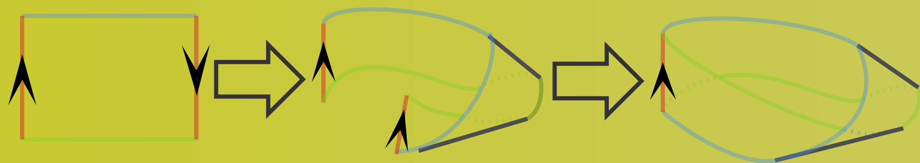
COLECCIÓN ACADÉMICA



Topología: un curso introductorio

VOLUMEN I

Héctor Suárez
Pedro Maluendas
Julian Serna

Héctor Julio Suárez Suárez

Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia
Profesor de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC.
hector.suarez@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0003-4618-0599

Pedro Nel Maluendas Pardo

Doctor en Matemáticas de la Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Profesor de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC.
pedro.maluendas@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-4370-3203

Robinson Julian Serna Vanegas

Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia
Profesor de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC.
robinson.serna@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0001-5858-5011

Topología: un curso introductorio
Volumen I

Héctor Suárez
Pedro Maluendas
Julian Serna

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
2021

Topología: un curso introductorio. Volumen I / Topology: An Introductory Course. Volume I / Suárez, Héctor; Maluendas, Pedro; Serna, Julian. Tunja: Editorial UPTC, 2021. 327 p.

ISBN 978-958-660-510-6
ISBN Digital 978-958-660-511-3

1. Espacios topológicos. **2.** Espacios métricos. **3.** Conjuntos abiertos. **4.** Funciones continuas. **5.** Homeomorfismos. **6.** Filtros.

(Dewey 514 /21). Thema PBP - Topología

Primera Edición, 2021
50 ejemplares (impresos)
Topología: un curso introductorio. Volumen I
Topology: An Introductory Course. Volume I

ISBN 978-958-660-510-6
ISBN Digital 978-958-660-511-3

Colección Académica UPTC N.° 36

Proceso de arbitraje doble ciego
Recepción: junio de 2020
Aprobación: agosto de 2020

Editorial UPTC
Edificio Administrativo – Piso 4
Avenida Central del Norte 39-115,
Tunja, Boyacá
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co

Editorial JOTAMAR S.A.S.
Calle 57 No. 3 - 39.
Tunja - Boyacá - Colombia.

Citar este libro / Cite this book
Suárez, H.; Maluendas, P.; Serna, J. (2021). *Topología: un curso introductorio. Volumen I.* Tunja: Editorial UPTC.
https://doi.org/10.19053/ 9789586605106

Resumen: El presente libro está pensado para un curso de topología general que inicia desde una revisión de la teoría de conjuntos, sigue con las nociones básicas de topología, la construcción de nuevos espacios topológicos a partir de los conocidos, los espacios métricos, la continuidad, y finaliza con los conceptos de filtro, ultrafiltro, topología generalizada y estructura minimal. Por supuesto, los temas de separación, compacidad, conexidad y otros temas clásicos de topología aparecen en un segundo volumen. El texto expone de manera cuidadosa y detallada los diferentes conceptos y sus propiedades; además, contiene un buen número de ejemplos que ayudan a fortalecer la comprensión de los temas. A lo largo del texto hay ejercicios que le permiten al lector complementar lo aprendido a medida que avanza en la lectura, y no solo al final de los capítulos. Además, se plantean preguntas que invitan a los estudiantes a reflexionar sobre el alcance de las definiciones, propiedades y ejemplos.

Palabras clave: espacios topológicos, espacios métricos, abiertos, funciones continuas, homeomorfismos, filtros.

Abstract: The present book is designed for a general topology course that starts from a review of set theory, continues with the basic notions of topology, the construction of new topological spaces from known ones, metric spaces, continuity, convergence, and ends with the concepts of filter, ultrafilter, generalized topology and minimal structure. Of course, the topics of separation, compactness, connectedness, and other classic topological topics appear in a second volume. The text exposes in a careful and detailed way the different concepts and their properties; Moreover, it contains a good number of examples that help to improve the learning. Throughout the text, there are exercises that allow the reader to complement what they have learned as they read, and not just at the end of the chapters. In addition, it includes some questions that invite students to reflect on the scope of the definitions, properties, and examples.

Keywords: topological spaces, metric spaces, open sets, continuous functions, homeomorphisms, filters.

Índice general

Introducción

Ideas topológicas han surgido en diferentes épocas y lugares del mundo, y es difícil determinar un momento o lugar específicos para marcar el origen de esta importante rama de las matemáticas. Podría pensarse que la geometría es en sí misma una forma primitiva de la topología, pero quizá la primera observación hecha de que había una forma más amplia de estudiar los "objetos geométricos" fue hecha en el siglo XVII por G. W. Leibniz(1646-1716) quien la llamó *geometria situs* o la geometría dependiendo de la posición de los objetos (no exclusivamente del punto de vista como la geometría proyectiva), y que hoy es considerada solo una rama de la topología. Este término cambió en los siglos posteriores al de *analysis situs*, acuñado por A. De Morgan (1806-1871) y A. Cayley (1821-1895) entre otros, y alimentado por una serie de problemas interesantes estudiados (o resueltos) en este periodo, como el problema de los puentes de Könisberg, la fórmula de Euler para poliedros: vértices - aristas + caras =2 (estos dos problemas resueltos por L. Euler (1707-1783), la teoría de nudos (estudiada por C.F. Gauss (1777-1855) o el problema de los cuatro colores, entre otros. Fue hasta el siglo XIX que J.B. Listing usó el término topología al publicar su libro *Vorstudien zur Topologie*. Sin embargo, las ideas de la topología que se usan en la actualidad son debidas a H. Poincaré (1854-1912), quien en 1895 publicó el primer artículo significativo dedicado completamente a esta nueva rama, titulado *Analysis Situs*. En todo este tiempo un gran número de matemáticos se han dedicado a estudiar esta área que no ha dejado de crecer hasta el presente [11].

