

Wolfgang H. Müller  
Sebastian Glane  
Wilhelm Rickert

# Technische Mechanik

für Technomathematik und  
Physikalische Ingenieurwissenschaft



HANSER



Müller, Glane, Rickert

**TM für Technomathematik und  
Physikalische Ingenieurwissenschaft**



**bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Wolfgang H. Müller  
Sebastian Glane  
Wilhelm Rickert

# **Technische Mechanik für Technomathematik und Physikalische Ingenieurwissenschaft**

HANSER

Die Autoren:

*Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller*, Lehrstuhlinhaber für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie am Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin

*Dr.-Ing. Sebastian Glane*, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin

*Wilhelm Rickert, M.Sc.*, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor und Verlag die Gewähr dafür, dass beschriebene Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München, [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg

Herstellung: *Der Buchmacher* – Arthur Lenner, München

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelmotiv: Thomas West, unter Verwendung von Grafiken von © [stock.adobe.com/Papapig](http://stock.adobe.com/Papapig)

Coverrealisation: Max Kostopoulos

Satz: Wilhelm Rickert

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46271-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-46611-1

# Vorwort

*Everything You Always Wanted to Know About Sex\**  
(\*But Were Afraid to Ask)

Woody Allen

Mit diesem Buch verbinde ich ein spezielles persönliches Anliegen. Üblicherweise werden die Vorlesungen über Technische Mechanik für die Anfangssemester „ingenieurfreundlich“ gelesen, d. h. man vermeidet es tunlichst, fortgeschrittene Kapitel der Höheren Mathematik zu verwenden und erklärt Sachverhalte gerne anschaulich, sozusagen auf der Rückseite des Briefumschlags, da man doch technisch orientiert ist und sich mit abstrusen Formalismen ungern aufhält. Kurz gesagt, man gesteht sich nicht ein, dass es Dinge gibt, mit denen man eventuell Schwierigkeiten hat, sie zu verstehen und zu meistern. Das ist nur allzu menschlich. Nun gibt es jedoch auch Menschen, denen es daran liegt, hinter die Kulissen zu schauen und denen es Freude macht, in voller Tiefe zu begreifen, warum ein Sachverhalt so ist, wie man ihn darstellt, so phantastisch dieser Wunsch auch klingen mag.

Um ein Beispiel zu geben: Das Prinzip der virtuellen Arbeit kann man einführen, ohne den Begriff der Variation zu verwenden und Grundbegriffe der Funktionalanalysis zu kennen. Man wundert sich zwar anfangs darüber, was eine virtuelle Verrückung ist und warum diese mit  $\delta u$  bezeichnet wird, aber mit der Zeit gewöhnt man sich auch daran. Ich würde soweit gehen, festzustellen, dass Personen existieren, die vollauf damit zufrieden sind, etwas anwenden zu können, ohne zu verstehen, warum es funktioniert, und die auch gerne glauben, dass die Energie eines Systems schon extremal werden wird. Irgendein Gott wird es bestimmt so eingerichtet haben! Es gibt sogar Menschen, die wollen nicht einmal anwenden, sondern eigentlich viel lieber gar nichts tun. Aber wie gesagt . . . , es gibt auch andere, die nicht so sind. Und für diese ist dieses Buch geschrieben.

Nichtsdestoweniger, man muss beide Welten kennen! Und so empfehle ich Studierenden der Physikalischen Ingenieurwissenschaft oder der Technomathematik auch das mit dem Kollegen Ferber entstandene, ebenfalls im Hanser-Verlag erschienene Fachbuch *Technische Mechanik für Ingenieure* parallel zu lesen<sup>†</sup>, ja, das vorliegende Buch vielleicht eher als Ergänzung zu begreifen, denn schließlich geht es letztendlich darum, Prüfungen in Echtzeit zu bestehen. Und die Prüfungen drehen sich um die Pflicht und nicht um die Kür.

Zu diesem Buch haben viele Studierende und Mitglieder unserer Fachgruppe direkt bzw. zumindest indirekt beigetragen. Zwei Mitgliedern der Fachgruppe aber gilt für ihre umfangreiche Arbeit besonderer Dank, nämlich den Herren Sebastian Glane und Wilhelm Rickert. Deshalb erscheinen sie auch im Cover und tragen Verantwortung für das hier Gesagte.

In diesem Sinne *per aspera ad astra!*

Berlin, im Juli 2020

Wolfgang H. Müller

<sup>†</sup> oder andere im Verzeichnis angegebene Ingenieurliteratur über Technische Mechanik

URL der Internetseite der Verfasser:

(<https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/home/>)

URL der Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:

([https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/studium\\_und\\_lehre/lehrangebot/](https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/studium_und_lehre/lehrangebot/))



# Inhalt

Abbildungsverzeichnis .....	11
<b>1 Statik .....</b>	<b>17</b>
1.1 Eine Vorbemerkung zur Gliederung der Technischen Mechanik .....	17
1.2 Mechanische Grundbegriffe .....	17
1.2.1 Masse, Zeit und Länge .....	18
1.2.2 Kraftbegriff .....	19
1.2.3 Einteilung der Kräfte .....	21
1.2.4 Momentenbegriff .....	24
1.3 Die Grundgleichungen der Statik .....	29
1.4 Der Schwerpunkt .....	35
1.4.1 Eine Vorbemerkung .....	35
1.4.2 Der Begriff des dreidimensionalen Schwerpunktes .....	36
1.4.3 Flächen- und Linienzentren .....	37
1.5 Trag- und Fachwerke .....	46
1.5.1 Vorbemerkungen zur Lagerung und idealisierte Lagertypen .....	46
1.5.2 Fachwerke .....	50
1.5.2.1 Begriffsbildung .....	50
1.5.2.2 Das Knotenpunktverfahren .....	52
1.5.2.3 Der Rittersche Schnitt .....	55
1.5.3 Tragwerke .....	58
1.6 Der biegesteife Träger .....	62
1.6.1 Begriffsbildung .....	62
1.6.2 Schnittgrößen .....	63
1.6.3 Schnittgrößendifferentialgleichungen (gerader Balken) .....	66
1.6.4 Schnittlasten an Rahmen .....	78
1.6.5 Bogen in der Ebene .....	88
1.6.6 Schnittgrößendifferentialgleichungen am Bogen .....	89
1.7 Reibungsphänomene .....	101
1.7.1 Begriffsbildung: Haften und Gleiten, Coulombsche Reibung .....	102
1.7.2 Kraft- und Momentengleichgewicht an der schiefen Ebene .....	104
1.7.3 Umschlingungsreibung .....	107
Literatur .....	111

