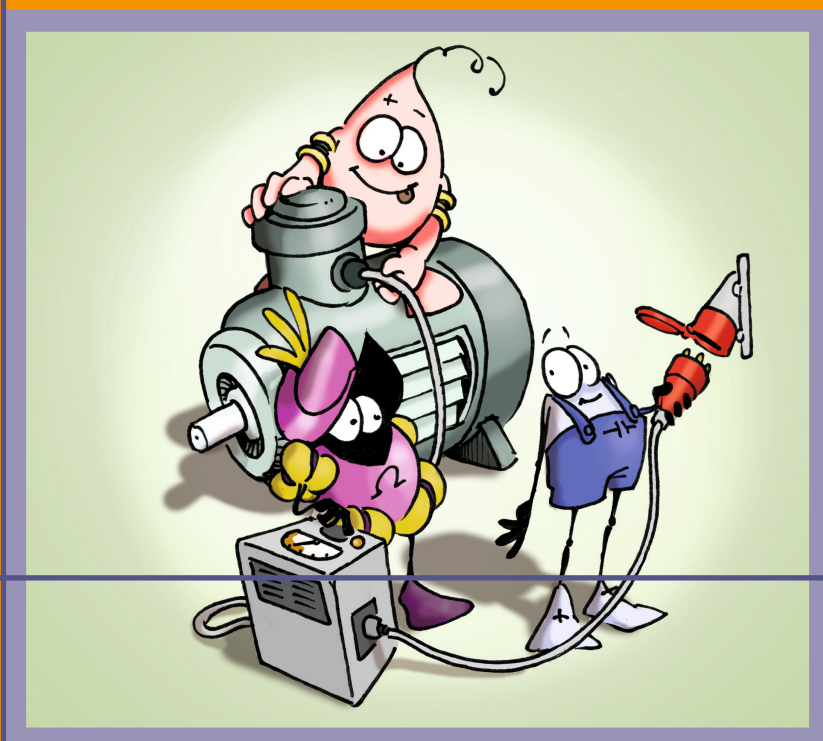


Christian Kral



# Grundlagen der Antriebstechnik

Ein einführendes Lehrbuch



HANSER







**Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial.

Geben Sie auf [plus.hanser-fachbuch.de](http://plus.hanser-fachbuch.de) einfach diesen Code ein:

plus-4K5en-Z3ntr



**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)



Christian Kral

# Grundlagen der Antriebstechnik

Ein einführendes Lehrbuch

HANSER

Der Autor:

**Dipl.-Ing. Dr. Christian Kral** lehrt am Technologischen Gewerbemuseum (TGM), Wien/Österreich. Sein Fachgebiet sind elektrische Maschinen und Antriebe einschließlich deren Modellbildung und Simulation.



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2023 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelbild und Illustrationen: Michi Fleischmann, MF-Illustrationen, <https://www.cromagnon.at>

Satz: Christian Kral, mit LaTeX

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47375-1

E-Book-ISBN 978-3-446-47820-6

# Vorwort

Zur elektrischen Antriebstechnik gibt es viele gute Bücher auf hohem und damit meist universitärem Niveau. Ebenso gibt es eine Reihe von Lehrbüchern die eine Fülle an Überblickswissen vermitteln, mit wenig Mathematik und Hintergrund. Der Platz dazwischen ist ziemlich leer. Mit diesem Buch soll dieser Platz gefüllt werden, damit der Einstieg in die Antriebstechnik für angehende Ingenieurinnen und Ingenieure gelingt. Dabei folge ich einem einfachen Prinzip: Das grundlegende Verständnis ist das Wichtigste. Es geht um die Grundlagen. Wer die Grundlagen versteht, kann sich alles andere erarbeiten.

Sobald man in die Welt der elektrischen Antriebstechnik eintaucht, betritt man eine neue, fremde Welt. Sich in dieser Welt mit ihren Begriffen und Darstellungen zurechtzufinden ist schwierig. Daher ist es meiner Ansicht nach wichtig, gute Vorstellungen zu entwickeln. Erst wenn ich mir etwas gut vorstellen kann, kann ich es verstehen und dann auch damit arbeiten. Dafür braucht es auch gute Bilder. Einen besonderen Beitrag dazu leisten in diesem Buch die drei Figuren Farad, Henry und Ohm. Sie helfen mit, technische Sachverhalte und Zusammenhänge in Illustrationen zu veranschaulichen und auch ein bisschen unterhaltsam darzustellen.

Ich habe in diesem Lehrbuch die Inhalte oft ausgehend von Bildern entwickelt. Zusätzlich wollte ich ausreichend Erläuterung bereitstellen, ganz im Sinne eines Lehrbuchs. Daher ist dieses Lehrbuch auch sehr textlastig. Um monoton erscheinende Textblöcke zu vermeiden, habe ich die Texte meist stark strukturiert, übersichtlich gestaltet und mit Illustrationen aufgelockert.

Ja, ich bin ein Formalist. Darum ist es mir auch wichtig, Begriffe möglichst klar zu definieren und zu verwenden. Ebenso habe ich eine möglichst einheitliche Bildsprache bei den Ersatzschaltbildern und Diagrammen umgesetzt. Formelzeichen sind in einer möglichst vereinheitlichten Form verwendet, wodurch sich auch einige Abweichungen gegenüber der klassischen Literatur ergeben. So gesehen breche ich auch mit einigen Konventionen zugunsten einer konsistenten Darstellung der Inhalte.

Mein grundsätzlicher Zugang zur elektrischen Antriebstechnik ist sehr mathematisch geprägt. Erst durch die Mathematik verstehe ich persönlich, wie etwas funktioniert. Gleichzeitig weiß ich, dass das so nicht immer zumutbar ist. Dennoch ist es aus meiner Sicht wichtig, grundlegende Berechnungen durchführen zu können, da die mathematischen Gleichungen wesentliche Zusammenhänge verknüpfen und sichtbar machen.

In diesem Lehrbuch finden sich praktisch keine Übungsaufgaben und Rechenbeispiele. Damit Übung jedoch die Meisterin und den Meister macht, gibt es dennoch viele Aufgaben

zu diesem Lehrbuch, die online zur Verfügung stehen. Auf der ersten Seite dieses Buches steht der Code, den Sie einfach auf <https://plus.hanser-fachbuch.de> eingeben. Sie kommen damit zur Online-Plattform, auf der alle Aufgaben in LeTTo bereitgestellt sind. Diese Aufgaben sind frei verfügbar und können daher auch auf dem LeTTo-Server einer beliebigen Bildungseinrichtung uneingeschränkt verwendet und modifiziert werden.

Dieses Buch enthält Fehler, so wie andere Bücher auch. Da ich ein großer Befürworter von transparenten Prozessen bin, gibt es die Möglichkeit, mit mir in Angelegenheiten dieses Lehrbuchs über <https://github.com/christiankral/Grundlagen-der-Antriebstechnik> in Kontakt zu treten. Dazu gehören beispielsweise Fehler, die sich eingeschlichen haben, Unklarheiten, die bereinigt werden sollten, oder Probleme mit LeTTo-Aufgaben. Um auf GitHub ein neues »Issue« zu einem Anliegen zu erstellen, ist es einmalig erforderlich, einen kostenfreien GitHub-Account anzulegen.