En algunas instituciones de educación superior, y en particular en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, está prevista la enseñanza de los conceptos topológicos por medio de dos cursos que son vistos obligatoriamente por estudiantes de Matemáticas y por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en los primeros cinco semestres de su formación, y eventualmente por algunos estudiantes de Física.

Muchos de los conceptos, que han sido inspirados al profundizar en el análisis o la geometría, no han sido conocidos previamente por los estudiantes, muchas veces ni siquiera de una forma intuitiva, más allá de lo que los cursos de cálculo pueden ofrecer. En el primer curso de topología se espera que los estudiantes conozcan la definición y algunos conceptos básicos de la topología y los espacios topológicos, a través de algunas de las propiedades más simples y usando un gran número de ejemplos. Ya en el segundo curso se espera que los estudiantes profundicen estos conceptos y otros nuevos que, aunque básicos, requieren una mayor capacidad de abstracción, como es el caso de la conexidad o la compacidad, entre otros. Para sortear las dificultades que se presentan en el aprendizaje, debido posiblemente a los pocos cursos previos que han visto los estudiantes, los autores tomaron la decisión de escribir un texto guía basado en diversos textos conocidos, y en las experiencias de las clases suministradas en los años previos. Para facilitar la exposición de los temas y esperando que esto permita una mayor comprensión tanto para estudiantes como para docentes, el libro estará dividido en dos volúmenes, de modo que cada volumen cubra los temas correspondientes a cada uno de los cursos.

El presente volumen está organizado de manera que pueda ser leído en un orden lineal, sin embargo, en cada capítulo se hacen las referencias necesarias para que quien tenga un dominio previo sobre un tema determinado, lo pueda leer en un orden diferente y pueda ubicar los resultados o definiciones fácilmente para aclarar el uso de la notación. El desarrollo general del texto se concentra en una presentación cuidadosa y detallada de las definiciones y de los diferentes resultados, así como en la presentación de un buen número de ejemplos que ayuden a afianzar la comprensión de los conceptos dados. A lo largo del texto se han distribuido algunos ejercicios, con el fin de que el lector complemente los temas tratados a medida que avanza en la lectura, y no solamente al final. Adicionalmente, se plantean preguntas que invitan a los lectores a pensar en el alcance de las definiciones, los resultados o los ejemplos, e incluso en la posibilidad de que las condiciones en las cuales se presentan sean diferentes, y cuáles serían las consecuencias.

Los temas se han dividido en siete capítulos:

En el primer capítulo se hace un repaso por la teoría de conjuntos, haciendo una introducción desde el sistema axiomático de Zermelo-Frenkel junto con el axioma de elección, se presentan las ideas generales de los conjuntos, las operaciones entre ellos, las propiedades básicas de los conjuntos y las operaciones entre conjuntos. También se hace una breve mención de las relaciones entre los elementos de dos conjuntos, las funciones entre conjuntos y la cardinalidad. Finalmente se explora el axioma de elección y se definen los productos cartesianos arbitrarios, mostrando como casos especiales las tuplas finitas o las sucesiones. Los textos recomendados para acompañar este capítulo o profundizarlo son [12, 14, 15, 17, 18, 22, 30, 27, 39].

En el segundo se comienza por una breve introducción intuitiva de la idea de "equivalencia topológica" y posteriormente se presenta la definición de topología y espacio topológico, junto con un número razonable de ejemplos. Se identifican los conjuntos abiertos y la noción de base y subbase; además se mencionan algunos aspectos relacionados con la numerabilidad de las bases y de las bases locales.

En el tercer capítulo se presenta un análisis del comportamiento local de los espacios topológicos, es decir, el de sus elementos y su relación con su entorno, se expone el concepto de vecindad de un punto y a partir de este se identifican los diferentes tipos de punto: los que se encuentran, afuera (exteriores), adentro (interiores), en el borde (frontera), pegados (adherentes) o amontonados (límite) en relación con un subconjunto dado del espacio. Se muestran también algunos detalles del comportamiento de una sucesión en un espacio topológico. Además, se explica en este contexto la noción de conjunto cerrado y algunas de sus propiedades.

El cuarto capítulo pretende mostrar algunos ejemplos de espacios topológicos que pueden ser "construidos" a partir de otros, como los subespacios, los espacios producto o los espacios cociente.

En el quinto capítulo se estudia un ejemplo concreto de espacios topológicos, los espacios métricos y sus propiedades fundamentales. Se presentan los ejemplos clásicos de espacios métricos y se exploran las propiedades topológicas de los espacios euclidianos a través de las propiedades de la métrica. Al final de este capítulo se incluye una sección que muestra un ejemplo asociado al conjunto de las funciones continuas a valor real definidas en un intervalo. Los textos recomendados para acompañar este capítulo o profundizarlo son [4, 16, 21, 23, 29, 28, 31, 36, 33, 37].

El sexto capítulo se concentra en uno de los conceptos más importantes de la topología, la continuidad, y permite establecer relaciones entre espacios topológicos, como la de homeomorfismo (equivalencia topológica). Se estudia la idea de los invariantes topológicos y sea dan algunos detalles del comportamiento de las funciones continuas en relación con espacios topológicos especiales, como los espacios métricos, el espacio producto o el espacio cociente. Al final del capítulo se muestran otros ejemplos de nuevos espacios topológicos construidos a partir de otros, usando funciones continuas (topologías iniciales y finales). Los textos adicionales recomendados para acompañar o profundizar los capítulos 2, 3, 4 y 6 son [1, 16, 25, 26, 29, 28, 31, 36].

En el séptimo capítulo se exponen los conceptos de filtro y ultrafiltro y una generalización de la idea de convergencia. También se muestra la relación entre las ideas de convergencia de filtros y la continuidad de funciones, que generaliza las ideas presentadas antes para sucesiones. Finalmente se presentan las topologías generalizadas y la idea de estructura minimal. Los textos recomendados para acompañar este capítulo o profundizarlo son [2, 7, 8, 9, 24, 34, 35].