<b>2</b>	<b>Festigkeitslehre</b> .....	<b>112</b>
2.1	Festigkeitslehre – warum? .....	112
2.2	Wichtige Belastungs- und Verformungsarten – Phänomenologie .....	113
2.3	Mechanische Spannungen .....	114
2.3.1	Erste Begriffsklärungen .....	114
2.3.2	Der Spannungstensor .....	118
2.3.3	Impulsbilanz der Statik .....	124
2.3.4	Momentengleichgewicht .....	126
2.4	Dehnungen .....	133
2.5	Hookesches Gesetz .....	137
2.6	Lamé–Navier–Gleichungen .....	139
2.7	Der Zug-/Druckstab .....	140
2.8	Reine Biegung .....	152
2.9	Reine Scherung .....	166
2.10	Querkraftbiegung .....	168
2.11	Die Biegeliniendifferentialgleichung .....	177
2.12	Schiefe Biegung .....	192
2.13	Torsion .....	197
2.13.1	Torsion des Kreisprofils .....	198
2.13.2	Torsion dünnwandiger geschlossener Profile .....	205
2.14	Biegespannungsformel für den gekrümmten Träger .....	208
2.15	Festigkeitsnachweis .....	210
	Literatur .....	219
<b>3</b>	<b>Bewegungslehre</b> .....	<b>220</b>
3.1	Begriffe der Bewegungslehre .....	220
3.2	Bewegung eines Massenpunktes .....	221
3.2.1	Kinematik .....	221
3.2.1.1	Kartesische Basis .....	223
3.2.1.2	Polar- und Zylinderkoordinatenbasis .....	224
3.2.1.3	Natürliche Basis .....	225
3.2.2	Kinetik .....	228
3.2.3	Energie- und Arbeitssatz .....	232
3.2.4	Drehimpuls und Drallsatz .....	234
3.3	Bewegung von Massenpunktsystemen .....	236
3.3.1	Kinematik .....	236
3.3.2	Kinetik .....	237
3.3.3	Impuls- und Schwerpunktsatz .....	238

3.3.4	Energie- und Arbeitssatz .....	239
3.3.5	Drehimpuls und Drallsatz.....	241
3.4	Der starre Körper .....	242
3.4.1	Begriffsbildung .....	242
3.4.2	Kinematik .....	243
3.4.3	Kinetische Vorbemerkungen I: Der lineare Impuls .....	257
3.4.4	Impuls- und Schwerpunktsatz .....	258
3.4.5	Energie- und Arbeitssatz .....	261
3.4.6	Kinetische Vorbemerkungen II: Der Drehimpuls .....	265
3.4.7	Drallsatz .....	266
3.4.8	Die Eulerschen Kreiselgleichungen.....	270
	Literatur.....	276

**4 Kontinuumsmechanik ..... 277**

4.1	Einführung .....	277
4.1.1	Was ist Kontinuumsmechanik?.....	277
4.1.2	Das Ziel der Kontinuumsmechanik.....	278
4.2	Feldformulierungsmöglichkeiten .....	279
4.2.1	Eulersche Beschreibungsweise .....	279
4.2.2	Transporttheorem in Eulerscher Beschreibungsweise .....	280
4.2.3	Materielle (Lagrangesche) Beschreibungsweise .....	284
4.2.4	Transporttheorem in materieller Beschreibungsweise .....	285
4.3	Bilanzgleichungen.....	286
4.3.1	Allgemeine globale Form .....	286
4.3.2	Allgemeine lokale Form in regulären Punkten .....	287
4.3.3	Bilanzen der Masse .....	289
4.3.4	Bilanzen des Impulses .....	293
4.4	Einfache Materialgleichungen.....	299
4.4.1	Die Notwendigkeit von Materialgleichungen .....	299
4.4.2	Das Euler-Fluid .....	300
4.4.3	Das Navier-Stokes-Fluid.....	305
4.4.4	Der Hookesche Festkörper und Ausbreitung elastischer Wellen .....	315
4.5	Beobachterwechsel.....	317
4.5.1	Grundbegriffe.....	317
4.5.2	Kinematik Euklidischer Transformationen .....	319
4.5.3	Kinematik von Galileitransformationen .....	324
4.5.4	Anwendungen Euklidischer Transformationen.....	324
4.5.5	Die Massenbilanz bei Beobachterwechsel.....	329