Meinem Illustrator und gutem Freund, Michi Fleischmann, danke sehr für die – aus meiner Sicht – grandiose Umsetzung der drei Figuren in den vielen unterschiedlichen Szenen und Situationen. Besonders erfreulich waren immer die Augenblicke, als wieder Illustrationen fertiggestellt waren und in das Manuskript eingearbeitet werden konnten.

Ein großes Dankeschön geht an meine Kollegen Thomas Jäger, Norbert Salomon und Franz Raschbacher für die vollständige und überaus gründliche Durcharbeitung des Manuskripts. Ihre kritischen Anmerkungen haben zu vielen tiefgehenden Diskussionen geführt, die allesamt zum guten Gelingen des Buchs beigetragen haben. Ganz besonders danke ich auch Anton Haumer, Peter Macheiner, Daniel Asch, Wolfgang Brandl und Günter Mika für die inhaltlich wichtigen Rückmeldungen und Gespräche.

Ganz herzlich danke ich meinem Schüler Julian Chirila für seine differenzierte Auseinandersetzung mit den technischen Inhalten und den Formulierungen dieses Lehrbuchs. Seine genauen und kritischen Rückmeldungen waren für mich im Erstellungsprozess des Manuskripts von hohem Wert.

Dank der freundlichen Unterstützung durch viele Firmen, ist es möglich, sehr hochwertige technische Fotos in diesem Lehrbuch zu verwenden. Diese Firmen sind in den Bildunterschriften zu den Fotos genannt. Den Firmen mitsamt ihren Mitarbeitern, die mich tatkräftig unterstützt haben, möchte ich auch ein besonderes Dankeschön aussprechen.

Meinen Lektoren Frank Katzenmayer und Tyll Leyh vom Carl Hanser Verlag danke ich für die stets konstruktive und gute Zusammenarbeit.

Lichtenegg, im Mai 2023

Christian Kral

# Inhalt

Schreibweisen und Gezeichnetes .....	1
<b>1 Grundlegendes Handwerkszeug .....</b>	<b>5</b>
1.1 Trigonometrie .....	5
1.1.1 Winkel .....	6
1.1.2 Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen .....	7
1.1.3 Allgemeines Dreieck .....	11
1.2 Vektorrechnung .....	12
1.2.1 Zweidimensionale Vektoren .....	12
1.2.2 Dreidimensionale Vektoren .....	14
1.3 Komplexe Rechnung .....	21
1.4 Bezugspfeile .....	25
1.5 Einphasenwechselstrom .....	27
1.5.1 Komplexe Effektivwert-Zeitzeiger .....	27
1.5.2 Impedanz und Admittanz .....	28
1.5.3 Leistungsbegriffe .....	31
1.6 Drehstrom .....	34
1.6.1 Sternschaltung .....	35
1.6.2 Dreieckschaltung .....	36
1.6.3 Leistungsbegriffe .....	36
1.7 Leistungselektronik .....	37
1.7.1 Bauelemente .....	38
1.7.2 Grundlegende Kennwerte periodischer Größen .....	40
<b>2 Mechanik .....</b>	<b>43</b>
2.1 Statik .....	43
2.1.1 Kraft .....	44
2.1.2 Axiome der Statik .....	46

2.1.3	Zentrales ebenes Kraftsystem .....	48
2.1.4	Gewichtskraft .....	48
2.1.5	Äußere und innere Kräfte .....	49
2.1.6	Kraftübertragungselemente .....	51
2.1.7	Auflager .....	52
2.1.8	Drehmoment .....	53
2.1.9	Allgemeines ebenes Kraftsystem .....	56
2.1.10	Steigung .....	56
2.1.11	Reibung .....	58
2.1.12	Statischer Fahrwiderstand .....	61
2.2	Kinetik .....	62
2.2.1	Translatorische Kinetik .....	62
2.2.2	Rotatorische Kinetik .....	68
2.2.3	Elemente translatorischer und rotatorischer Systeme .....	75
2.2.4	Gemischt translatorische und rotatorische Kinetik .....	80
<b>3</b>	<b>Betriebsumfeld .....</b>	<b>81</b>
3.1	Klassifikation .....	82
3.2	Ausführungsformen .....	84
3.2.1	Baugröße und Flanschgröße .....	84
3.2.2	International Mounting .....	85
3.2.3	Schutzart .....	86
3.3	Verluste, Erwärmung, Kühlung .....	87
3.3.1	Verluste in elektrischen Maschinen .....	87
3.3.2	Verluste in Leistungselektronik .....	88
3.3.3	Wirkungsgradklassen von Drehstrommotoren .....	89
3.3.4	Wärmetransport und Wärmespeicherung .....	90
3.3.5	Wärmeklasse .....	93
3.3.6	Betriebsarten elektrischer Maschinen .....	94
3.3.7	Überlast .....	96
3.3.8	Kühlung elektrischer Maschinen .....	98
3.4	Typenschild .....	101
3.5	Normen .....	102
<b>4</b>	<b>Magnetfeld .....</b>	<b>107</b>
4.1	Feldvektoren .....	107
4.2	Magnetischer Widerstand .....	109
4.3	Durchflutungssatz .....	111
4.4	Induktionsgesetz .....	113



4.5	Induktivität .....	119
4.6	Lorentzkraft .....	119
4.7	Eisenverluste .....	120
<b>5</b>	<b>Einphasen-Transformator .....</b>	<b>123</b>
5.1	Idealer Transformator .....	123
5.1.1	Physikalisches Modell .....	123
5.1.2	Bauformen, Aufbau und Begriffe .....	127
5.1.3	Transformation von Impedanzen .....	130
5.2	Realer Transformator .....	131
5.2.1	Physikalisches Modell .....	131
5.2.2	Bemessungsgrößen .....	133
5.2.3	Allgemeiner Belastungszustand .....	134
5.3	Kurzschlussimpedanz .....	135
5.3.1	Kappsches Dreieck .....	137
5.3.2	Spannungsänderung bei Belastung .....	138
5.3.3	Kurzschlussspannung .....	139
5.3.4	Dauerkurzschlussstrom .....	140
5.4	Parameterbestimmung .....	140
5.4.1	Kurzschlussversuch .....	141
5.4.2	Leerlaufversuch .....	142
5.4.3	Typenschild .....	144
5.4.4	Leistungsbilanz und Wirkungsgrad .....	144
5.5	Besondere Ausführungsformen .....	146
5.5.1	Dreiwicklungs-Transformator .....	147
5.5.2	Transformator mit Anzapfung .....	147
5.5.3	Spannungswandler .....	148
5.5.4	Stromwandler .....	149
5.5.5	Spartransformator .....	150
5.5.6	HGÜ-Transformator .....	152
5.6	Besonderheiten .....	153
5.6.1	Parallelbetrieb .....	153
5.6.2	Magnetisierungsstrom .....	154
5.6.3	Einschaltstromstoß .....	155
5.6.4	Stoßkurzschlussstrom .....	156