Capítulo 1

Nociones básicas de teoría de conjuntos

La finalidad de este capítulo es brindar una introducción de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, teniendo en cuenta el desarrollo axiomático de Zermelo-Fraenkel (ZF) presentado en [15] y [18]. Concretamente, se exponen brevemente los axiomas ZF, las propiedades de los conjuntos que se desprenden de estos, las operaciones básicas entre conjuntos (uniones, intersecciones, diferencias), funciones, relaciones de orden y de equivalencia, producto cartesiano y finalmente el axioma de elección. Cada sección se complementa con una serie amplia de ejemplos y ejercicios destinados a facilitar la comprensión de las nociones topológicas introducidas a lo largo del texto. Se espera que este capítulo pueda ser utilizado como un repaso para lectores con experiencia previa en teoría de conjuntos o como una introducción para quien no ha tenido contacto con esta área, y es recomendable, para una mejor comprensión del texto, recurrir a esta cada vez que el lector lo requiera. Un estudio más detallado de las propiedades elementales de los conjuntos y las operaciones entre ellos puede ser encontrado en [30] o en [27], mientras que un estudio cuidadoso de los axiomas puede ser consultado en [14], [15] o [39]. Si el lector está interesado en profundizar más en las consecuencias de los axiomas de ZF o algunas variantes y en los modelos posibles de la teoría de conjuntos, puede consultar textos más avanzados como [12], [17], [18] o [22].

La teoría de conjuntos es una rama relativamente reciente de las matemáticas, a pesar de que la idea misma de conjunto es muy antigua. Se considera que se origina a finales del siglo XIX a través de los trabajos de George Cantor (1845-1918) y los estudios derivados de estos, que pretendían esclarecer el verdadero significado de lo que se debe entender por "conjunto". Las ideas previas a Cantor, e incluso la misma concepción de Cantor, eran insuficientes para dar una clara definición de conjunto, debido principalmente a que de estas ideas, un poco ingenuas, se desprendían algunas paradojas que no dejaban tranquilos a los matemáticos que siguieron a Cantor. En particular, se puede citar la paradoja de Russell (por Bertrand Russell), la cual se deriva al considerar que la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos es también un conjunto. En estas condiciones, llamando R a dicha colección, es natural preguntar si es R un elemento de sí mismo. Esto conduce a la proposición: "R es elemento de sí mismo si y solo si no es elemento de sí mismo", la cual es claramente paradójica.

La solución a los problemas iniciales, en particular a la paradoja de Russell, fue establecer una adecuada axiomatización de la teoría de conjuntos en lugar de definirlo como un objeto determinado, y en este sentido surgieron varias propuestas de axiomatización. Como se mencionó al inicio, en este texto se eligió ZF, y la razón de esta elección es, entre otras, que en la mayoría de cursos de teoría de conjuntos se estudia este sistema axiomático y, por tanto, que un lector escogido al azar conozca ZF es un evento más probable que los otros.

En general se asume que el lector está familiarizado con los símbolos lógicos usuales: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ y $\exists$ y la lógica de primer orden. Una proposición que hable de un objeto será llamada en ocasiones propiedad (del objeto). Adicionalmente, en la medida de lo posible, se usarán letras especiales para diferentes tipos de conjuntos siguiendo la tradición; así, por ejemplo, las letras latinas mayúsculas A, B,... usualmente representarán conjuntos genéricos, las letras latinas minúsculas a, b,... los elementos genéricos de los conjuntos, letras caligráficas mayúsculas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$,... familias de conjuntos, entre otras. Algunos conjuntos especiales como los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos se denotarán por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Cuando se quiera hablar de conjuntos con alguna estructura especial, se indicará el significado de la notación que se usará para describirlos. El símbolo $\in$ será utilizado a lo largo del texto para indicar la relación de pertenencia, de modo que la expresión $x \in A$ significa que x pertenece a A, es decir, que x es un elemento del conjunto A. De la misma manera, $x \notin A$ significa que x no pertenece al conjunto A. En muchos casos, los elementos de un conjunto pueden también ser conjuntos, por ejemplo cuando se habla de familias de conjuntos, así, el uso de uno u otro tipo de letra tiene más un carácter aclaratorio y no debe entenderse como una regla de escritura. Por ejemplo, en algunas situaciones se requiere el uso de las expresiones $x \cup \{x\}$ o $x \in y$, entre otras.

1.1. Axiomas fundamentales

Para facilitar la comprensión y el posterior uso de este capítulo de repaso, se presentan a continuación los enunciados de los axiomas, que son llamados aquí "fundamentales", primero usando un lenguaje informal y luego un lenguaje simbólico. Después de esto se hará una exploración del significado de cada uno de estos axiomas y sus consecuencias prácticas (propiedades y abreviaciones) que ayudan a facilitar el manejo algebraico-simbólico de los conjuntos.

Axioma 1.1 (Existencia). Existe al menos un conjunto que no tiene elementos.

$$\exists X \forall y (y \notin X).$$

Axioma 1.2 (Extensión). Dos conjuntos son iguales si y solamente si tienen los mismos elementos.

$$\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y)).$$

Axioma 1.3 (Separación o comprensión). Dada una propiedad q, es decir, una fórmula bien formada $q(x)$ con una variable libre x, y dado un conjunto U, existe un conjunto Y cuyos elementos son exactamente los elementos de U que satisfacen la propiedad q.

$$\forall U \exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow (x \in U \wedge q(x))).$$

Axioma 1.4 (Pares). Dados dos conjuntos, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente los dos conjuntos dados.