4.5.6	Die Impulsbilanz bei Beobachterwechsel .....	330
4.5.7	Materialgleichungen bei Beobachterwechsel .....	331
	Literatur .....	332
<b>5</b>	<b>Energiemethoden .....</b>	<b>334</b>
5.1	Bilanzen der thermo-mechanischen Energien .....	334
5.1.1	Bilanz der kinetischen Energie .....	334
5.1.2	Bilanz der Gesamtenergie .....	335
5.1.3	Bilanz der inneren Energie, 1. Hauptsatz .....	337
5.2	Bilanz der Entropie, 2. Hauptsatz .....	339
5.3	Auswertung der Entropieungleichung .....	340
5.3.1	Der Fall des linear elastischen Festkörpers .....	340
5.3.2	Der Fall der Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeit .....	343
5.4	Die Formänderungsenergie-dichte und ihr Komplement .....	345
5.5	Die Sätze von Castigliano im Kontinuum .....	347
5.6	Darstellungssätze für die freie Energiedichte .....	347
5.7	Die Formänderungsenergie-dichte .....	350
5.8	Die Formänderungsenergie des Balkens .....	351
5.9	Die Sätze von Castigliano im Diskreten .....	354
5.10	Motivation der Extremierung von Energiefunktionalen .....	363
5.11	Einführung in die Variationsrechnung .....	364
5.12	Prinzip der virtuellen Verrückungen .....	367
5.13	Spezialfälle des PdvV .....	371
5.14	PdvV in der Starrkörperkinetik .....	372
5.15	PdvV für gerade linear-elastische Balken .....	374
5.16	Prinzip der virtuellen Kräfte .....	375
5.17	Spezialfälle des PdvK insbesondere angewandt auf Balken .....	376
5.18	Das Prinzip der geringsten Wirkung .....	380
5.19	Die Lagrangeschen Gleichungen .....	386
	Literatur .....	391
	<b>Index .....</b>	<b>393</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Illustration verschiedener Kraftarten.....	22
1.2	Freischnitt eines Klotzes im Schwerfeld. ....	22
1.3	Freischnitt der Gravitationswirkung Erde-Mond. ....	23
1.5	Moment einer Kraft und Wirkungslinie. ....	24
1.4	Freischnitt durch Balkenquerschnitt. ....	24
1.6	Polare und axiale Vektoren. ....	25
1.7	Ein Kräftepaar. ....	26
1.8	Geneigter Stab prismatischen Querschnitts. ....	27
1.9	Geneigter konischer Stab. ....	28
1.10	Ein Krafteck und Resultierende. ....	30
1.11	Schiefe Koordinaten. ....	31
1.12	Pendelstütze. ....	32
1.13	Freischnitte am System der Pendelstütze. ....	32
1.14	Darstellung eines masselosen Hebels mit zugehörigem Freischnitt. ....	33
1.15	Schematische Darstellung der Aussichtsplattform und zugehöriger Freischnitt..	34
1.16	Achsenbezeichnungen beim Träger sowie einem 3D-Draht. ....	38
1.17	Dreieck mit Eckpunkts- und Seitenlängenbezeichnungen. ....	39
1.18	Trapez mit geometrischen Längen und den beiden Innenwinkeln $\alpha$ und $\beta$ . ....	41
1.19	Kreisringsektor mit Radien und Öffnungswinkel $\alpha$ , symmetrisch zur Vertikalen. .	43
1.20	Darstellung eines Kreisabschnittes. ....	44
1.21	Schematische Darstellung eines Tankzugs. ....	45
1.22	Darstellung einwertiger Lagerungen. ....	48
1.23	Darstellung zweiwertiger Lagerungen. ....	48
1.24	Darstellung dreiwertiger Lagerungen. ....	49
1.25	Ein- und zweiwertige Brückenlager. ....	49
1.26	Realisierung von Fachwerkstabverbindungen. ....	50
1.27	Sichere Realisierung von Fachwerkkonstrukten. ....	51
1.28	Zu den Nullstabsregeln. ....	52
1.29	Fachwerk mit neun Stäben und sechs Knoten. ....	53
1.30	Skizze zur Einführung des Hilfswinkels $\alpha$ und der Hilfslänge $L_2$ . ....	53
1.31	Knotenfreischnitte. ....	54

---

1.32 Fachwerksstruktur. ....	56
1.33 Fachwerk als starrer Körper ersetzt. ....	56
1.34 Ritterschnitt. ....	57
1.35 Unter Lasten stehendes Tragwerk. ....	59
1.36 Freischnitte am Tragwerk. ....	59
1.37 Tragwerk und Freischnitte. ....	61
1.38 Koordinaten am horizontalen geraden Balken. ....	63
1.39 Krafteinleitung in der $x$ - $z$ -Ebene. ....	64
1.40 Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer. ....	65
1.41 Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer aus kombinierter Belastung. ....	66
1.42 Freischnitt eines infinitesimalen geraden Balkenstücks. ....	66
1.43 Kontinuierlich belasteter Balken. ....	68
1.44 Belasteter Balken. ....	69
1.45 Schnittufer am Übergang. ....	69
1.46 Balkensystem unter Punktbelastungen. ....	70
1.47 Freischnitt des Balkensystems. ....	71
1.48 Bereichseinteilung des Balkensystems. ....	71
1.49 Bereichseinteilung des Balkensystems. ....	72
1.50 Schnittlasten. ....	73
1.51 Aufziehverfahren (siehe Text). ....	74
1.52 Zur Wahl der strichlierten Referenzlinie (siehe Text). ....	76
1.53 Balken mit zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen. ....	76
1.54 Schnittufer bei Verwendung des $e_x$ - $e_y$ - $e_z$ -Systems. ....	77
1.55 Schnittufer bei Verwendung des $\tilde{e}_x$ - $\tilde{e}_y$ - $\tilde{e}_z$ -Systems. ....	77
1.56 Vektorielle Betrachtung der Schnittgrößen. ....	78
1.57 Zur Wahl der strichlierten Referenzlinie (siehe Text). ....	78
1.58 Rahmen unter Last. ....	80
1.59 Freischnitt 1. Bereich. ....	80
1.60 Freischnitt 2. Bereich. ....	80
1.61 Freischnitt 3. Bereich. ....	81
1.62 Graphische Darstellung der Schnittlastenverläufe. ....	81
1.63 Rahmen unter Last. ....	82
1.64 Freischnitte am geknickten Rahmen. ....	82
1.65 Aufziehen des zweiten Bereichs von links. ....	83
1.66 Aufziehen des dritten Bereichs. ....	83
1.67 Schnittlasten. ....	84
1.68 Rahmen und Freischnitt. ....	84
1.69 Aufziehen links. ....	85