<b>6</b>	<b>Drehstrom-Transformator</b> .....	<b>157</b>
6.1	Aktivteil .....	157
6.1.1	Eisenkern .....	157
6.1.2	Wicklung .....	160
6.2	Kühlung .....	162
6.3	Wicklungsverschaltung .....	164
6.3.1	Klemmenbezeichnung .....	165
6.3.2	Bemessungsgrößen .....	166
6.3.3	Spannungsübersetzung .....	167
6.3.4	Schaltgruppe .....	167
6.4	Typenschild .....	172
6.5	Ersatzschaltbild .....	173
6.5.1	Idealer Transformator .....	174
6.5.2	Transformator mit Kurzschlussimpedanz .....	175
6.6	Asymmetrische Belastung .....	175
6.6.1	Übersicht .....	176
6.6.2	Einphasig belasteter Yyn-Transformator .....	176
6.7	Besonderheiten .....	178
6.7.1	Parallelbetrieb .....	178
6.7.2	Verteiltransformator mit Laststufenschalter .....	179
6.7.3	Dreiwicklungs-Transformator .....	181
6.7.4	Phasenschieber-Transformator .....	181
6.7.5	Prüfung .....	184
<b>7</b>	<b>Gleichstrommaschine</b> .....	<b>185</b>
7.1	Aufbau und Wirkungsweise .....	185
7.1.1	Prinzip .....	186
7.1.2	Technische Umsetzung .....	191
7.1.3	Ankerwicklung .....	194
7.1.4	Erregerwicklung .....	195
7.1.5	Feldverteilung .....	196
7.1.6	Kommutierung und Wendepolwicklung .....	199
7.1.7	Ankerrückwirkung .....	201
7.2	Modellbildung .....	203
7.2.1	Klemmenbezeichnung .....	203
7.2.2	Symbole und Schaltungen .....	204
7.2.3	Modell und Ersatzschaltbild .....	206
7.2.4	Leistungsbilanz .....	210

7.2.5	Typenschild und Bemessungsgrößen .....	214
7.2.6	Berechnete Bemessungsgrößen .....	214
7.2.7	Bauvolumen .....	215
7.3	Betriebsverhalten .....	216
7.3.1	Ein- und Ausschalten .....	216
7.3.2	Permanentmagnetmaschine .....	217
7.3.3	Vier-Quadranten-Betrieb .....	221
7.3.4	Fremderregte Gleichstrommaschine .....	223
7.3.5	Wirksame Windungszahl .....	227
7.3.6	Nebenschlussgenerator .....	229
7.3.7	Reihenschlussmaschine .....	230
7.3.8	Universalmaschine .....	231
<b>8</b>	<b>Gleichstromsteller .....</b>	<b>233</b>
8.1	Tiefsetzsteller .....	233
8.2	H-Brücke .....	237
<b>9</b>	<b>Netzgeführter Gleichrichter .....</b>	<b>241</b>
9.1	M1U-Gleichrichter .....	242
9.2	M1C-Gleichrichter .....	244
9.3	B2U-Gleichrichter .....	246
9.4	B2C-Gleichrichter .....	248
9.5	B6U-Gleichrichter .....	251
9.6	B6C-Gleichrichter .....	253
<b>10</b>	<b>Drehfeldmaschine .....</b>	<b>257</b>
10.1	Grundlegende Eigenschaften .....	258
10.2	Erzeugung eines Drehfelds .....	259
10.2.1	Rotierender Permanentmagnet .....	260
10.2.2	Drehfeld einer Drehstromwicklung .....	262
10.2.3	Ideale Drehfeldmaschine .....	264
10.2.4	Reale Drehfeldmaschine .....	265
10.3	Drehstromwicklung .....	266
10.3.1	Kenngrößen .....	268
10.3.2	Typenschild .....	272
10.3.3	Berechnete Bemessungsgrößen .....	273
10.3.4	Klemmenkasten .....	274
10.3.5	Polumschaltbare Wicklung .....	274
10.4	Raumzeiger .....	275

10.4.1	Rücktransformation .....	278
10.4.2	Leistung und Drehmoment .....	278
10.4.3	Bezogene Raumzeiger .....	279
10.5	Bauvolumen .....	280
<b>11</b>	<b>Asynchronmaschine .....</b>	<b>281</b>
11.1	Aufbau .....	281
11.1.1	Kurzschlussläufer .....	281
11.1.2	Schleifringläufer .....	284
11.2	Grundlegende Eigenschaften .....	286
11.2.1	Wirkungsweise .....	286
11.2.2	Ersatzschaltbild .....	288
11.2.3	Eigenschaften des Drehfelds .....	290
11.2.4	Typenschild und Bemessungsgrößen .....	291
11.2.5	Leistungsbilanz .....	292
11.3	Vereinfachtes Ersatzschaltbild .....	295
11.3.1	Leistung und Verluste .....	295
11.3.2	Streuung und Rotorzeitkonstante .....	296
11.3.3	Bemessungsgrößen .....	297
11.4	Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer am Netz .....	297
11.4.1	Statorstromortskurve .....	298
11.4.2	Betriebskennlinien .....	301
11.4.3	Stromverdrängung und Netzanlauf .....	307
11.4.4	Strombegrenzung beim Netzanlauf .....	311
11.4.5	Drehzahlstellung .....	315
11.5	Parameterbestimmung .....	316
11.5.1	Kurzschlussversuch .....	316
11.5.2	Leerlaufversuch .....	318
11.5.3	Übersetzungsverhältnis .....	320
11.6	Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer am Stromrichter .....	320
11.6.1	Ersatzschaltbild .....	321
11.6.2	Betriebskennlinien .....	322
11.6.3	Grenzkennlinien .....	325
11.6.4	Vergleich Netz- und Stromrichterbetrieb .....	328
11.7	Asynchronmaschine mit Schleifringläufer am Netz .....	329
11.7.1	Externe Rotorwiderstände .....	330
11.7.2	Betriebskennlinien .....	330
11.8	Doppelt gespeiste Asynchronmaschine .....	332

11.8.1	Leistungsbilanz .....	333
11.8.2	Vergleich von Schleifringläufer-Maschinen mit externen Rotorwiderständen und doppelter Speisung .....	335
11.9	Einphasen-Asynchronmaschine .....	336
11.9.1	Drehstromasynchronmaschine im einphasigen Betrieb .....	337
11.9.2	Asynchronmaschine mit Haupt- und Hilfswicklung .....	338
<b>12</b>	<b>Synchronmaschine .....</b>	<b>339</b>
12.1	Aufbau .....	340
12.1.1	Vollpolläufer mit elektrischer Erregung .....	341
12.1.2	Schenkelpolläufer mit elektrischer Erregung .....	343
12.1.3	Erregersystem .....	345
12.1.4	Permanentmagnetläufer .....	347
12.1.5	Reluktanzläufer .....	349
12.2	Grundlegende Eigenschaften .....	349
12.2.1	Rotorfestes Koordinatensystem .....	349
12.2.2	Ersatzschaltbild bei magnetisch symmetrischem Rotor .....	351
12.2.3	Leistungsbilanz .....	353
12.2.4	Vereinfachtes Ersatzschaltbild bei magnetisch symmetrischem Rotor ..	356
12.3	Vollpolmaschine am Netz .....	356
12.3.1	Typenschild und Bemessungsgrößen .....	356
12.3.2	Polradwinkel .....	357
12.3.3	Betriebszustände .....	358
12.3.4	Zeigerdiagramme .....	360
12.3.5	Betriebskennlinien .....	362
12.3.6	Synchronisierung .....	367
12.4	Vollpolgenerator im Inselbetrieb .....	368
12.5	Schenkelpolmaschine am Netz .....	369
12.5.1	Vereinfachte Gleichungen .....	369
12.5.2	Betriebskennlinien .....	370
12.6	Kennlinien bei variabler Erregung .....	372
12.6.1	Leerlaufversuch .....	372
12.6.2	Kurzschlussversuch .....	373
12.6.3	Leerlauf-Kurzschlussverhältnis .....	374
12.7	Permanentmagnet-Maschine am Stromrichter .....	375
12.7.1	Vereinfachte Gleichungen .....	375
12.7.2	Feldorientierte Regelung .....	377
12.7.3	Betriebskennlinien .....	378