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall w (w \in Z \leftrightarrow (w = X \vee w = Y)).$$

Axioma 1.5 (Uniones). Dada una familia de conjuntos, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos de los elementos de la familia.

$$\forall \mathcal{F} \exists Y \forall w (w \in Y \leftrightarrow \exists X (w \in X \wedge X \in \mathcal{F})).$$

Axioma 1.6 (Partes o potencias). Dado un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos del conjunto dado.

$$\forall X \exists \wp \forall Z (Z \in \wp \leftrightarrow \forall w (w \in Z \to w \in X)).$$

Axioma 1.7 (Infinito). Existe un conjunto inductivo.

$$\exists S (\emptyset \in S \wedge \forall x (x \in S \to x \cup \{x\} \in S)).$$

Algunos axiomas pueden expresarse de forma más simplificada usando las propiedades que los axiomas que le preceden permiten probar, pero esto se hará detalladamente en las siguientes secciones. Adviértase que en el axioma del infinito se utilizaron algunas expresiones que no se han mencionado antes (pero con seguridad el lector conoce) como "conjunto inductivo" o $x \cup \{x\}$, pero esto será aclarado en la explicación de los axiomas previos. Por ejemplo, se verá cómo la expresión $\{x\}$ tiene sentido como consecuencia de los axiomas de extensión y pares, y así $x \cup \{x\}$ está bien definida empleando adicionalmente el axioma de las uniones.

1.1.1. Existencia

El objetivo principal del axioma de existencia es garantizar que al menos hay un conjunto y de tal manera evitar que la teoría sea anodina. En este sentido, no es necesario discutir sobre este axioma y solamente se profundizará un poco más después de analizar el axioma de extensión. Nótese que el axioma garantiza la existencia de un conjunto que no tiene elementos, pero no indica nada acerca de cuántos conjuntos pueden existir con esta propiedad.

Sin tener en cuenta ningún axioma adicional, ¿Cuántos conjuntos X pueden existir con la propiedad que $\forall y(y \notin X)$?

1.1.2. Extensión

El axioma de extensión tiene como objetivo determinar qué se debe entender como la igualdad entre conjuntos. Este axioma es de gran utilidad para garantizar cuándo dos conjuntos son o no iguales. En el primer caso basta con verificar que tienen exactamente los mismos elementos, es decir, si se quiere ver que $X = Y$, siendo X e Y dos conjuntos dados, se debe verificar que para cualquier z, z es un elemento de X si y solamente si z es un elemento de Y; mientras que para el segundo caso, basta ver que un conjunto tenga un elemento que no está en el otro. Como una aplicación del axioma de extensión, se puede probar que el conjunto X cuya existencia garantiza el axioma 1.1 es único. Para esto, considérese la propiedad $q(W) = \forall y(y \notin W)$, en otras palabras, q es la propiedad de no tener elementos. Nótese que el axioma 1.1 indica que existe un conjunto X tal que $q(X)$.

Teorema 1.1. Dos conjuntos X e Y que no tienen elementos son iguales, es decir, si $q(X)$ y $q(Y)$ entonces $X = Y$.

Demostración. Como $q(X)$ y $q(Y)$, se tiene que para cualquier y, $y \notin X$ e $y \notin Y$. Como estas dos propiedades son ciertas para cualquier y, también es cierto que $y \notin X \leftrightarrow y \notin Y$ para cualquier y, o equivalentemente $y \in X \leftrightarrow y \in Y$ para cualquier y, de modo que por el axioma de extensión $X = Y$. $\square$

La unicidad de este conjunto no es solo un tecnicismo matemático, sino que tiene implicaciones importantes en la notación. Al ser único, y no depender de nada, es posible (y necesario) dar un nombre y un símbolo exclusivos para este conjunto, y este símbolo no ha de depender de nada en particular. En general, y siguiendo la convención, los conjuntos pueden ser denotados colocando sus elementos dentro de llaves, así, el conjunto del axioma 1.1, que en adelante será llamado **conjunto vacío**, puede simbolizarse como $\{\}$, dando a entender que es el conjunto que no tiene elementos. En la primera mitad del siglo XX, André Weil introdujo la notación $\emptyset$ para el conjunto vacío, de modo que $\emptyset = \{\}$. Por su practicidad y su uso frecuente en la literatura, en adelante se usará el símbolo $\emptyset$ para referirse al conjunto vacío. La expresión “por extensión” será utilizada para simplificar “por el axioma de extensión”.

1.1.3. Separación o comprensión

Rigurosamente hablando, este no es un axioma, sino más bien una colección de axiomas, ya que por cada fórmula q del lenguaje, que se asumirá de primer orden (veáse [13] para información más detallada de lenguajes de primer orden), hay un axioma para la teoría de conjuntos, y por esta razón suele denominarse como **esquema axiomático de separación** (o de comprensión).

Teorema 1.2. Si q es una propiedad y U es un conjunto, entonces el conjunto Y que existe, según el esquema axiomático de separación, es único.

Demostración. Si hubiese dos conjuntos, Y y Z, con la propiedad indicada en el axioma 1.3, dado x, se tendría que, $x \in Y$ si y solo si $x \in U \wedge q(x)$, y que, $x \in Z$ si y solo si $x \in U \wedge q(x)$, de modo que por una tautología elemental, $x \in Y$ si y solo si $x \in Z$. Así, por extensión se tiene que $Y = Z$. □

La primera aproximación a la noción de conjunto que probablemente el lector tuvo en su vida, es aquella que indica que un conjunto es “una colección de objetos que satisfacen una propiedad”, sin embargo, y al considerar la propiedad de no ser elemento de sí mismo, es decir, $q(x) = x \notin x$, como se vio en la introducción, se obtiene una paradoja. En este axioma no se trata de determinar los objetos que cumplen una propiedad dada, sino que dado un conjunto U, es posible separar de U aquellos objetos que satisfacen la propiedad. En este contexto, el conjunto U suele ser llamado **referencial**, conjunto de referencia o universo, y de acuerdo al teorema, si hay un conjunto de referencia fijo U y una propiedad fija q, se obtiene un único conjunto formado por aquellos elementos de U que satisfacen la propiedad q. De nuevo, sabiendo que es único, es posible darle un símbolo propio, que facilitará las futuras referencias, y claramente este conjunto depende de la propiedad y el referencial dados. Manteniendo la idea de colocar los elementos dentro de las llaves, pero teniendo en cuenta que no necesariamente se conocen explícitamente los elementos, las notaciones usuales para este conjunto son:

$$\{x \in U \mid q(x)\} = \{x \in U : q(x)\} = \{x \in U; q(x)\},$$

donde x no representa un elemento concreto sino una variable con la cual se describen las condiciones para estar en el conjunto. En este sentido, da lo mismo escribir $\{x \in U; q(x)\}$ o $\{y \in U; q(y)\}$, pues lo relevante es la información que se da, es decir, y es un elemento del conjunto, siempre que sea elemento del conjunto de referencia y que satisfaga la propiedad q.

