COLECCIÓN ACADÉMICA

Apuntes de estructuras algebraicas

Julián Serna
Omaida Sepúlveda
Nelsy González

Omaida Sepúlveda Delgado

Doctora en Ciencias de la Educación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) - Tunja.
Máster en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia- Bogotá.
Ingeniera de Sistemas de la Universidad Antonio Nariño – Tunja.
Especialista en Computación para la Docencia de la Universidad Antonio Nariño – Tunja.
Licenciada en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander - Bucaramanga.
Profesora titular de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC – Tunja.

ORCID:
https://orcid.org/0000-0002-2950-8137

CORREO:
omaida.sepulveda@uptc.edu.co

Apuntes de estructuras algebraicas

Julián Serna

Omaida Sepúlveda

Nelsy González

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

2023

Apuntes de estructuras algebraicas / Notes on Algebraic Structures / Serna Vanegas, Robinson Julián; Sepúlveda Delgado, Omaida; González Gutiérrez, Nelsy Rocío. Tunja: Editorial UPTC, 2023. 150 p.

ISBN (impreso) 978-958-660-739-1
ISBN (ePub) 978-958-660-740-7

Incluye referencias bibliográficas

1. Álgebras 2. Anillos 3. Diagramas de Cayley 4. Homomorfismos 5. Ideales 6. Grupos 7. Módulos

(Dewey 512 /21) (Thema PBF - Álgebra)

Primera Edición, 2023
50 ejemplares (impresos)
Apuntes de estructuras algebraicas
Notes on Algebraic Structures

ISBN (impreso) 978-958-660-739-1
ISBN (ePub) 978-958-660-740-7

Colección Académica UPTC N.º 58
Proceso de arbitraje doble ciego.
Recepción: agosto de 2022.
Aprobación: diciembre de 2022.

Editorial UPTC
Edificio Administrativo – Piso 4.
La Colina, Bloque 7, Casa 5.
Avenida Central del Norte 39-115, Tunja, Boyacá.
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co

Diseño Portada e Impresión

Editorial JOTAMAR S.A.S.
Calle 57 No. 3 - 39.
Tunja - Boyacá - Colombia.

Impreso y hecho en Colombia - Printed and made in Colombia

Libro académico con SGI-3241
Citar este libro / Cite this book
Serna Vanegas, R., Sepúlveda Delgado, O. & González Gutiérrez, N. (2023). *Apuntes de estructuras algebraicas.* Editorial UPTC.
doi: https://doi.org/10.19053/9789586607391

Resumen

El presente libro está diseñado para ser utilizado en un curso básico de estructuras algebraicas. El texto ofrece un panorama general de las estructuras de grupo, anillo, módulo y R-álgebra, y está diseñado para ser utilizado en un curso de un semestre académico (16 semanas). El capítulo 1 provee las nociones básicas y ejemplos de grupos de simetrías, tablas de grupo, conjuntos generadores y diagramas de Cayley. En este capítulo, nos enfocamos más en la conceptualización y visualización básica de los grupos que en la formalidad. Los capítulos 2 y 3, por otro lado, exponen las nociones básicas de subgrupo, subgrupo normal, isomorfismo, homomorfismos y grupo cociente, ofreciendo una perspectiva intuitiva de estos conceptos desde el coloreo de tablas de grupo y los diagramas de Cayley. El capítulo 4 está dedicado a presentar un panorama general de la teoría de anillos desde lo estudiado en los capítulos anteriores e incluyendo nociones nuevas, como los ideales primos y maximales. Finalmente, el libro introduce y provee ejemplos de R-módulos, R-submódulos y R-álgebras en el capítulo 5, apuntando a casos específicos como los $\mathbb{Z}$-módulos (o grupos abelianos) y los $F[x]$-módulos, con el fin de despertar el interés del lector para continuar su estudio del álgebra. El texto se basa en la idea de "aprender haciendo", lo que permite que el estudiante redescubra por sí mismo ejemplos y propiedades básicas de estas estructuras. Además, se han formulado preguntas, actividades de clase y ejercicios a medida que se avanza en la exposición, con el fin de que el estudiante tenga un rol activo dentro del aula.

Palabras clave: anillos, grupos, módulos, R-álgebras.