12.7.4	Grenzkennlinien .....	382
12.7.5	Bürstenlose Gleichstrommaschine .....	383
12.8	Synchronmaschine mit Reluktanzläufer am Stromrichter .....	383
12.8.1	Betriebsseigenschaften .....	384
12.8.2	Betriebskennlinien .....	384
12.8.3	Vergleich mit Kurzschlussläufer-Asynchronmaschine .....	386
<b>13</b>	<b>Selbstgeführter Stromrichter .....</b>	<b>387</b>
13.1	Maschinenstromrichter .....	388
13.2	Pulsmuster .....	391
13.2.1	Vollblockbetrieb .....	392
13.2.2	Unterschwingungsverfahren .....	393
13.2.3	Raumzeigermodulation .....	397
13.3	Netzstromrichter .....	399
<b>A</b>	<b>Technologievergleich .....</b>	<b>403</b>
A.1	Vergleich von elektrischen Maschinen .....	403
A.2	Vergleich von Netzgleichrichtern für den Umrichterbetrieb .....	405
	<b>Literatur .....</b>	<b>407</b>
	<b>Stichwortverzeichnis .....</b>	<b>411</b>

# Schreibweisen und Gezeichnetes

## ■ Allgemeines

**Wichtige Begriffe** werden *kursiv* geschrieben.

**Erweitertes Wissen.** Kennzeichnet Inhalte, die über das Grundlegende hinaus gehen.

**Physikalische Größen** werden kursiv dargestellt. Sie bestehen in aller Regel aus einem Zahlenwert und einer in gerader Schrift gesetzten Einheit. Die Momentanwerte elektrischer Größen werden als Kleinbuchstaben geschrieben, ihre Effektivwerte mit Großbuchstaben. Wenn eine physikalische Größe null ist, wird ihre Einheit aus Gründen der Vollständigkeit mit angegeben.

Beispiel: Effektivwert des Stroms  $I = 0\text{ A}$

Beispiel: Momentanwert der Spannung  $u = 10,5\text{ V}$

**Komplexe physikalische Größen** werden unterstrichen. Sie können entweder in kartesischer oder polarer Schreibweise geschrieben werden.

Beispiel: Strom in kartesischer Schreibweise  $\underline{I} = 3\text{ A} + j \cdot 4\text{ A}$

Beispiel: Spannung in polarer Schreibweise  $\underline{U}_2 = 230\text{ V} \angle (-120^\circ)$

**Physikalische Vektoren** werden mit einem Pfeil über dem Formelzeichen versehen und können entweder zwei- oder dreidimensional sein.

Beispiel: Zweidimensionaler Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\text{ m/s} \\ 0\text{ m/s} \end{pmatrix}$

Beispiel: Dreidimensionaler Drehmomentvektor  $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0\text{ Nm} \\ 0\text{ Nm} \\ 20\text{ Nm} \end{pmatrix}$

**Punkte, Kurven und Flächen** werden über kalligrafische Symbole – also in einer schreibschriftartigen Schrift – gekennzeichnet.

Beispiel: Punkt  $\mathcal{P}$  im Raum

Beispiel: Fläche  $\mathcal{A}_1$  als räumliches Objekt, zur Unterscheidung vom Flächeninhalt  $A_1$

**Gleichungen** werden in einer separaten Zeile geschrieben und mit runden Klammern nummeriert. Dabei gibt die erste Ziffer das Kapitel an, während die zweite Ziffer eine fortlaufende Nummerierung repräsentiert. Besonders wichtige Gleichungen werden in einen rechteckigen Rahmen gesetzt, um deren Wichtigkeit zu unterstreichen.

Beispiel: Der Satz von Pythagoras lautet:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.6)$$

Beispiel: Die Leistung in einem translatorischen System beträgt:

$$P = F \cdot v \quad (2.35)$$

**Literaturstellen** sind Verweise auf andere Bücher und Artikel aus meist Zeitschriften. Sie sind in eckigen Klammern angegeben und am Ende des Buchs aufgelistet.

Beispiel: Eine Ergänzung zur Leistungselektronik ist in [Pro15] angegeben.

## ■ Figuren

Durch dieses Buch begleiten uns drei Figuren, die sich am besten gleich selbst vorstellen:



**Farad.** Farad ist eine treibende Größe, wie etwa die *Spannung*. Farad hat lange Beine und ist ein recht drahtiger Typ. Seine Kraft sollten wir nicht unterschätzen, auch wenn er wie ein Fliegengewicht erscheint.

**Henry.** Der Zweite ist Henry, er ist wie ein Strom. Seine äußere Form erinnert an einen Tropfen, und das kommt nicht von ungefähr. Wenn er will, kommt er durch alles hindurch, da er sich dehnen und stauchen, strecken und verrenken kann. Henry ist auch hart im Nehmen, da steht er Farad in nichts nach.

**Ohm.** Und dann ist da noch Ohm. Er geht nicht nur immer wieder auf Widerstand, er ist sogar der Widerstand und heißt nach seiner Einheit. Ohm macht es Farad und Henry nicht immer leicht. Und dennoch, die drei gehören einfach zusammen.

## ■ Symbole

**Graue Kästen mit Rufzeichen** beinhalten wichtige Merkinhalte.

Beispiel:




Magnetische **Feldlinien** sind stets **geschlossen**.



**Graue Kästen mit Lineal** listen am Beginn eines Abschnitts physikalische Größen mit ihren Einheiten, einschließlich einer englischen Übersetzung, auf.

Beispiel:

Zeichen	Einheit	Größe	Quantity
$E$	J	Energie, Arbeit	Energy, work


 Das Einheitenzeichen J steht für »Joule«.  $J = Ws =$  »Wattsekunde«, also »Watt« mal »Sekunde«.

**Graue Kästen mit Sprechblasen** zeigen am Ende eines Abschnitts eine nach deutschen Begriffen sortierte Liste mit ihren englischen Übersetzungen.

Beispiel:

Deutsch	English
Bürstenlose Gleichstrommaschine	Brushless DC machine
Gleichstrommaschine	DC machine



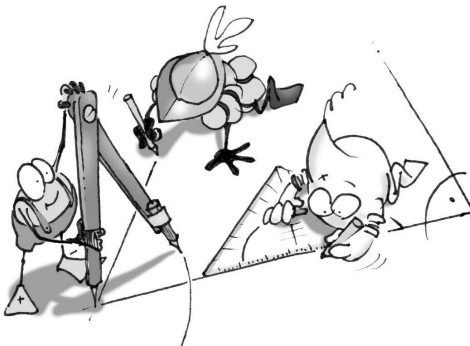
# 1

## Grundlegendes Handwerkszeug

Dieses Kapitel fasst ausgewählte mathematische und elektrotechnische Grundlagen zusammen, wie sie in den darauffolgenden Kapiteln angewandt werden. Die wichtigsten Zusammenhänge der Trigonometrie, der Vektorrechnung, der komplexen Rechnung sowie der ein- und dreiphasigen Wechselstromnetze werden knapp umrissen. Dadurch soll einerseits die in diesem Buch verwendete Schreibweise und Nomenklatur vermittelt werden. Andererseits sollen die erforderlichen Grundlagen in Erinnerung gerufen und aufgefrischt werden.