Si U es un conjunto, ¿cómo son los elementos del conjunto $\{x \in U \mid x \in \emptyset\}$?
Si q es una fórmula, ¿cómo son los elementos del conjunto $\{x \in \emptyset \mid q(x)\}$?

En principio, la naturaleza de los objetos de un conjunto no es relevante, sin embargo, en muchos casos es conveniente tener una idea intuitiva de los mismos, por eso uno de los principales objetivos en este capítulo es desarrollar la intuición de algunos conjuntos y sus elementos. Los axiomas 1.1 a 1.3 no permiten garantizar la existencia de conjuntos con uno, dos o más elementos, pero para el siguiente ejemplo se asumirá que estos conjuntos existen y, en general, que dado cualquier número natural n, existe un conjunto que tiene exactamente n elementos (véase el ejemplo 1.31), con el fin de presentar en algunos ejemplos el uso del esquema axiomático de separación. Un conjunto con n elementos será denotado por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o, si se conocen explícitamente los elementos, se escribirán estos elementos entre llaves y separados por comas.

Ejemplo 1.3. Supóngase que la colección de todos los países (actuales) del mundo forman un conjunto y se va a denotar por P. Se pueden considerar algunas propiedades que hablen de países como:

(i) $q_1(x)$ es la propiedad: x es un país de Europa.

(ii) $q_2(x)$ es la propiedad: x es un país de América del Sur.

(iii) $q_3(x)$ es la propiedad: x es un país de habla hispana.

(iv) $q_4(x)$ es la propiedad: x es un país latinoamericano.

En estas condiciones, el conjunto de países de Europa podría identificarse con $E = \{x \in P \mid \; q_1(x)\}$, América del Sur con el conjunto $A = \{x \in P \mid q_2(x)\}$, el conjunto de los países hispanohablantes con $H = \{x \in P \mid \; q_3(x)\}$ y Latinoamérica como $L = \{x \in P \mid \; q_4(x)\}$. El conjunto A escrito en forma explícita es:

$$\begin{aligned} A = \{&\text{Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Ecuador,} \\ &\text{Guyana, Paraguay, Perú, Suriname, Uruguay, Venezuela}\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que en el ejemplo 1.3 es necesario hacer una lista enorme para escribir explícitamente todos los elementos del conjunto E (países de Europa), y resulta más simple y conveniente solo especificar la propiedad que satisfacen. En esta situación, se ve que un conjunto puede ser representado en más de una forma, cuando se dan explícitamente todos sus elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, llamada **representación por extensión**, o cuando se describe la propiedad de acuerdo al esquema axiomático de separación $\{x \in U \mid \; q(x)\}$, llamada **representación por comprensión**.

Intersección de dos conjuntos

El esquema axiomático de separación permite definir la intersección de dos conjuntos de forma simple, en efecto, si A y B son dos conjuntos, considerando la fórmula $x \in B$ y tomando el conjunto A como referencial, **la intersección de** A y B es el conjunto:

Definición 1.4. $A \cap B = \{x \in A \mid \; x \in B\}$, o equivalentemente

$$x \in A \cap B \quad \text{si y solamente si} \quad x \in A \wedge x \in B.$$

¿Qué representa el conjunto $\{x \in B \mid x \in A\}$?

A continuación se presenta un ejemplo cotidiano.

Ejemplo 1.5. Con los conjuntos del ejemplo 1.3, sucede que:

$$\begin{aligned} A \cap E &= \emptyset, \\ A \cap H &= \{\text{Argentina, Bolivia, Chile, Colombia, Ecuador,} \\ &\qquad \text{Paraguay, Perú, Uruguay, Venezuela}\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. Probar que las siguientes propiedades se cumplen para cualesquiera conjuntos A, B y C.

(a) $A \cap B = B \cap A$. (b) $\emptyset \cap A = \emptyset$. (c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

¿Cómo se definiría $A \cap B \cap C$? ¿Coincide esta definición con las expresiones del ejercicio 1.1 (c)?

Cuando la intersección entre dos conjuntos no vacíos es justamente el conjunto vacío, se dice que los conjuntos son **disyuntos** y significa que no tienen elementos en común. En el ejemplo 1.5, los conjuntos A y E son disyuntos, y esto en la práctica significa que no hay países que estén a la vez en América de Sur y en Europa.

Subconjunto

Para definir el concepto de contenencia no es necesario tener en cuenta el esquema axiomático de separación, sin embargo dicho concepto se ha dejado hasta esta sección para facilitar la presentación de algunas propiedades y algunos ejemplos. Téngase en cuenta que en el axioma de extensión se usa la propiedad $x \in A \leftrightarrow x \in B$ para establecer la relación de igualdad entre los conjuntos A y B. Si se considera una sola implicación en esta propiedad, se tendría por ejemplo $x \in A \rightarrow x \in B$, y se indica entonces que si un elemento pertenece al conjunto A, entonces este mismo pertenece al conjunto B. Esta relación entre A y B es llamada **contenencia** y se define como sigue:

Definición 1.6. Un conjunto A está contenido en un conjunto B si y solamente si para cualquier elemento x que pertenezca al conjunto A se tiene que x pertenece al conjunto B. En este caso se dice también que A es **subconjunto**

de B o que B es **superconjunto** de A y se simboliza por $A \subseteq B$. En símbolos

$$A \subseteq B \quad \text{si y solo si} \quad \forall x(x \in A \to x \in B).$$

La notación $B \supseteq A$ significa lo mismo que $A \subseteq B$. También se usarán los símbolos $\subset$ y $\supset$ para indicar que se da la respectiva contenencia pero no la igualdad, y en este caso se dirá que la **contenencia es propia**.

