine untergeordnete Rolle, Hauptziel seiner satirischen Ausführungen sind die Philosophen. Der Schatten, ein Flächenwesen, das Fechner anführt, ist das zweidimensionale Abbild eines dreidimensionalen Objekts. Er tritt schon im ersten Essay von Fechners Sammlung „Vier Paradoxa“ unter dem Titel „Der Schatten ist lebendig“ auf:

> Wir leben in drei Dimensionen; er [der Schatten; K. V.] begnügt sich mit zweien; aber das macht ihn nur weniger schwerfällig. (Fechner 1846, S. 4)

An anderer Stelle heißt es:

> Mit einem Worte, ich halte den Schatten für einen platten Mohren, und ich sehe nur Gründe für sein Leben, aber keine gegen sein Leben. (Fechner 1846, S. 14)

Große Bekanntheit verschaffte, wie bereits erwähnt, Hermann Helmholtz (1821-1894), der „Bismarck der Wissenschaft", den Flächenwesen, indem er sie in einer Rede und in einem darauf aufbauenden Aufsatz mit dem Titel „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome"[3] auftreten ließ. Es ging Helmholtz vor allem um sein erkenntnistheoretisches Anliegen, nämlich um die These, die Axiome der Geometrie seien empirischen Ursprungs: Andere Erfahrungen, andere Geometrien: eine Position, die ja auch Abbott teilte.

Für Helmholtz, den Sinnesphysiologen[4], war es naheliegend, auf die mit den empirischen Erfahrungen verbundenen sinnlichen Eindrücke abzuheben: Er wollte nachweisen, dass zweidimensionalen Wesen mit anderen Erfahrungen als den unsrigen eine ebene Geometrie aufbauen würden, die von unserer Euklidischen abweicht. Als Kandidaten für solche alternative Geometrien zieht Helmholtz die sphärische Geometrie heran sowie die hyperbolische[5]; letztere hatte er gerade erst kennengelernt durch eine Mitteilung des italienischen Mathematikers E. Beltrami (vgl. Helmholtz 1865, 1868 und 1869). Während es für Helmholtz relativ einfach war, die Verhältnisse auf der Oberfläche einer Kugelfläche aus der Sicht von darin lebenden zweidimensionalen Lebewesen zu schildern, musste er für den Fall der hyperbolischen Geometrie zu einem Trick greifen: dem Spiegel, genauer gesagt, dem Konvexspiegel.[6] Eine geometrische Lösung des Problems liefert die Pseudosphäre; Bewohner dieser Fläche würden nach Helmholtz eine hyperbolische Geometrie entwickeln. Zu interessanten Spekulationen gibt die Frage Anlass, was wohl Helmholtz

[3] Die Geschichte dieses Textes ist verwickelt. Nach den Angaben in „Vorträge und Reden", Band 1 beruht er auf einem ansonsten nicht überlieferten Vortrag Helmholtz', gehalten im Dozentenverein zu Heidelberg 1870. Gedruckt wurde der Text erstmals 1870 in einer Übersetzung ins Englische, 1876 dann nochmals in „Mind". Ob Abbott diese Übersetzung kannte, ist wohl unklar.

[4] Helmholtz verfügte durchaus über tiefe Kenntnisse der Mathematik, was nicht nur seine Ausführungen zur Geometrie belegen sondern auch eine wichtige Arbeit zur Wirbeltheorie (1858).

[5] Helmholtz verwendet diese Bezeichnung, die F. Klein 1872 einführte, noch nicht. Er spricht von der Geometrie Lobatschewskys (Bolyai bleibt außen vor bei ihm) oder auch von der Geometrie auf der Pseudosphäre.

[6] Vgl. Helmholtz 1896, 24 – 30.

zu unseren modernen Hilfsmitteln, virtuelle Welten zu erzeugen, gesagt hätte. Der Spiegel spielt auch in der Literatur eine wichtige Rolle, um seltsame Verhältnisse anschaulich zu machen.

Lebewesen auf einer Kugel müssten die sphärische Geometrie ausbilden: Geraden[7] wären für sie Großkreise und hätten somit endliche Länge; zudem würden sie sich schließen. Wären die Lebewesen auf einer Eifläche unterwegs, so ergäbe sich eine komplizierte Geometrie, da diese Fläche ja unterschiedliche Krümmungen aufweist. Besonders interessant ist aber der Fall der hyperbolischen Geometrie. Zu dieser gelangen Flächenwesen, die ihr Leben auf einer Pseudosphäre fristen.