### ■ 1.1 Trigonometrie

In der Trigonometrie werden Zusammenhänge zwischen Längen und Winkeln in Dreiecken hergestellt. Bild 1.1 soll uns dazu als Inspiration dienen. Wir betrachten nachfolgend geometrische Darstellungen, die jeweils in einem  $x$ - $y$ -Koordinatensystem, wie beispielsweise in Bild 1.2a, angegeben sind. Als Folge dessen behandeln wir in diesem Abschnitt ausschließlich Winkel in der zweidimensionalen  $x$ - $y$ -Ebene.



**Bild 1.1** Trigonometrie

### 1.1.1 Winkel

Der Winkel  $\beta$  zwischen zwei Schenkeln  $a$  und  $c$ , wie er in Bild 1.2b dargestellt ist, lässt sich beispielsweise mit einem Geodreieck bestimmen. Den Schnittpunkt der beiden Schenkel kann man auch als Drehpunkt ansehen, ähnlich wie bei der Schere in Bild 1.2c. Wenn man ausgehend von zwei parallelen, horizontal ausgerichteten Scherenhebeln, den einen Scherenhebel um den Winkel  $\beta$  gegen den Uhrzeigersinn um den Drehpunkt dreht, erhalten wir eine Konfiguration wie in Bild 1.2b.



**Bild 1.2** (a)  $x$ - $y$ -Koordinatensystem, (b) Schenkel und Winkel  $\beta$ , (c) Schere mit zwei Scherenhebeln, (d) positiver Winkel  $\beta$ , (e) negativer Winkel  $\beta'$



Eine Drehung **gegen den Uhrzeigersinn** entspricht in einem ebenen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem dem **mathematisch positiven Bezugssinn**. Eine Drehung in Richtung dieses Bezugssinns entspricht daher einem positiven Winkel. Eine Drehung entgegen dem mathematisch positiven Bezugssinn (im Uhrzeigersinn) entspricht hingegen einem negativen Winkel.

Der mathematisch positive Drehsinn in Bild 1.2a ist mit einem kreisbogenförmigen Pfeil in Bild 1.2d oben um das Pluszeichen herum angezeigt. Der Winkel  $\beta$  in Bild 1.2d, der vom Schenkel  $a$  zum Schenkel  $c$  gerichtet ist, ist größer als null<sup>1</sup>, da er im mathematisch positiven Bezugssinn gezeichnet ist. In Bild 1.2e betrachten wir den Winkel  $\beta'$ , welcher vom Schenkel  $c$  zum Schenkel  $a$  hin gerichtet ist. Der Winkel  $\beta'$  ist daher kleiner als null<sup>2</sup>, da er gegen den mathematisch positiven Bezugssinn gerichtet ist.



- Ein **positiver** Winkel wird mit einem Kreisbogen samt Pfeil gekennzeichnet, dessen Richtung mit dem mathematisch positiven Bezugssinn übereinstimmt.
- Ein **negativer** Winkel wird mit einem Kreisbogen samt Pfeil gekennzeichnet, dessen Richtung mit dem mathematisch positiven Bezugssinn nicht übereinstimmt.
- Als Kreisbogen gekennzeichnete Winkel ohne Pfeil meinen in der Regel einen positiven Winkel.

Der Winkel eines vollen Kreises beträgt:

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> Genauer:  $0^\circ < \beta < 180^\circ$

<sup>2</sup> Genauer:  $-180^\circ < \beta' < 0^\circ$

## 1.1.2 Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen

Um die Winkelfunktionen mathematisch beschreiben zu können, betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck in Bild 1.3a. Die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen wir als *Komplementwinkel*, da sie zusammen  $90^\circ$  ergeben:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (1.2)$$

Dabei benennen wir die beiden in einem rechten Winkel zueinander stehenden Seiten als Katheten und die dritte Seite als Hypotenuse. Bezüglich des Winkels  $\alpha$  nennen wir die Seite  $b$  die *Ankathete* – da sie an den Winkel angrenzt – und die Seite  $a$  die *Gegenkathete* – da sie dem Winkel gegenüberliegt. Da die Kathete  $a$  an den Winkel  $\beta$  angrenzt, heißt sie bezüglich des Winkels  $\beta$  *Ankathete* und  $b$  heißt *Gegenkathete*; siehe Tabelle 1.1.

Wir definieren folgende Winkelfunktionen:

**Sinus.** Der Sinus (Funktionsname sin) von einem der beiden Komplementwinkel ist die Gegenkathete dividiert durch die Hypotenuse:

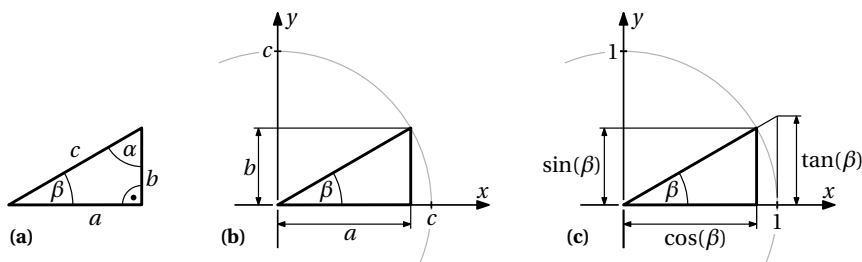
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad (1.3)$$

**Kosinus.** Der Kosinus (Funktionsname cos) ist jeweils gleich dem Verhältnis aus Ankathete zu Hypotenuse:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad (1.4)$$

**Tangens.** Der Tangens (Funktionsname tan) berechnet sich aus Gegenkathete zu Ankathete:

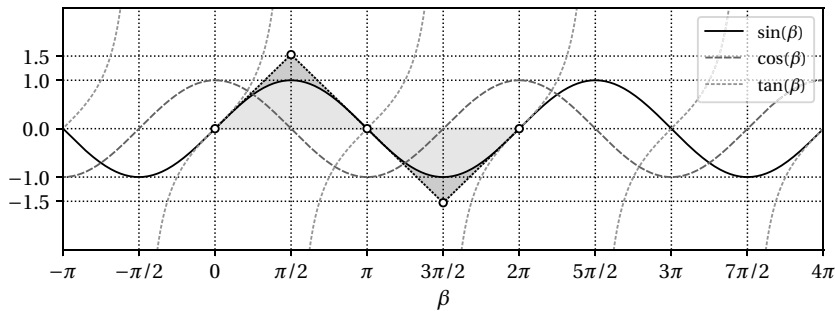
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \quad (1.5)$$



**Bild 1.3** Rechtwinkeliges Dreieck

**Tabelle 1.1** Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

	Seite $a$	Seite $b$	Seite $c$
Bezüglich $\alpha$	Gegenkathete	Ankathete	Hypotenuse
Bezüglich $\beta$	Ankathete	Gegenkathete	Hypotenuse



**Bild 1.4** Funktionen  $\sin(\beta)$ ,  $\cos(\beta)$  und  $\tan(\beta)$ , Hilfspunkte für die näherungsweise Konstruktion einer Sinuskurve per Handskizze

Zwischen den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt der Satz von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.6)$$