Abstract

This book is designed for a basic course in algebraic structures. The text provides a general overview of group, ring, module, and R-algebra structures for a one-semester academic course (16 weeks). Chapter 1 provides the basic notions and examples of symmetry groups, group tables, generating sets, and Cayley diagrams, with a focus on the conceptualization and basic visualization of groups rather than formality. Chapters 2 and 3 then introduce the basic notions of subgroup, normal subgroup, isomorphism, homomorphisms, and quotient group, providing an intuitive perspective on these concepts through group table coloring and Cayley diagrams. Chapter 4 is devoted to presenting a general overview of ring theory building on what was studied in the previous chapters, and introducing new notions such as prime and maximal ideals. Finally, the book introduces and provides examples of R-modules, R-submodules, and R-algebras in chapter 5, pointing to specific cases such as $\mathbb{Z}$-modules (or abelian groups) and $F[x]$-modules, in order to pique the reader's interest in continuing their study of algebra. The text is based on the idea of "learning by doing", allowing the student to rediscover basic examples and properties of these structures for themselves. In addition, questions, classroom activities, and exercises are formulated as the exposition progresses, in order to encourage an active role for the student within the classroom.

Keywords: rings, groups, modules, R-algebras.

Índice general

Introducción

El presente texto exhibe una introducción al estudio de las estructuras básicas del álgebra abstracta (o moderna): grupos, anillos, módulos y álgebras. Estas estructuras constituyen un pilar sobre el cual se construye formalmente un gran acervo del conocimiento matemático, que da cimiento a diversas aplicaciones dentro y fuera de la matemática.

En la naturaleza y en el estudio de las formas, la simetría es un elemento fundamental. Mediante simetrías podemos crear patrones que nos ayudan a organizar nuestro mundo conceptualmente. Aunque a menudo no nos demos cuenta, a diario son evidentes diversos tipos de simetrías. La mayoría de personas usan conceptos de simetría, incluidas traslaciones, rotaciones, reflexiones y teselaciones como parte de sus carreras. Entre los profesionales que incorporan estas ideas tenemos a los artistas, artesanos, músicos, coreógrafos y, por supuesto, los matemáticos.

Intuitivamente hablando, la teoría de grupos es el estudio de la simetría. Cuando tratamos con un objeto que parece simétrico, la teoría de grupos puede ayudarnos a analizarlo. Aplicamos la etiqueta "simétrica" a todo objeto que permanece invariable bajo algunas transformaciones. Esto podría aplicarse a figuras geométricas (un círculo es altamente simétrico porque es invariable bajo cualquier rotación), o también a objetos más abstractos; por ejemplo, la expresión $x^2+y^2+z^2$ es invariante bajo cualquier reordenamiento de las variables x, y, z.

En el escenario de la física, las leyes de conservación están relacionadas con la simetría de las leyes físicas bajo varias transformaciones. Por ejemplo, esperamos que las leyes de la física no cambien en el tiempo. Esta es una invariancia bajo “traslación” en el tiempo, y conduce a la conservación de la energía. Las leyes físicas tampoco deberían depender de dónde te encuentres en el universo. Tal invariancia de las leyes físicas bajo “traslación” en el espacio conduce a la conservación del impulso. La invariancia de las leyes físicas bajo rotaciones (adecuadas) conduce a la conservación del momento angular. Un teorema general que explica cómo deben surgir las leyes de conservación de un sistema físico a partir de sus simetrías se debe a la matemática alemana Emmy Noether (Noboa, 2021).

La física moderna de partículas no existiría sin la teoría de grupos; de hecho, con teoría de grupos se predijo la existencia de muchas partículas elementales antes de que se encontraran experimentalmente (Loebl, 2014). Por otro lado, la estructura y el comportamiento de las moléculas y los cristales depende de sus diferentes simetrías. Por lo tanto, la teoría de grupos es una herramienta esencial en algunas áreas de la química.

Así mismo, al interior de la matemática, la teoría de grupos está muy relacionada con la simetría, específicamente en el área de la geometría (Collins, 1998). Adicionalmente, en álgebra los problemas clásicos han sido resueltos con la teoría de grupos. En el Renacimiento, los matemáticos encontraron análogos de la fórmula cuadrática para raíces de polinomios generales de grado 3 y 4. Al igual que la fórmula cuadrática, las fórmulas cúbica y cuártica expresan las raíces de todos los polinomios de grado 3 y 4 en términos de los coeficientes de los polinomios y de extracciones de raíces (raíces cuadradas, raíces cúbicas y raíces cuartas). La búsqueda de un análogo de la fórmula cuadrática para las raíces de todos los polinomios de grado 5 o superior no tuvo éxito en el siglo XIX. La razón por la que no se encontraron tales fórmulas generales se explica por una sutil simetría algebraica en las raíces de un polinomio descubierto por Evariste Galois. Igualmente, algunas áreas del análisis matemático involucran la teoría de grupos para realizar deducciones, un caso particular se presenta con el tratamiento de las series de Fourier.