Ejercicio 1.2. Probar que las siguientes propiedades se cumplen para cualesquiera conjuntos A, B y C.

(a) $\emptyset \subseteq A$. (b) $A \subseteq \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$.
(c) $A \cap B \subseteq A$. (d) $A = A \cap B$ si y solo si $A \subseteq B$.
(e) $A \subseteq A$. (f) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

¿Cuáles de las anteriores propiedades de la contenencia son válidas para la contenencia propia?

Un criterio inmediato para la igualdad de conjuntos es dado por la doble contenencia, más precisamente,

Proposición 1.7. Si A y B son dos conjuntos, $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Demostración. $A = B$ si y solo si para cualquier x, $x \in A \leftrightarrow x \in B$ o equivalentemente, para cualquier x, $x \in A \to x \in B$ y $x \in B \to x \in A$, de modo que por la tautología $\forall x(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow ((\forall x(p(x))) \wedge (\forall x(q(x))))$, esto resulta equivalente a que para cualquier x, $x \in A \to x \in B$, y para cualquier x, $x \in B \to x \in A$. Como esto sucede para cualquier x, esto es equivalente a $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. $\square$

Complementos y diferencia entre conjuntos

Otra consecuencia inmediata del esquema axiomático de separación es la posibilidad de definir la diferencia entre dos conjuntos, es decir, el conjunto formado por los elementos de uno de los conjuntos que no pertenecen al otro. Si A y B son dos conjuntos, la **diferencia** entre A y B, denotada por $A \setminus B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen a B.

Definición 1.8. $A \setminus B = \{x \in A \mid \; x \notin B\}$, o equivalentemente

$$x \in A \setminus B \quad \text{si y solamente si} \quad x \in A \wedge x \notin B.$$

El conjunto $A \setminus B$ también es llamado **complemento relativo** de B con respecto a A. Si el contexto es claro, y hay un referencial U, se dice simplemente que $U \setminus B$ es el **complemento** de B, y se suele denotar por B^c.

¿En qué condiciones $A \setminus B = B \setminus A$?

Ejercicio 1.3. Sean A y B conjuntos cualesquiera.

(a) Probar que $A \setminus B \subseteq A$ pero no se tiene que $A \setminus B \subseteq B$.

(b) Probar que $A \subseteq A \setminus B$ si y solo si A y B son disyuntos.

(c) Probar si $B \subseteq A$ entonces $A \setminus (A \setminus B) = B$, y en particular $(B^c)^c = B$ para cualquier conjunto B (con un referencial U).

Dado un conjunto de referencia U, y $A, B \subseteq U$, es posible definir la unión de los conjuntos A y B como el conjunto $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$. Esta definición es útil para comprender algunas propiedades de la unión, sin embargo limita la unión a conocer un conjunto de referencia (¡nótese que esto no sucede con la intersección!).

Proposición 1.9. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

(i) $A \cup B = B \cup A$.

(ii) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(iv) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(vi) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(vii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(viii) $A \cap X = X \cap A = A$.

(ix) $A \triangle B = B \triangle A$, donde $\triangle$ es la **diferencia simétrica** definida por $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(x) $A \triangle B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(xi) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(xii) $A \cap B \subseteq A \cup B$.

(xiii) Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$.

Las propiedades (vi) y (vii) de la proposición 1.9 se conocen como **leyes de De Morgan**.

Ejercicio 1.4. Demostrar cada una de las propiedades de la proposición 1.9.

1.1.4. Pares

El axioma de pares garantiza que dados dos conjuntos A y B, hay un conjunto que tiene a A y B como elementos y no tiene más elementos. El axioma de extensión garantiza que este conjunto es único (¡pruébese!), dicho conjunto es llamado **conjunto par** y el símbolo para este conjunto es $\{A, B\}$. Este es el primer axioma que garantiza la existencia de conjuntos con elementos, concretamente con dos, o con uno en el caso $A = B$, teniendo en cuenta que por el axioma de extensión $\{A, A\} = \{A\}$. Es importante resaltar en este punto que en general $A \neq \{A\}$, pues por el axioma de extensión, esto solamente sucedería si A fuese elemento de sí mismo y fuese su único elemento. Más adelante se hará una mención breve del axioma de fundamentación, que ayuda a evitar la posibilidad de que un conjunto sea elemento de sí mismo, y así garantiza que $A \neq \{A\}$ para cualquier conjunto A. Por lo pronto, se observa que el conjunto P del ejemplo 1.3 no es en sí mismo un país y por esto $P \notin P$, de modo que $P \neq \{P\}$ ya que $\{P\}$ tiene un elemento que no está en P.

Ejemplo 1.10. Nótese que el conjunto $\{\emptyset\}$ es obtenido por el axioma de pares al tomar $X = Y = \emptyset$ y ya que por extensión $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$, y $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Usando de nuevo pares, con $X = Y = \{\emptyset\}$ es posible obtener el conjunto $\{\{\emptyset\}\}$, y tomando

$X = \emptyset$ e $Y = \{\emptyset\}$ se obtiene el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Análogamente se obtiene el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ tomando $X = \emptyset$ e $Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.

¿Es cierto que $\emptyset \subset \{\emptyset\}$?
¿Es cierto que $\{\emptyset\} \subset \emptyset$?
¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?
Si A, B y C son conjuntos, ¿es posible obtener $\{A, B, C\}$ con los axiomas 1.1-1.4?