---

1.70 Weiteres Aufziehen links. ....	85
1.71 Aufziehen von oben und von rechts. ....	86
1.72 Schnittgrößen.....	86
1.73 Frenetsches Dreibein und Krümmungskreis (siehe Text).....	88
1.74 Freischnitt eines Bogenelementes (siehe Text).....	90
1.75 Bogen mit Punktlasten. ....	91
1.76 Freischnitt des Bogens in Abb. 1.75.....	91
1.77 Bogenfreischnitte aus Abb. 1.75. ....	92
1.78 Bogenfreischnitte aus Abb. 1.75. ....	93
1.79 Schnittgrößenverläufe am Bogen. ....	95
1.80 Nach unten und oben gekrümmte Kreisbögen unter Punktlasten. ....	95
1.81 Bogenfreischnitte aus Abb. 1.75. ....	96
1.82 Verlauf der Schnittgrößen am gekrümmten Träger.....	101
1.83 Haften und Gleiten eines Klotzes auf einer rauen Oberfläche (siehe Text).....	102
1.84 Haften, Gleiten und Kippen eines Klotzes auf einer schiefen Ebene (siehe Text). .	104
1.85 Selbstsperrung eines Klotzes an der schiefen Ebene. ....	105
1.86 Freischnitt der Teilsysteme des Hebels, des Klotzes und der schiefen Ebene.....	106
1.87 Umschlingungsreibung und Freischnitt. ....	108
1.88 Fahrwerksbremse ....	109
1.89 Freischnitt des Seils.....	109
1.90 Freischnitt der Bremsscheibe ....	110
1.91 Unvollständiger Freischnitt des Hebels.....	110
2.1 Elementare Belastungsfälle. ....	114
2.2 Verschiedene Wirkungen einer gleich starken, aber verschieden gerichteten Last. ....	115
2.3 Spannungszustand im Inneren eines Körpers. ....	119
2.4 Infinitesimaler Freischnitt eines Körperpunktes. ....	128
2.5 Mohrscher Kreis. ....	129
2.6 Spannungen am Element. ....	129
2.7 Konstruktion und Auswertung des Mohrschen Kreises.....	130
2.8 Deformation eines Körpers. ....	134
2.9 Axial unter Zug stehender Stab.....	141
2.10 Prismatischer Stab in der Referenz- und in der aktuellen Konfiguration.....	145
2.11 Stabfreischnitt. ....	149
2.12 Stabsystem. ....	149
2.13 Freischnitt des starren Hebels.....	150
2.14 Auslenkung des starren Hebels.....	150
2.15 Reine Biegung eines Balkens. ....	152

2.16 Darstellung eines Dreiecks und dessen Flächenschwerpunkt. ....	156
2.17 Trapez mit den Grundseitenlängen $a$ und $b$ , der Höhe $h$ und den beiden Innenwinkeln $\alpha$ und $\beta$ . ....	158
2.18 Kreisringsektor mit Innenradius $r_i$ , Außenradius $r_a$ und Öffnungswinkel $\alpha$ . ....	161
2.19 Querschnitt eines L-Profiles. ....	163
2.20 Zerlegung des Querschnitts in die Teilflächen I und II. ....	164
2.21 Reine Scherung eines unendlichen linear-elastischen Gebietes. ....	166
2.22 Querkraftbiegung eines einseitig eingespannten Balkens. ....	169
2.23 Schädigungsmechanismen bei Querkraftbiegung. ....	173
2.24 Balken mit Kreisquerschnitt unter Querlast. ....	176
2.25 Vereinfachte Darstellung der Geometrie am ebenen Bernoulli-Balken. ....	178
2.26 Darstellung zur Wahl des Vorzeichens der Drehachse. ....	181
2.27 Balken mit einer Fest-Los-Lagerung unter linearer Streckenlast. ....	183
2.28 Freischnitt des Gesamtsystems. ....	183
2.29 Graphische Darstellung eines Momentenverlaufs. ....	184
2.30 Graphische Darstellung einer Biegelinie. ....	185
2.31 Balken mit T-förmigem Querschnittsprofil. ....	186
2.32 Graphische Darstellung der Biegelinie $w(x)$ in dimensionsloser Form. ....	188
2.33 Freischnitt zur Bestimmung der Lagerkräfte. ....	188
2.34 Infinitesimaler Freischnitt des Punktes A. ....	189
2.35 Infinitesimaler Freischnitt des Punktes B. ....	189
2.36 Bereicheinteilung zur Berechnung des Flächenträgheitsmoments. ....	190
2.37 Statisches Moment $S^*$ der Fläche $A^*$ . ....	190
2.38 Graphische Darstellung des Querkraftverlaufs $Q(x)$ in dimensionsloser Form. ...	191
2.39 Symmetrische Querschnittsprofile. ....	193
2.40 Durchbiegung eines gleichseitigen L-Trägers bei verschiedenen Einspannungen. ....	194
2.41 Ein aus zwei identischen Rechtecken zusammengesetzter Querschnitt. ....	195
2.42 Torsionsverformungen bei Kreis- und Rechteckprofil. ....	198
2.43 Links fest eingespannter Kreisringzylinder unter stirnseitiger Torsion. ....	198
2.44 Beidseitig verdrillter Kreisringzylinder. ....	201
2.45 Einseitig fest eingespannte Welle unter Torsionsbelastung. ....	202
2.46 Aufziehverfahren für die Normalkraft $N(x)$ und das Torsionsmoment $M_T(x)$ ....	203
2.47 Torsion eines beliebig geformten, geschlossenen, dünnwandigen Profils. ....	205
2.48 Zur Verdrillung eines beliebig geformten, geschlossenen, dünnwandigen Profils. ....	206
2.49 Verformung eines Bogens. ....	208
2.50 Graphische Darstellung des hyperbolischen Profils der Biegespannung. ....	210
2.51 Zulässige Bereiche des Mohrschen Kreises. ....	214
2.52 Freischnitt eines Kreuzschlüssels zur Befestigung einer Radmutter. ....	216