Bezüglich des Winkels  $\beta$  sind die Winkelfunktionen in Bild 1.3b und c veranschaulicht. Dass man neben dem Sinus und dem Kosinus des Winkels  $\beta$  auch den Tangens einzeichnen kann, ist eine Folge der Betrachtung der Steigung  $k$  der Hypotenuse im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem; sie beträgt

$$k = \tan(\beta) \quad (1.7)$$

und stimmt mit Gl. (1.5) überein. Der Satz von Pythagoras angewandt auf die Winkelfunktionen aus Bild 1.3c zeigt:

$$\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1 \quad (1.8)$$

Die wesentlichen Merkmale einer Sinus-Funktion – für die Erstellung mittels Handskizze – sind in Bild 1.4 gezeigt. Dazu zeichnet man jeweils eine horizontale Linie bei der positiven und negativen Amplitude sowie dem jeweils etwa 1.5-fachen Wert der positiven und negativen Amplitude. Die in Bild 1.4 markierten Punkte werden über einen Linienzug miteinander verbunden. Dieser Linienzug, ebenso wie die horizontalen Linien bei der positiven und negativen Amplitude, sind die Tangenten für das Zeichnen der Sinuskurve: das lässt sich mit freier Hand gut bewerkstelligen.

Die Sinus- und Kosinusfunktion in Bild 1.4 sind offenbar nur horizontal gegeneinander verschoben:

$$\cos(\beta) = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin(\beta) = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.9)$$

Diese beiden Winkelfunktionen weisen zusätzlich folgende Eigenschaften auf:

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta) \quad \cos(-\beta) = \cos(\beta) \quad (1.10)$$

Die Winkelfunktionen  $\sin(\beta)$ ,  $\cos(\beta)$  und  $\tan(\beta)$  sind in Bild 1.4 dargestellt. Die sin- und cos-Funktionen sind  $2 \cdot \pi$ -periodisch, die tan-Funktion ist  $\pi$ -periodisch – wiederholt sich

nach links und rechts mit der jeweils angegebenen Periode. Dies schreiben wir mathematisch in folgender Form:

$$\sin(\beta) = \sin(\beta + z \cdot 2 \cdot \pi) \quad \cos(\beta) = \cos(\beta + z \cdot 2 \cdot \pi) \quad \tan(\beta) = \tan(\beta + z \cdot \pi) \quad (1.11)$$

Dabei ist  $z \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl. Dieser Zusammenhang lässt sich mit einem Taschenrechner im Radiant-Modus einfach nachvollziehen. Die Funktion  $\tan(\beta)$  weist immer dann eine Unstetigkeitsstelle auf, wenn die Funktion  $\cos(\beta) \rightarrow 0$  geht.

Für jede der drei Funktionen aus Bild 1.4 gibt es jeweils eine Umkehrfunktion.

**Arkussinus.** In Bild 1.5a können wir jedem beliebigen Winkel  $\beta$  eindeutig einen Funktionswert

$$y = \sin(\beta) \quad (1.12)$$

zuordnen, wobei  $-1 \leq y \leq 1$  ist. Wenn wir umgekehrt  $y$  kennen und den Winkel  $\beta$  bestimmen wollen, so gibt es dazu meist zwei Lösungen im Intervall  $-\pi < \beta \leq \pi$ . Um die in Bild 1.5a im grau unterlegten Bereich liegende Lösung zu bestimmen, verwenden wir die Umkehrfunktion Arkussinus, mathematisch geschrieben als  $\arcsin$ :

$$\beta = \arcsin(y) \quad (1.13)$$

Die Funktion  $\arcsin(y)$  liefert in Bild 1.5b, im ebenfalls grau unterlegten Bereich, einen eindeutigen Funktionswert  $\beta$ , der im Intervall  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  liegt.<sup>3</sup> Die gesuchte Lösung von  $y = \sin(\beta)$  könnte auch außerhalb des grauen Bereichs liegen. So liefert beispielsweise  $\arcsin(0)$  in den Taschenrechner eingetippt als Ergebnis den Winkel  $\beta = 0$ . Aus Bild 1.5a ist allerdings ersichtlich, dass auch beispielsweise  $\beta = \pi$  eine gültige Lösung von  $y = \sin(\beta)$  für  $y = 0$  ist. Welcher Winkel tatsächlich die korrekte Lösung von  $y = \sin(\beta)$  ist, hängt von den zu berücksichtigenden Bedingungen in einer technischen Aufgabe ab, ohne die die Lösung nicht eindeutig bestimmbar ist. Die zweite Lösung von  $y = \sin(\beta)$ , zusätzlich zu  $\arcsin(y)$  im Bereich  $-\pi < \beta \leq \pi$ , beträgt:

$$\beta = \begin{cases} \pi - \arcsin(y) & \text{wenn } y \geq 0 \\ \arcsin(y) - \pi & \text{wenn } y < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Mathematisch gesehen haben wir in der Regel zwei mögliche Lösungen. Die Gln. (1.13) und (1.14) liefern nur für  $y = \pm 1$  das jeweils selbe Ergebnis, womit wir in diesen beiden Sonderfällen eine eindeutige Lösung haben.

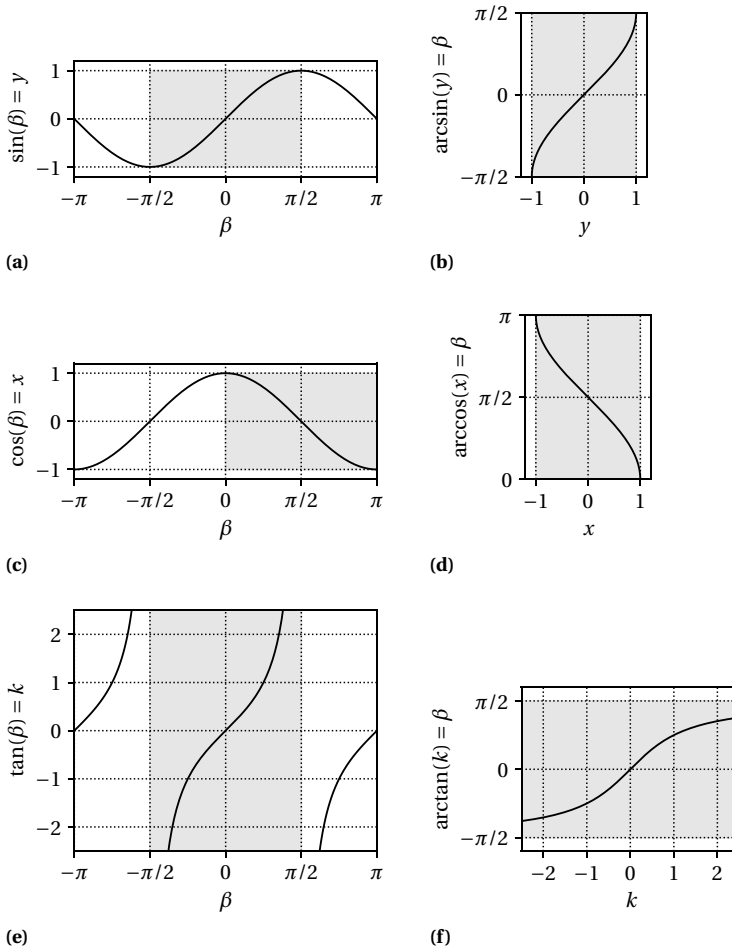
**Arkuskosinus.** In gleicher Weise wie beim Arkussinus gibt es für jeden beliebigen Winkel  $\beta$  einen eindeutigen Funktionswert

$$x = \cos(\beta) \quad (1.15)$$

mit  $-1 \leq x \leq 1$  in Bild 1.5c. Mit der Umkehrfunktion Arkuskosinus, mathematisch geschrieben als  $\arccos$ , lässt sich wiederum nur ein Lösungswinkel  $\beta$  passend zu  $x = \cos(\beta)$ , bei gegebenem  $x$ , finden:

$$\beta = \arccos(x) \quad (1.16)$$

<sup>3</sup> Der Funktionslauf aus Bild 1.5b ergibt sich aus Bild 1.5a durch Vertauschen der beiden Achsen