Parejas ordenadas

Sean A, B subconjuntos de un conjunto X y considérese $a \in A$ y $b \in B$. Se define el conjunto $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, este conjunto se llama **pareja ordenada con coordenadas** a **y** b, el elemento a se denomina **primera componente** y el elemento b se denomina **segunda componente**. Una pareja ordenada satisface la siguiente propiedad fundamental.

Teorema 1.11. Para $a, c \in A$ y $b, d \in B$, $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración. Supóngase que $(a, b) = (c, d)$, como $\{a\} \in (a, b)$, por extensión $\{a\} \in (c, d)$, y por tanto $\{a\} = \{c\}$ o $\{a\} = \{c, d\}$. El segundo caso no es posible, pues un conjunto con un elemento no puede ser igual a un conjunto con dos elementos (por extensión), de modo que necesariamente se satisface la primera condición y, por tanto, $a = c$. Además, como $\{a, b\} \in (a, b)$, un argumento similar al anterior garantiza que $\{a, b\} = \{c, d\}$, y como $a = c$, por extensión se concluye que $b = d$. En el otro sentido, si $a = c$ y $b = d$, entonces por extensión $\{a\} = \{c\}$, $\{b\} = \{d\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$, y nuevamente por extensión, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, es decir, $(a, b) = (c, d)$. $\square$

¿A qué conjunto pertenece una pareja ordenada?

1.1.5. Familias de conjuntos y uniones

A lo largo del texto, una **familia de conjuntos** es en esencia una colección de conjuntos que en sí misma es un conjunto. Por ejemplo, la colección de conjuntos que no son elementos de sí mismos no es un conjunto, como se vio antes, y por tal razón no es una familia de conjuntos. Desde esta perspectiva, si A y B son conjuntos, el conjunto par $\{A, B\}$ es una familia de conjuntos. Usualmente se denota por $\mathcal{F}$ a una familia de conjuntos.

Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, el conjunto que existe según el axioma de uniones es único y es llamado la **unión de la familia** $\mathcal{F}$. La unión de la familia $\mathcal{F}$ es denotada por $\bigcup \mathcal{F}$. Así,

$$x \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow \text{ existe } A \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in A,$$

en otras palabras, un elemento está en la unión de la familia si es elemento de algún elemento de la familia.

Ejemplo 1.12. Sean A y B dos conjuntos y $\mathcal{F} = \{A, B\}$ la familia correspondiente al par. Así, $x \in \bigcup \mathcal{F}$ si y solo si $x \in A$ o $x \in B$.

La condición del ejemplo anterior coincide con la que se indicó para la unión de dos conjuntos, sin embargo no se hace mención de un conjunto referencial. Una de las ventajas de axiomatizar la unión de conjuntos es poder definir las uniones sin necesidad de tener un conjunto de referencia. En particular, se puede probar que para la familia $\mathcal{F} = \{A, B\}$, $\bigcup \mathcal{F} = A \cup B$.

Ejemplo 1.13. Si X es un conjunto, entonces el conjunto $X \cup \{X\}$ es denominado el **sucesor** de X.

¿Cuál es el sucesor del conjunto vacío? ¿cuál es el sucesor del sucesor del conjunto vacío?

Ejercicio 1.5. Partiendo del conjunto vacío, calcular los sucesores hasta la quinta iteración.

Ejemplo 1.14. Supóngase que A, B y C son conjuntos. Por pares, es posible tener las familias $\{A, B\}$ y $\{C\}$, y nuevamente por pares se obtiene la familia

$\{\{A, B\}, \{C\}\}$. Finalmente, la unión de esta última familia sería el conjunto $\{A, B, C\}$.

El ejemplo anterior pone en evidencia que el axioma de uniones es la clave para asegurar la existencia de conjuntos con un número finito de elementos.

Ejercicio 1.6. Siguiendo la idea del ejemplo 1.14, construya un conjunto con cuatro, cinco y seis elementos.

¿Se puede establecer un criterio para la construcción de un conjunto con n elementos?

Recordando que un conjunto finito con n elementos puede ser denotado por $\{a_1, \ldots a_n\}$, una familia finita se puede denotar por $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Por simplicidad, la unión de una familia finita puede representarse por

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Ejemplo 1.15. Sean $D_1 = \{a, b, c\}$, $D_2 = \{a, b, d\}$, $D_3 = \{a, c, d\}$ y $D_4 = \{b, c, d\}$, y $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{4} D_k = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = \{a, b, c, d\}.$$

Ejercicio 1.7. Dar un ejemplo de una familia de cinco conjuntos de modo que cada conjunto tenga a lo sumo cuatro elementos. Encontrar la unión de la familia. ¿Cuántos elementos tiene la unión de la familia?

Ejercicio 1.8. Dar un ejemplo de una familia de seis conjuntos de modo que la unión de la familia tenga tres elementos.

1.1.6. Partes

El axioma de partes simplemente garantiza que la colección formada por las "partes" de un conjunto dado es de nuevo un conjunto. Dado un conjunto X, una parte de

X es simplemente un subconjunto de X, y el conjunto que existe de acuerdo a este axioma es único y se llama **partes de** X. El conjunto de partes de X se denota por $\wp(X)$ o 2^X (más adelante se justificará el uso del último símbolo).

Definición 1.16. $\wp(X) = 2^X = \{A \mid A \subseteq X\}$ o equivalentemente

$$A \in \wp(X) \text{ si y solo si } A \subseteq X.$$

¿Qué es $2^{\emptyset}$?

Ejemplo 1.17. Considérese el conjunto $X = \{a, b\}$ de dos elementos. Los subconjuntos de X son $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ y $X = \{a, b\}$, de modo que

$$\wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}.$$

Nótese que cualquier conjunto con dos elementos tiene el mismo comportamiento y su conjunto de partes es un conjunto de cuatro elementos. Por otro lado,

$$\bigcup \wp(X) = \emptyset \cup \{a\} \cup \{b\} \cup X = \{a, b\} = X.$$

Ejercicio 1.9. Considérense los conjuntos con tres elementos $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ y $Z = \{\diamond, \Box, \triangle\}$.