En Criptografía, los criptosistemas de clave pública usan diferentes grupos, como el grupo de unidades en aritmética modular y el grupo de puntos racionales en curvas elípticas sobre un cuerpo finito (Myasnikov, 2008). Lo anterior no se deriva de la perspectiva de la "simetría", sino de la eficiencia o dificultad al realizar ciertos cálculos en los grupos.

Pasando a un ambiente de esparcimiento lúdico y cotidiano, encontramos aplicaciones de la teoría de grupos en la solución de acertijos; por ejemplo, en el acertijo denominado 15-Puzzle y en el Cubo de Rubik, la teoría de grupos proporciona un marco conceptual para resolver tales acertijos (Carmona, 2013).

Según lo expuesto, es importante que los estudiantes comprendan los conceptos de geometría y simetría en el nivel elemental como una forma de exponerlos a las cosas que ven todos los días (Johnson, 2018), que aparentemente no están relacionadas con las matemáticas, pero que en realidad tienen una base sólida en ellas.

Con el propósito de abarcar los temas más relevantes del álgebra moderna, este texto trata, desde un punto de vista visual y combinatorial, los temas más básicos de la teoría de grupos; luego expone las nociones fundamentales de anillos y, finalmente, se concentra en estructuras más generales como R-módulos y R-álgebras, donde R es un anillo unitario.

Este trabajo es el resultado de la experiencia de los autores dirigiendo cursos de grupos, anillos y módulos en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). El libro responde a la necesidad de la asignatura de estructuras algebraicas (Sepúlveda y Suárez, 2017), ofrecida en la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, de tener un texto en español que abarque en forma práctica y resumida (16 semanas de clases) los temas mencionados. Nos hemos basado en textos que hemos usado para desarrollar estos temas en tres semestres; particularmente, usamos varios ejemplos, gráficas y ejercicios de (Dana, 2016). Además, seguimos la exposición de (Dana, 2016; Carter, 2021; Hodge, 2013; Lee, 2018) para los capítulos 1-3, la exposición de (Lee, 2018; Dana, 2016; Fraleigh, 2000; Gallian, 2021) para el capítulo 4 y las ideas de (Dummit y Foote, 1999; Silverman, 2022) para el capítulo 5. Las notas y apartados históricos son basados en (Cooke, 2005; Kleiner, 2007).

El valor agregado de este texto es que permite exponer de forma resumida, entretenida y rigurosa la amplia temática que abarca. Además, permite que el rol del estudiante sea más activo al proponer la discusión de preguntas, actividades en clase y ejercicios que se formulan a medida que se avanza en la exposición, su objetivo es evidenciar gráficamente las ideas más relevantes. El texto no pretende abarcar todos los temas clásicos, sino que se enfoca en la parte conceptual e ilustrativa de las nociones básicas; adicionalmente, es amable con el lector al usar un lenguaje menos sofisticado para las explicaciones y debido a que parte, en muchos casos, de situaciones reales y preconceptos para introducir los temas.

Capítulo 1

Grupos

Los grupos son una de las estructuras algebraicas más básicas en el estudio del álgebra moderna. La belleza de este tópico radica en que muchos de los grupos que se encuentran en la naturaleza vienen de las simetrías de los objetos.

El concepto de grupo fue la primera de las muchas abstracciones que componen el mundo del álgebra moderna. La noción de grupo surgió en el estudio de los procedimientos utilizados para resolver ecuaciones, pero ese estudio involucró otros conceptos que también eran algo vagos y necesitaban aclaración.

Tanto Abel como Galois hicieron uso frecuente de este concepto. En la obra de Lagrange, Ruffini, Cauchy y Abel solo se estudió el número de formas diferentes que podía tomar una función de las raíces. Entonces, Galois centró su atención en la estructura de las permutaciones en sí mismas, y el resultado fue la primera estructura abstracta, un grupo de permutaciones.

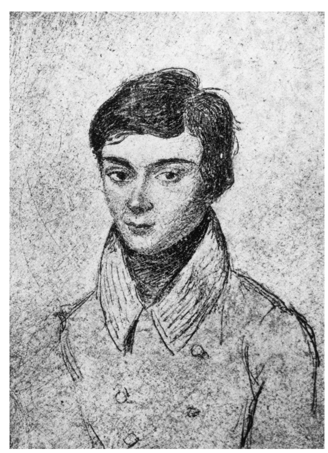


Figura 1.1. E.Galois

Pasaron otras dos décadas antes de que Arthur Cayley (1821-1895) presentara su idea de grupo, en 1849. Cayley definió un grupo como un conjunto de símbolos que podían combinarse de una manera asociativa (usó la palabra), pero no necesariamente conmutativa, y tal que los elementos debieran repetirse si todos fuesen operados por el mismo elemento. Un ejemplo importante dado por Cayley fue un grupo de matrices (la palabra matriz fue invención de Cayley; en latín significa útero y se usa en sentido figurado en la minería para denotar una roca que contiene minerales).