**Bild 1.5** (a) Funktion  $y = \sin(\beta)$ , (b) Umkehrfunktion  $\beta = \arcsin(y)$ , (c) Funktion  $x = \cos(\beta)$ , (d) Umkehrfunktion  $\beta = \arccos(y)$ , (e) Funktion  $k = \tan(\beta)$ , (f) Umkehrfunktion  $\beta = \arctan(k)$

Die Umkehrfunktion  $\arccos(x)$  liefert als Resultat einen eindeutigen Winkel  $\beta$  im Bereich  $0 \leq \beta \leq \pi$ , ist jedoch keine eindeutige Lösung von  $x = \cos(\beta)$ . Eine mögliche zweite Lösung könnte außerhalb des grau unterlegten Bereichs von Bild 1.5c und 1.5d liegen. Zum Beispiel liefert  $\arccos(0)$  als Lösung  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Bild 1.5c zeigt jedoch, dass für  $x = \cos(\beta)$  auch  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  denselben Funktionswert  $x = 0$  aufweist. Für den Bereich  $-\pi < \beta \leq \pi$  gibt es zusätzlich zu  $\arccos(x)$  als mögliche zweite Lösung von  $x = \cos(\beta)$ :

$$\beta = -\arccos(x) \quad (1.17)$$

Für den Sonderfall  $x = 1$  sind die beiden Lösungen  $\beta = \pm \arccos(x) = 0$  identisch.

**Arkustangens.** Einem Winkel  $\beta$  wird über

$$k = \tan(\beta) \quad (1.18)$$



ein eindeutiger Funktionswert  $k$  zugeordnet, der jeden beliebigen reellen Funktionswert annehmen kann. Um umgekehrt den Winkel  $\beta$  im grau unterlegten Bereich von Bild 1.5e aus  $k$  zu bestimmen, verwendet man die Umkehrfunktion Arkustanges, mathematisch geschrieben als  $\arctan$ :

$$\beta = \arctan(k) \quad (1.19)$$

Die Funktion  $\arctan(k)$  in Bild 1.5f liefert den Winkel  $\beta$  im Bereich  $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$  als Ergebnis. Der Winkel  $\beta$  als Lösung von  $k = \tan(\beta)$  könnte jedoch auch außerhalb des grau unterlegten Bereichs von Bild 1.5e liegen. So liefert etwa  $\arctan(0)$  als Lösung  $\beta = 0$ , aber eine zweite Lösung ist  $\beta = \pi$ , wo ebenfalls  $\tan(\beta) = 0$  ist. Neben der Umkehrfunktion  $\arctan(k)$  ist eine zweite Lösung von  $k = \tan(\beta)$ :

$$\beta = \begin{cases} \arctan(k) - \pi & \text{wenn } k > 0 \\ \pi + \arctan(k) & \text{wenn } k \leq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Eine Ausnahme bilden die Winkel  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ , wo die Tangensfunktion eine Unstetigkeitsstelle aufweist.



Die **Umkehrfunktionen**  $\arcsin(y)$ ,  $\arccos(x)$  und  $\arctan(k)$  sind eindeutige Funktionen, liefern aber jeweils nicht notwendiger Weise eine eindeutige Lösung für den Winkel  $\beta$  in folgenden Gleichungen:

$$y = \sin(\beta)$$

$$x = \cos(\beta)$$

$$k = \tan(\beta)$$

Ausgenommen von Sonderfällen gibt es immer auch einen zweiten Lösungswinkel, wie er jeweils in den Gln. (1.14), (1.17) und (1.20) angegeben ist. ■

### 1.1.3 Allgemeines Dreieck

Bei einem allgemeinen Dreieck wie in Bild 1.6a ergibt die Summe der drei Winkel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1.21)$$

#### Sinussatz

Der Sinussatz besagt, dass die Verhältnisse der Seiten zum jeweils gegenüberliegenden Winkel in einem Dreieck konstant sind:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (1.22)$$

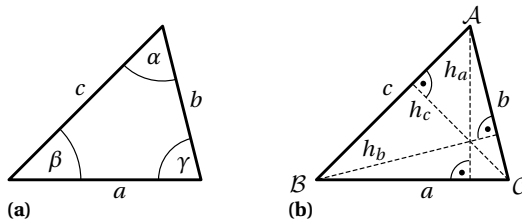
#### Kosinussatz

Der Kosinussatz kann als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras gemäß  $c^2 = a^2 + b^2$  angesehen werden:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad (1.23)$$

In gleicher Form gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta) \quad (1.24)$$



**Bild 1.6** Allgemeines Dreieck (a) mit Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , (b) zusätzlich mit Höhen  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  und den Eckpunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$

## Höhen

Die drei Höhen  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  eines allgemeinen Dreiecks sind in Bild 1.6b eingezeichnet. Dabei geht

- die Höhe  $h_a$  durch den Punkt  $A$  und steht normal auf die Seite  $a$ ,
- die Höhe  $h_b$  durch den Punkt  $B$  und steht normal auf die Seite  $b$ ,
- die Höhe  $h_c$  durch den Punkt  $C$  und steht normal auf die Seite  $c$ .

Da jede Höhe das allgemeine Dreieck in jeweils zwei rechtwinkelige Dreiecke teilt, gilt:

$$\begin{aligned} h_a &= b \cdot \sin(\gamma) & h_b &= c \cdot \sin(\alpha) & h_c &= a \cdot \sin(\beta) & (1.25) \\ &= c \cdot \sin(\beta) & &= a \cdot \sin(\gamma) & &= b \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

## ■ 1.2 Vektorrechnung

Wir werden nachfolgend zunächst die zweidimensionalen und danach die dreidimensionalen Vektoren behandeln. Dabei werden wir die wichtigsten mathematischen Eigenschaften und Rechenregeln zusammenfassen.

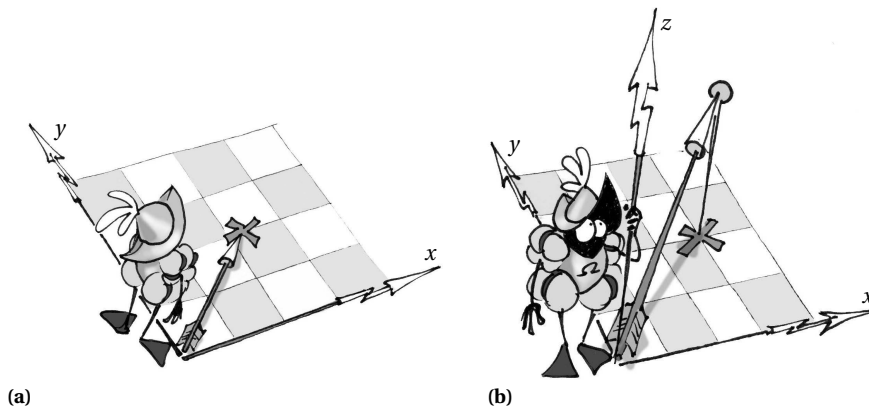
### 1.2.1 Zweidimensionale Vektoren

Um einen Punkt auf der Erdoberfläche zu finden, ist es ausreichend, seine GPS-Koordinaten zu kennen. In ähnlicher Weise kann man einen beliebigen Punkt in der  $x$ - $y$ -Ebene dadurch kennzeichnen, dass man seine  $x$ - und  $y$ -Koordinate angibt, wie das in Bild 1.7a dargestellt ist.