---

2.53 Freischnitt des Kreuzschlüssels im zweiten Belastungsfall.....	217
3.1 Illustration eines Inertialsystemsbeobachters. ....	224
3.2 Darstellung von Polarkoordinaten.....	225
3.3 Darstellung natürlicher Koordinaten.....	226
3.4 Rutschender Klotz auf einem Tisch.....	235
3.5 Aufbau eines Starrkörpers aus Massenpunkten.....	242
3.6 Starrkörperkinematik.....	243
3.7 Konstruktion des Momentanpols im ebenen Fall. ....	246
3.8 Starrkörpersystem.....	248
3.9 Bewegungsablauf.....	248
3.10 Starrkörpersystem.....	250
3.11 Schwerpunkte. ....	250
3.12 Zur Wirkung des Drehtensors auf orthogonale Einheitsvektoren. ....	251
3.13 Rollendes starres Rad mit und ohne Schlupf. ....	257
3.14 Geometrie eines Vollzylinders. ....	264
3.15 An der Wand lehrende rutschende Leiter. ....	268
3.16 Abrollende Münze.....	271
3.17 Darstellung des Wurfs eines Reifens.....	273
3.18 Freischnitt des Reifens für $t \leq t_r$ .....	274
4.1 Darstellung eines materiellen Systems.....	278
4.2 Zur räumlichen (Eulerschen) Beschreibungsweise.....	279
4.3 Zur materiellen (Lagrangeschen) Beschreibungsweise.....	285
4.4 Strömung durch ein Rohr. ....	289
4.5 Vereinfachte Darstellung einer Rakete. ....	297
4.6 Angeströmte Platte und ein geeignetes Kontrollvolumen. ....	303
4.7 Freistrahle beim Auftreffen auf eine Platte und die Wahl des Kontrollvolumens $V$ . ....	308
4.8 Mit Wasser gefüllter Eimer. ....	311
4.9 Pulsierende Kraftquelle in linear-elastischem Medium. ....	316
4.10 Euklidische Transformation zwischen zwei Beobachtern. ....	317
5.1 Zur Auswertung der Entropieungleichung nach Coleman-Noll. ....	341
5.2 Zur Bedeutung der Formänderungsenergiegedichte und ihres Komplements. ....	346
5.3 Übergang von kontinuierlicher zu punktförmiger Belastung.....	354
5.4 Ein einfach statisch unbestimmtes System.....	356
5.5 Diskret belasteter Balken.....	357
5.6 Freischnitt und Momentenverlauf des Balkens. ....	358
5.7 Freischnitt und Momentenverlauf am Balken mit Hilfsmoment. ....	359

5.8 System unter Streckenlast.....	359
5.9 Freischnitt eines Balkensystems .....	360
5.10 Ein Balken unter Punktkraft- und Momentenbelastung.....	362
5.11 Variation einer eindimensionalen Verschiebungsfunktion $u$ am festen Rand. ....	365
5.12 Träger unter Last. ....	378
5.13 Freischnitte des originalen und des virtuellen Systems.....	379
5.14 Momentenverläufe am realen und am virtuellen System. ....	379
5.15 System mit Dissipation. ....	389

# 1

## Statik

### ■ 1.1 Eine Vorbemerkung zur Gliederung der Technischen Mechanik

Der traditionelle Grundkurs über Technische Mechanik gestaltet sich nicht zuletzt aus didaktischen Gründen wie folgt: Man beginnt mit der **Statik**, der Lehre miteinander im Gleichgewicht befindlicher Kräfte. Nichts bewegt sich, die Körper ruhen. Aber sie stehen unter dem Einfluss dieser Kräfte und werden sich verformen. Das ist Gegenstand des zweiten Kapitels, der **Festigkeitslehre**. Oft verteilen sich diese beiden Abschnitte auf die ersten beiden Semester. Interessiert man sich nun dafür, die Bewegung von Körpern zu beschreiben, kommt die **Dynamik** ins Spiel. War man bei den ersten beiden Themen im Wesentlichen damit beschäftigt, algebraische Gleichungen zu lösen, kommen nun gewöhnliche Differentialgleichungen als mathematisches Tool hinzu, was auch erklärt, warum man nicht im ersten Semester mit der Dynamik beginnt und die Statik als ihren Spezialfall begreift. Unter der sogenannten höheren Festigkeitslehre versteht man schließlich oft eine Einführung in die Grundlagen der **Kontinuumstheorie**, in der die Bewegung respektive Deformation kontinuierlich verteilter Materie untersucht wird, sowie die **Energieprinzipie**. Dies kommt zum Schluss des Grundkurses, da man hier zusätzlich zu partiellen Differentialgleichungen auch mit Variationsrechnung konfrontiert wird.

Auch in diesem Buch werden wir diesem Kanon folgen. Allerdings sind wir so frei, von Anfang an Wert auf stringente Mathematik zu legen. Wir werden zwar die wesentlichen Rechenregeln zusammenstellen, aber für Details dieser mathematischen Präliminarien, insbesondere deren Einübung, geben wir weiterführende Literatur an. Generell wird im vorliegenden Buch deduktiv vorgegangen: Die allgemeinen Prinzipie werden an den Anfang gestellt und die speziellen Fälle ergeben sich. Daher wird empfohlen, parallel den Inhalt des Buches *Technische Mechanik für Ingenieure* von W. H. Müller und F. Ferber oder anderer Technischer Mechanikliteratur zu studieren, wo meist der induktive Weg gewählt ist. Die entsprechenden Lehrinhalte aus [MF2019] sind, wann immer sinnvoll, als Propädeutika den jeweiligen Abschnitten in diesem Buch vorangestellt.

### ■ 1.2 Mechanische Grundbegriffe



**Propädeutikum:** Man studiere aus [MF2019] den Abschnitt 1.1.

### 1.2.1 Masse, Zeit und Länge

Die Welt der Mechanik fußt auf drei physikalischen Grundgrößen, nämlich den Begriffen

- **Masse**  $m$  in Kilogramm (kg),
- **Zeit**  $t$  in Sekunden (s),
- und **Länge**  $s$  in Meter (m).