(a) Hallar $\wp(X)$, $\wp(Y)$ y $\wp(Z)$. (b) Encontrar $\bigcup \wp(X)$.

Ejercicio 1.10. Supóngase que X es un conjunto no vacío y sean $A \in 2^X$ y $B \in 2^X$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $A \cap B \in 2^X$. (b) $A \cup B \in 2^X$. (c) $A \setminus B \in 2^X$.
(d) $B \setminus A \in 2^X$. (e) $A \triangle B \in 2^X$. (f) $2^A \subseteq 2^X$.

Si $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ entonces ¿a qué conjunto pertenece $\mathcal{A}$?

Producto cartesiano de dos conjuntos

Si X es un conjunto no vacío, una pareja ordenada $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ es un elemento de $\wp(\wp(X)) = 2^{2^X}$ (¡verifíquese!). Si $A, B \subseteq X$, entonces el **producto cartesiano de** A **y** B que se denota por $A \times B$ es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas con primera componente en A y segunda componente en B.

Definición 1.18. $A \times B = \{(a, b) \in 2^{2^X} \mid a \in A \wedge b \in B\}$ o equivalentemente

$$(a, b) \in A \times B \text{ si y solo si } a \in A \wedge b \in B.$$

Ejercicio 1.11. Si $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, e\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, calcular: $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$, $C \times A$, $B \times C$ y $C \times A$.

Nótese que en general $A \times B \neq B \times A$.

Ejercicio 1.12. Probar que $A \times B = B \times A$ si y solo si $A = B$.

Ejercicio 1.13. Supóngase que X y Y son conjuntos y sean $A, C \subseteq X$ y $B, D \subseteq Y$.

(a) Probar que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(b) Probar que $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

(c) Dar un ejemplo donde no se tenga la igualdad para el ítem anterior y un ejemplo donde sí se tenga.

Familias indexadas y conjuntos indexados

Como se vio antes, una familia finita se puede escribir usando como subíndices los números $1, 2, 3$, etc., y esta misma idea puede ser usada para expresar una familia arbitraria de conjuntos. Para esto, si en el ejemplo 1.15 se llama $I = \{1, 2, 3, 4\}$, la familia $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ se puede denotar también por $\{D_i\}_{i=1}^4$, o simplemente por $\{D_i\}_{i \in I}$. En general, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.19. Sea I un conjunto. Una **familia indexada por** I es una familia de conjuntos tal que

(i) Para cada $i \in I$ hay un conjunto A_i en la familia.

(ii) Si $i, j \in I$ son distintos, entonces $A_i \neq A_j$.

En este caso, la familia se denotará por $\{A_i\}_{i\in I}$ y el conjunto I es llamado **conjunto de índices**.

El símbolo $(A_i)_{i\in I}$ se usará para representar una familia de conjuntos donde solamente se satisface la condición (i), es decir, se permite que $A_i = A_j$ para $i \neq j$.

Esta definición será de gran utilidad a lo largo del texto y se recomienda al lector ejercitarse bien en el dominio de esta notación. La diferencia entre una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ y una familia $(A_i)_{i\in I}$ es simplemente que en la segunda se permite la posibilidad de encontrar conjuntos repetidos, lo cual será necesario en algunos contextos, como en la definición del producto cartesiano.

Ejemplo 1.20. Si X es un conjunto, el conjunto de partes de X es una familia que puede ser indexada por el mismo conjunto 2^X, en cuyo caso

$$2^X = \{A\}_{A\in 2^X} = \{A\}_{A\subseteq X}.$$

Ejercicio 1.14. Para cada conjunto I dado, escribir explícitamente en términos de los subíndices la familia $\{A_i\}_{i\in I}$.

(a) $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) $I = \{\diamond, \Box, \triangle\}$.

La notación de índices es útil para probar cuestiones generales acerca de las operaciones de conjuntos. Para este fin, la unión de una familia indexada $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ se escribirá como

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para algún } i \in I\},$$

y se tiene que

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ si y solo si } x \in A_k \text{ para algún } k \in I.$$

En este punto, es posible también definir la intersección de una familia $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ como

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in \bigcup \mathcal{F} \mid x \in A_i \text{ para todo } i \in I\},$$

es decir,

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ si y solo si } x \in A_k \text{ para todo } k \in I.$$

La intersección de una familia arbitraria se puede definir sin necesidad de axiomatizar, ya que la unión de la familia sirve como conjunto de referencia. El siguiente ejemplo ayuda como guía para probar propiedades acerca de las operaciones entre familias que serán de utilidad en los capítulos posteriores.

Ejemplo 1.21. Si X es un conjunto no vacío, un subconjunto de partes de X es una familia de subconjuntos de X. En efecto, si $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, entonces para cualquier $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq X$, así que los elementos de $\mathcal{F}$ son subconjuntos de X.

Ejercicio 1.15. Supóngase que $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto X. Probar que $\mathcal{F} \subseteq 2^X$.

Ejemplo 1.22. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es también un subconjunto de X.

Se debe verificar que si $x \in \bigcup \mathcal{F}$ entonces $x \in X$. Para facilitar la prueba, supóngase que I es un conjunto conveniente de índices (no hay problema en suponer esto, pues por los ejemplos 1.20, 1.21 y el ejercicio 1.15, siempre se puede indexar por algún subconjunto de partes del conjunto) de modo que $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$. Así, si $x \in \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces $x \in A_k$ para algún $k \in I$ y como $A_k \subset X$, resulta que $x \in X$.

Proposición 1.23. Asúmase que X es un conjunto y $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X. Entonces se tienen las siguientes propiedades de las operaciones con familias de conjuntos.

(i) $A_k \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ para cada $k \in I$ o equivalentemente $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ para cada $A \in \mathcal{F}$.

(ii) $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_k$ para cada $k \in I$ o equivalentemente $\bigcap \mathcal{F} \subseteq A$ para cada $A \in \mathcal{F}$.