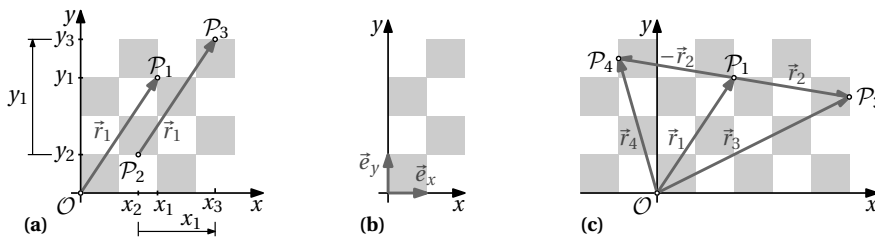
#### Ortsvektor

Wenn wir in Bild 1.8 in der  $x$ - $y$ -Ebene einen Pfeil vom Ursprung  $\mathcal{O}$  zu einem Punkt  $\mathcal{P}_1$  mit den Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$  zeichnen, so bezeichnen wir diesen Pfeil als *Ortsvektor*  $\vec{r}_1$ . Wir schreiben die beiden Koordinaten in der Vektorschreibweise übereinander in einer runden Klammer:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$



**Bild 1.7** (a) Zweidimensionaler und (b) dreidimensionaler Vektor



**Bild 1.8** (a) Ortsvektor  $\vec{r}_1$  von  $\mathcal{O}$  nach  $\mathcal{P}_1$  sowie Vektor  $\vec{r}_1$  von  $\mathcal{P}_2$  nach  $\mathcal{P}_3$ , (b) Einheitsvektor in  $x$ - und  $y$ -Richtung, (c) Addition  $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$  und Subtraktion  $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  von Vektoren

Ortsvektor nennen wir einen Vektor dann, wenn er vom Ursprung  $\mathcal{O}$  weg gezeichnet wird. Ein Vektor wird in der Mathematik über einen kleinen Vektorpfeil oberhalb des Formelzeichens gekennzeichnet, wie bei  $\vec{r}_1$ .

## Vektor

Wenn wir nun den Ortsvektor  $\vec{r}$  aus Bild 1.8 derart parallel verschieben, dass sein Ursprungspunkt in  $\mathcal{P}_2$  mit den Koordinaten  $x_2$  und  $y_2$  zu liegen kommt, dieser Pfeil jedoch dieselbe Länge aufweist und in dieselbe Richtung zeigt, so sprechen wir einfach nur von einem Vektor  $\vec{r}$ . Der Ortsvektor ist also ein Sonderfall des Vektors, der im Ursprung  $\mathcal{O}$  beginnt. In unserem Beispiel ist der Vektor  $\vec{r}_1$  von  $\mathcal{P}_2$  nach  $\mathcal{P}_3$  gerichtet. Seine Abmessungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung sind gleich wie der ursprünglich gezeichnete Ortsvektor, d. h.  $x_1 = x_3 - x_2$  und  $y_1 = y_3 - y_2$ . Die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten (d. h.  $x$ - und  $y$ -Abmessungen) des Vektors sind gleich wie jene des Ortsvektors. Damit weist auch der von  $\mathcal{P}_2$  nach  $\mathcal{P}_3$  gerichtete Vektor dieselben Koordinaten wie in Gl. (1.26) auf.

Der Endpunkt eines gezeichneten Vektors – wie in Bild 1.8 – wird über eine Pfeilspitze gekennzeichnet. Der gerade Bereich vom Ausgangspunkt des Vektorpfeils bis zur Spitze wird als *Schaft* bezeichnet.



Begrifflich unterscheiden wir zweidimensionale Vektoren in der Form (1.26) und skalare Größen, kurz Skalare.

- Ein **Skalar** ist eine gewöhnliche Zahl oder physikalische Größe mit Einheit.
- Ein zweidimensionaler **Vektor** besteht aus einem Paar gewöhnlicher Zahlen oder physikalischen Größen: den Koordinaten. Die Koordinaten eines zweidimensionalen Vektors können wir uns in einem Koordinatensystem vorstellen, wie in Bild 1.7a und 1.8.

## 1.2.2 Dreidimensionale Vektoren

Wenn wir unsere Vorstellung von den zwei- zu den dreidimensionalen Vektoren hin erweitern, fügen wir die  $z$ -Koordinate als dritte Koordinate der Vektorschreibweise hinzu:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Dreidimensional können wir uns das wie in Bild 1.7b perspektivisch vorstellen. Wenn man die  $x$ - und die  $y$ -Achse eines Koordinatensystems gezeichnet hat, zeichnet man die  $z$ -Achse jeweils normal auf die beiden anderen Achsen, wie in Bild 1.9a. Die Richtung der  $z$ -Achse ist in die Richtung des Daumens der rechten Hand gerichtet, wenn die  $x$ -Achse über den kürzeren der beiden möglichen Winkel in die  $y$ -Achse gedreht wird. Die vier Fingern der rechten Hand in Bild 1.9b geben die Drehrichtung an.

Alternativ kann man sich die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse als Dreibein vorstellen, dessen Beine über Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand gebildet werden. Die Finger weisen jeweils einen Winkel von  $90^\circ$  zueinander auf, wie das in Bild 1.9c gezeichnet ist. Dabei zeigt

- der Daumen in die Richtung der  $x$ -Achse,
- der Zeigefinger in Richtung der  $y$ -Achse und
- der Mittelfinger in Richtung der  $z$ -Achse.



Die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse des Koordinatensystems dürfen wir in Bild 1.9a nicht irgendwelchen Fingern zuordnen. Stattdessen müssen wir uns an eine feste Reihenfolge der Koordinatenachsen halten. Anstelle der Reihenfolge  $x \rightarrow y \rightarrow z$  können allerdings auch die Reihenfolgen  $y \rightarrow z \rightarrow x$  oder  $z \rightarrow x \rightarrow y$  verwendet werden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem **zyklischen Vertauschen** der Koordinatenachsen.

Damit wir ein dreidimensionales Koordinatensystem auf einem Blatt Papier zeichnen können, greifen wir anstelle einer perspektivischen Darstellung wie in Bild 1.7b auf eine Projektion zurück. Konkret werden wir in der angewandten Vektorrechnung die Projektion auf die  $x$ - $y$ -Ebene betrachten, wie sie auch in Bild 1.10 gezeigt ist. Wenn wir in diesem Fall die  $x$ -Achse nach rechts und die  $y$ -Achse nach oben zeichnen, dann ist die  $z$ -Achse aus der Zeichenebene heraus gerichtet. Die Richtung aus der Zeichenebene symbolisieren wir durch den Kreis mit dem Punkt, wie in Bild 1.9d. Wir können uns das wie den Blick auf eine