In der Tat sind manche Mechaniker von ihrer Wissenschaft so überzeugt, dass sie glauben, die gesamte Physik passt in dieses Schema. Man sieht das in der Thermodynamik, wo die innere Energie, welche die Thermodynamiker in Kalorien (cal) messen, über das sogenannte mechanische Wärmeäquivalent in Joule (J) umgerechnet wird, wobei  $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J} = 4,18 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}$  gilt. Bei der Elektrodynamik müssen sie dann zähneknirschend zugeben, dass die elektrische Ladung neben der Masse vielleicht doch eine neue Qualität der Materie ist. Allerdings gibt es bis heute andauernde Versuche, die Maxwell'schen Gleichung mechanistisch aus einer Äthertheorie mit rotativen Freiheitsgraden herzuleiten. Darauf werden wir beim Drallsatz zurückkommen. Von der Quantenmechanik und dem statistischen Aspekt der Wirklichkeit hält man wenig. Mechanik ist von ihrem Grundverständnis her eine deterministische Theorie, was sich in solchen Gedankenkonstrukten wie dem Laplaceschen Dämon widerspiegelt, wonach ein System für gegebene Anfangsbedingungen vorhersagbar ist, insofern man die Grundgleichungen für die Systemdynamik kennt. Und davon gehen die Mechaniker aus, dass solche existieren, bzw. dass man sie kennt, nämlich die Newton–Eulerschen Grundgleichungen, die wir noch besprechen werden.

Die Physiker sind aber mindestens genauso von sich überzeugt. Für sie ist die Mechanik ein abgeschlossenes, relativ langweiliges Teilgebiet. Wenn man einen Physiker jedoch fragt, was der Elastizitätsmodul ist, bzw. wie man die Durchbiegung eines Balkens berechnet und wie der dazugehörige Spannungszustand aussieht, dann werden sich viele dieser Zunft achselzuckend abwenden, denn das sei nicht grundlagenorientiert. Ein naturwissenschaftlich-technisch versierter Mensch kennt aber beide Welten, und damit das so ist, soll daran hier gearbeitet werden.

Die Frage, wie man Masse, Zeit und Länge tatsächlich misst, ist in der Tat ein Kapitel für sich, das wir hier nicht im Detail besprechen. Es sei nur soviel gesagt, dass man für jede dieser Größen ein Normal, also die Einheitsmasse, die Einheitszeit und die Einheitslänge festlegen muss. Andere Massen, Zeiten und Längen bestimmt man dann im relativen Vergleich als Vielfache davon. Außerdem muss man sich davor hüten, andere bislang undefinierte Größen bei der Messung einfließen zu lassen. Zum Beispiel könnte man ja auf die Idee kommen, Massen dadurch zu vergleichen, dass man eine unbekannte Masse mit Einheitsgewichten auf einer Balkenwaage tariert. Dazu jedoch brauchte man den Begriff der (Gewichts-)Kraft, und zwar am besten unabhängig von allen anderen drei Größen. Das jedoch ist seltsam, denn wie man weiß, hat die Kraft die Einheit  $\text{N} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$ , also muss sie doch durch die drei genannten Grundgrößen herleitbar sein.

Solche Zirkelschlüsse sind Wissenschaftlern schon seit langer Zeit als störend aufgefallen. Wie Goethe sagt: „Denn eben wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein. Mit Worten lässt sich trefflich streiten, mit Worten ein System bereiten, an Worte lässt sich trefflich glauben, von einem Wort lässt sich kein Jota rauben.“ Das in diesem Zusammenhang nötige, treffliche Wort lautet **primitiv**. Masse, Zeit und Länge sind sogenannte **primitive Größen**. Damit will man aber keineswegs ausdrücken, dass sie ordinär oder simpel sind. In der Natur-

wissenschaft versteht man darunter, dass sie keiner weiteren Erklärung bedeuten und damit basta!

Unsere drei mechanischen Grundgrößen haben noch eine schöne Eigenschaft. Man kann mit jeder einzelnen von ihnen rechnen wie mit reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , also zum Beispiel addieren bzw. subtrahieren. Die Reihenfolge ist gleichgültig. Selbstverständlich muss man dabei stets die Einheit hinzufügen. Größen, die über diese schön einfache Eigenschaft verfügen, nennt man **Skalare**.

## 1.2.2 Kraftbegriff

Die schon erwähnte weitere mechanische Grundgröße **Kraft** ist komplizierter. Sie ist ein sogenannter **gebundener Vektor**, und als solcher gehorcht sie zunächst einmal den in der Toolbox zusammengestellten mathematischen Rechenregeln für Vektoren.



**Vektoren** Wir bezeichnen Vektoren, wenn wir sie als abstrakte, koordinatenunabhängige Objekte begreifen, mit fettgedruckten Buchstaben, also ***a***, ***b***, etc. Da dies in Handzeichnungen schwierig kenntlich zu machen ist, versehen wir sie dort mit einem Unterstrich. Man kann sie sich anschaulich als Pfeile vorstellen. Man addiert Vektoren geometrisch unter Beachtung der „Hacke-Spitze-Regel“: Man nehme den ersten Vektor aus einer zu addierenden Gruppe und hänge an seine Spitze die Hacke des nächsten, u.s.w., bis alle berücksichtigt wurden. Dann verbinde man die Hacke des ersten Vektors mit der Spitze des letzten. Dies ergibt die äquivalente **Resultierende**. Das Negative eines Vektors erhält man, indem man Pfeilspitze und Pfeilanzfang vertauscht, was auch die Subtraktion erklärt. Es gilt ein Kommutativgesetz:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (1.1)$$

Vektoren kann man bezüglich Basen darstellen. Wenn es sich um vektorielle Größen im physikalischen Raumes handelt, wählt man oft eine kartesische Einheitsbasis  $\mathbf{e}_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  und schreibt:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \equiv a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.2)$$

Hier tritt die **Einsteinsche Summenkonvention** in Aktion: Über in einem Produkt auftretende gleichnamige Indizes (hier  $i$ ) wird im 3D-Raum automatisch von eins bis drei summiert. Wenn es sich um ein ebenes Problem handelt, natürlich nur bis zwei.