El sentido moderno del conjunto completo de axiomas para un grupo abstracto fue establecido por Walther von Dyck (1856-1934), alumno de Felix Klein, en 1883.

1.1. ¿Qué es un grupo?

Hay un juego llamado **cubo de Rubik**, fue inventado en 1974 por Erno Rubik en Budapest (Hungría). Es un juguete de mucho interés matemático debido a sus simetrías. Precisamente, lo más observado y estudiado en teoría de grupos.

 ¿Qué ejemplos de simetrías conoce?

El cubo de Rubik viene en su caja de fábrica en una posición que llamaremos **posición solucionada** (ver figura 1.2).

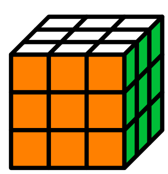


Figura 1.2. Posición solucionada del cubo

El cubo de Rubik tiene seis caras denotadas en la figura 1.3 con los números $1,\ldots,6$, las cuales, en el mismo orden, se conocen como: cara frontal, cara superior, cara derecha, cara inferior, cara izquierda y cara posterior.

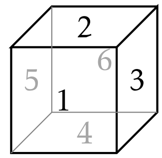
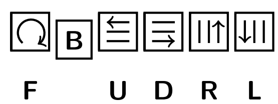


Figura 1.3. Seis caras del cubo

Definición 1.1. Un **movimiento elemental** del cubo de Rubik es la rotación de 90 grados en el sentido horario de una de sus seis caras.

Escribimos el conjunto de estos movimientos elementales como $\{F, B, U, D, R, L\}$, donde el movimiento F gira el cara frontal, B gira la cara posterior, U gira la cara superior, D gira la cara inferior, R gira la cara derecha y L gira la cara izquierda. Una manera de denotar estos movimientos es usando los siguientes simbolos:



Un ejemplo de aplicación de un movimiento elemental se puede visualizar en la figura 1.4.

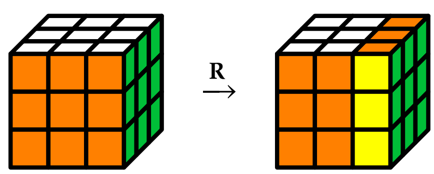


Figura 1.4. Aplicando el movimiento elemental R

¿ Qué le sucede a la posición solucionada del cubo de Rubik cuando se le aplica una sucesión finita de movimientos elementales?

Denotemos por **F**′ el movimiento dado por la rotación de 90 grados en el sentido antihorario de la cara frontal. ¿**F**′ es la composición de algunos movimientos elementales?

¿Qué le sucede a la posición solucionada del cubo de Rubik cuando se le aplica **F** y **F**′ en cualquier orden?

Definición 1.2. Una **posición legal** del cubo de Rubik es cualquier configuración del cubo de Rubik que puede obtenerse de la posición solucionada a través de una sucesión de movimientos elementales.

Un ejemplo de una posición legal se muestra en la figura 1.5.

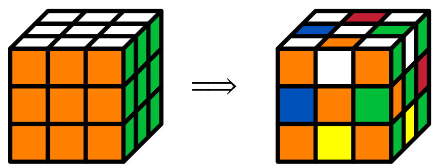


Figura 1.5. Sucesión de movimientos elementales

Observaciones

1. Hay un conjunto de posiciones legales del cubo de Rubik, cada posición legal $\mathbf{P}$ es expresada como una sucesión de movimientos elementales $\mathbf{P} = \mathbf{E_1} \ldots \mathbf{E_n}$, las cuales se le aplican a la posición solucionada $\mathbf{S}$ (el orden es importante) obteniendo la posición legal dada. La posición solucionada $\mathbf{S}$ se puede ver como una sucesión vacía de movimientos elementales, lo que equivale a no realizar ningun movimiento.

2. Se puede "componer" cada par de posiciones legales $\mathbf{P} = \mathbf{E_1} \ldots \mathbf{E_n}$ y $\mathbf{P'} = \mathbf{T_1} \ldots \mathbf{T_m}$ obteniendo la posición legal $\mathbf{P} \circ \mathbf{P'} = \mathbf{E_1} \ldots \mathbf{E_n} \mathbf{T_1} \ldots \mathbf{T_m}$.

3. Cada movimiento elemental puede ser reversado al realizar el movimiento opuesto (90 grados en sentido antihorario).

4. Si denotamos por **F', B', U', D', R'** y **L'** los movimientos elementales opuestos a **F, B, U, D, R** y **L** respectivamente, estos **movimientos elementales opuestos** se pueden expresar como una sucesión de movimientos elementales.