In einer Art Fazit tauchen dann die Flächenwesen bei Helmholtz wieder auf:

> Wir als Bewohner eines Raumes von drei Dimensionen und begabt mit Sinneswerkzeugen, um alle diese Dimensionen wahrzunehmen, können uns die verschiedenen Fälle, in denen flächenhafte Wesen ihre Raumanschauung auszubilden hätten, allerdings anschaulich vorstellen, weil wir zu diesem Ende nur unsere eigenen Anschauungen auf ein engeres Gebiet zu beschränken haben.[8] Anschauungen, die man hat, sich wegdenken ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorstellen ist sehr schwierig. Wenn wir deshalb zum Raume von vier Dimensionen übergehen, so sind wir in unserem Vorstellungsvermögen gehemmt durch den Bau unserer Organe und die damit gewonnen Erfahrungen, welche nur zu dem Raum passen, in dem wir leben. (Helmholtz 1896, S. 15)

Nach Helmholtz folgt aus Aufbau und Funktionsweise unserer Sinnesorgane, dass der vierdimensionale Raum prinzipiell unanschaulich ist; um sich ihm zu nähern, bietet sich die analytische Geometrie als Ausweg an, da sie ohne Anschauung auskommt.

> Da unsere Mittel sinnlicher Anschauung sich nur auf einen Raum von drei Dimensionen erstrecken, und die vierte Dimension nicht bloss eine Abänderung von Vorhandenem,

[7] Diese werden von Helmholtz als „geradeste Linien“ eingeführt, was Geodätische bedeutet, d.h. kürzeste Verbindungen. Fechner sprach von Großkreisen, wie auch heute noch üblich.

[8] Demgegenüber wurde auch oft die These vertreten, dass die zweidimensionale Geometrie für Menschen eine reine Abstraktion sei, also keineswegs „einfach“ zu erhalten ist, wie Helmholtz behauptet.

> sondern etwas vollkommen neues wäre, so befinden wir uns schon wegen unserer körperlichen Organisation in der absoluten Unmöglichkeit, uns eine Anschauungsweise einer vierten Dimension vorzustellen. (Helmholtz 1896, S. 28 – 29)

Als Helmholtz dies schrieb, waren ihm (vermutlich) noch keine materialen Modelle vierdimensionaler Körper bekannt; diese wurden erst um 1880 herum populär.

Man beachte, dass auch Helmholtz' Flächenwesen nicht in einer euklidischen Ebene leben, also verschieden sind von denen Abbotts.

Auch H. Hinton, der „Philosoph der vierten Dimension“, auf den wir noch zu sprechen kommen werden, hat den Flächenwesen wie in den Anmerkungen zu Abbotts Buch ausführlich geschildert, zwei Geschichten mit den Titeln „A plane world“ (1880) und „An Episode of Flatland“ (1908) gewidmet. Sowohl von ihnen als auch von der Analogie machte er – aber auch andere Autoren - ausgiebigen Gebrauch, wie wir sehen werden.

2. Der Zauberstab der Analogie

Analogien spielen eine wichtige Rolle bei der Erkundung der vierten Dimension, ähnlich wie beim Versuch des Quadrats, die dritte Dimension zu verstehen. Betrachtet man beispielsweise die Anzahl der Ecken von Strecke, Quadrat und Würfel, findet man die Zahlen 2, 4 und 8. Also sollte der Hyperwürfel doch wohl 16 Ecken haben – unterstellt wird damit, dass es sich um eine geometrische Folge handelt. Ähnlich mit der Anzahl der Kanten: 1, 4 und 12. Aus Intelligenztests sind solche Aufgaben wohlbekannt, die Frage lautet „Wie geht es weiter?“. Die Antwort hier ist 32.

Allerdings muss man sich davor hüten, die Dimensionsanalogie unkritisch zu verwenden, denn die Vorgabe einiger Zahlen am Anfang legt ja noch keine ganze – heißt: unendliche - Folge fest, obwohl das die Tests suggerieren. Dass Vorsicht angebracht ist, macht die Anzahl der regulären Polytope deutlich: In der Ebene existieren unendlich viele reguläre Polygone, im Raum gibt es fünf reguläre Polyeder, vierdimensional sechs reguläre Polytope und höherdimensional nur noch drei – Konvexität stets unterstellt. Ein anderes Gegenbeispiel findet sich bei Coxeter (Coxeter 1973, 119). Der Umfang eines Kreises beträgt $2r\pi$, die Oberfläche einer Kugel ist $4r^2\pi$. Also würde man per Analogie erwarten, dass die Oberfläche einer Hypersphäre $6r^3\pi$ (oder vielleicht auch $8r^3\pi$) betragen sollte. Das ist aber falsch, sie ist $2r^3\pi^2$.