Das **Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren bildet diese auf eine reelle Zahl ab. Ist  $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  der Winkel zwischen den Vektoren ***a*** und ***b***, dann gilt für ihr Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha = a_i b_i. \quad (1.3)$$

Man kann das Skalarprodukt als Projektion des einen Vektors auf den anderen deuten. Außerdem kann man damit die Länge eines Vektors berechnen:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_i a_i}. \quad (1.4)$$

Dabei erhält man die Komponentendarstellung  $a_i a_i$  in der letzten Gleichung aufgrund der Tatsache, dass gilt:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (1.5)$$

Man nennt das Symbol  $\delta_{ij}$  auch das **Kroneckerdelta**. Wir werden später sehen, dass es die Komponenten des **Einheitstensors** bezüglich orthonormaler Basen angibt (vgl. Gleichung (2.14)).

Das **Kreuzprodukt** bildet zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  auf einen Vektor  $\mathbf{c}$  ab:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (1.6)$$

wobei dieser senkrecht auf  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  steht,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$  und  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ . Für die Länge des Vektors  $\mathbf{c}$  gilt:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha. \quad (1.7)$$

Das ist gleich der durch  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeschlossenen Parallelogrammfläche, wobei  $\alpha$  wieder den Zwischenwinkel zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  (bei Drehrichtung von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$ ) bezeichnet. Die Richtung von  $\mathbf{c}$  ist dadurch festgelegt, dass  $\mathbf{c}$  auf beiden Vektoren senkrecht steht und  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  in dieser Reihenfolge ein Dreibein bilden (Rechte-Hand-Regel). Eine Komponentendarstellung ist ebenfalls möglich:

$$c_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k \quad (1.8)$$

mit dem **Levi-Civita-Symbol**:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ und zyklisch vertauscht} \\ -1 & \text{falls } i, j, k = 2, 1, 3 \text{ und zyklisch vertauscht} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Wir werden später sehen, dass  $\epsilon_{ijk}$  die Komponenten des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe sind. Alternativ ist auch die folgende Determinantendarstellung gültig:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nicht nur bei Kreuzproduktskomponenten ist das Levi-Civita-Symbol nützlich. Man kann es auch dazu verwenden, den dritten Einheitsvektor einer Orthogonalbasis zu ermitteln:

$$\mathbf{e}_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k. \quad (1.11)$$

Dabei sind zum Beispiel  $i, j, k$  im Falle einer kartesischen Orthogonalbasis aus der Menge  $\{1, 2, 3\}$  und bei Zylinderkoordinaten aus  $\{r, \varphi, z\}$ .

Wichtig zu kennen ist auch die sogenannte „*bakzapp-Regel*“, die es gestattet, ein doppeltes Kreuzprodukt in zwei Vektoren umzuschreiben:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.12)$$

und die *Spatproduktsregel*, die das Volumen des durch drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds zu berechnen erlaubt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}). \quad (1.13)$$

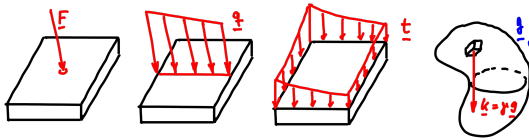
Das Adjektiv *gebunden* bedarf einer weiteren Erklärung. Mathematische Vektoren können ohne Probleme parallel zu sich verschoben werden. Führt man eine solche Aktion bei einem Kraftvektor durch, so kann sich der Effekt ändern, den er bei einem Körper verursacht. Beispielsweise kann bei Wechsel von einem Körperangriffspunkt A nach B anstelle einer Linksdrehung eine Rechtsdrehung erfolgen. Dieser Fußpunkt erklärt die Bindung eines Kraftvektors an den ihm zugehörigen materiellen Körper. Man darf einen Kraftvektor allerdings längs seiner Wirkungslinie (WL) durch den Fußpunkt verschieben. In der Praxis wird das durch Verbindungselemente (Seile, Stangen) realisiert.

Auch der Kraftvektor ist eine primitive Größe. In der Tat erschließt sich seine Existenz aus dem aristotelischen (abendländischen) Prinzip von Ursache und Wirkung: Wir beobachten eine Deformation an einem Körper oder dessen Beschleunigung bzw. Abbremsung aus einer Anfangsgeschwindigkeit heraus (Wirkung) und glauben, dass dem eine Ursache zugrunde liegen muss. Diese Ursache nennen wir Kraft. Wohlgermerkt, das ist nur ein Name, obwohl Newton Ursache und Wirkung in seinem Gesetz *Kraft = Masse × Beschleunigung* zusammengeführt hat. Davon wird im Kapitel Dynamik noch die Rede sein. Eines sei aber schon jetzt gesagt. Wenn man glaubt, diese Gleichung definiere die Kraft, so ist man auf dem Holzweg. Sie verbindet lediglich diverse primitive Größen, denn die Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit setzt sich ja aus den primitiven Größen Ort und Zeit zusammen. Die Situation ist in einem gewissen Sinne immer noch so wie in alten Zeiten, wo man glaubte, dass ein zorniger Donnergott (die primitive, nicht erklärbare Ursache) seine Blitze (die beobachtete Wirkung) schleuderte. Im Unterschied zu Göttern jedoch ist die Kraft verlässlich und ihre Wirkung beliebig oft reproduzierbar. Das ist der entscheidende, womöglich einzige Vorteil der Naturwissenschaft gegenüber jedweden Glaubens. Aber was Kraft, Masse, Zeit, Länge letztendlich sind, verschweigt des Sängers Höflichkeit. Allerdings erklärt Newtons Grundgleichung die oben genannte Einheit für die Kraft und ihren Zusammenhang zu den Einheiten der mechanischen Grundgrößen. Einheitsentreue muss gegeben sein:  $1\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ .

### 1.2.3 Einteilung der Kräfte

In der technischen Mechanik sind wir gezwungen, diverse Kraftbegriffe und Kraftmodelle auseinanderzuhalten. Als Kraftbegriffe notieren wir zunächst die sogenannte *äußeren* oder auch *eingepprägten* Kräfte. Sie sind vorgegeben, also bekannte Größen. Das Paradebeispiel ist die Schwerkraft, die jedem massebehafteten Körper auf der Erde innewohnt. Aber auch „von außen“ auf dem Körper angreifende, bereitgestellte Lasten zählen hierzu. Sie entstehen, indem man am Körper willentlich zieht oder drückt. Dieser Zug bzw. Druck kann punkt-, linien-,

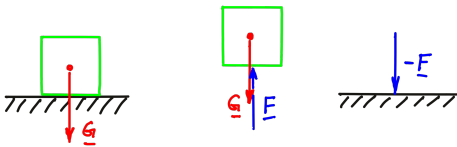
flächen- oder volumenförmig angebracht bzw. verteilt werden. Das führt auf die Modelle **Punktkraft  $F$** , **Streckenlast  $q$** , **Flächenkraft  $t$**  und **Volumenkraft  $f$** , die in Abb. 1.1 illustriert sind. Während  $F$  in Newton angegeben wird, ändern sich je nach Art der Lastverteilung bei den anderen die Einheiten. Wir haben  $[q] = \frac{N}{m}$ ,  $[t] = \frac{N}{m^2}$ ,  $[f] = \frac{N}{m^3}$ . Manchmal bezieht man die Volumenkraft auf die Massendichte  $\rho$  und erhält  $[f/\rho] = \frac{m}{s^2}$ . Das ist die Einheit einer Beschleunigung, namentlich der Erdbeschleunigung  $g$ . Den Betrag der Volumenkraft nennt man auch die **Wichte** (spezifisches Gewicht)  $\gamma$ . Sie ist gleich der Dichte multipliziert mit dem Betrag der Erdbeschleunigung  $\gamma = \rho g$ .



**Bild 1.1** Illustration verschiedener Kraftarten.

Als weiterer Kraftbegriff seien die **Trägheitskräfte** notiert. Eine Beispiel hierfür ist der mit negativem Vorzeichen versehene Ausdruck **Kraft  $\times$  Beschleunigung**. Hier begeben wir uns jedoch auf gefährliches Eis, da wir damit beginnen, Ursache und Wirkung zu vertauschen bzw. begrifflich zu verwässern.

Kommen wir nun zu dem Begriff **Reaktions- bzw. Zwangskräfte**. Dieses sind Kraftgrößen, die daraus resultieren, dass man einem Körper seine „Bewegungsfreiheit nimmt“. Die Bewegungsfreiheit lässt sich dadurch einschränken, dass man den Körper fesselt, und das geschieht in der Technik durch Lagerung, also mit Hilfe von Seilen, Stangen, Gelenken etc. Nun interessiert natürlich, welche Belastung diese Lager als Konsequenz eingepprägter Kräfte erfahren. Diese Belastungen sind also unbekannt und darüber hinaus zunächst nicht sichtbar. Sichtbar werden sie erst im sogenannten **Freischnitt** (englisch **free body diagram**). Das Vorgehen ist in der Abb. 1.2 für ein einfaches Beispiel illustriert. Zu sehen ist ein Klotz mit dem Gewicht  $G$  (eingepprägte Kraft), der auf dem Boden aufliegt. Man möchte wissen, unter welcher Belastung der Boden steht. Man schneidet also die Kontaktfuge frei. Man beachte: Die Fuge hat zwei Seiten, eine zum Klotz und eine zum Erdboden hin. Für diesen Schnitt ist ein Preis zu zahlen, der darin besteht, dass man eine unbekannte Kontakt- bzw. Reaktionskraft  $F$  in der klotzseitigen Fuge, d. h. der Klotzunterseite einträgt. Außerdem trägt man eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft  $-F$  auf der erdbogen-seitigen Fuge an. Schiebt man beide Bilder übereinander, so ist man wieder beim Ausgangszustand angelangt, wo man die Reaktionskräfte „nicht sieht“.



**Bild 1.2** Freischnitt eines Klotzes im Schwerfeld.

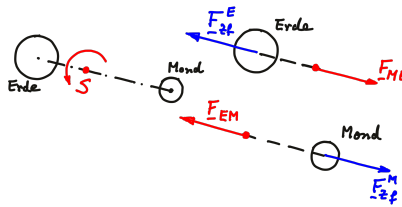
In der Statik ist es nun so, dass die Kraft  $F$  dem Gewicht  $G$  das Gleichgewicht hält. Beide sind betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt zueinander gerichtet. Wir werden das Prinzip der verschwindenden Gesamtkraft weiter unten in mathematischer Form als ein wesentliches Prinzip der Statik und

später als einen Spezialfall der Dynamik begreifen lernen. Wir werden auch noch sehen, dass man alle unbekanntes Reaktionskräfte aus Kräfte- und Momentengleichgewicht berechnen kann, wenn es sich um ein sogenanntes **statisch bestimmtes** System handelt. Manchmal jedoch gelingt das nicht. Dann benötigt man zusätzlich Elemente der Festigkeitslehre, um zum Ziel zu gelangen.



Natürlich ist der Freischnitt nicht immer so einfach wie im Beispiel. Wenn wir über Lagerungen sprechen, werden wir weitere solche **äußere**, durch Lagerungen hindurchgehende **Freischnitte** kennenlernen, die je nach Art des Lagers mehr oder weniger komplex ausfallen können. Bevor wir uns nun abschließend den inneren Freischnitten zuwenden, sind ein paar Bemerkungen angebracht.

- **Kraft und Gegenkraft** Dieses im Freischnitt der Fuge angewandte Prinzip geht wohl auf Newton zurück: Jede freigeschnittene **Kontaktkraft** kommt mit einer betragsmäßig gleichgroßen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft einher. Man sagt mantraähnlich gerne **actio = reactio**. Im Dynamikkapitel werden wir diese Aussage als Newtons **Lex Tertia** kennenlernen. Sie ist aber insbesondere in der Statik in der erläuterten Form gültig.



**Bild 1.3** Freischnitt der Gravitationswirkung Erde-Mond.

- **Fernwirkungsprinzip, dynamisches Gleichgewicht, Prinzip von d'Alembert** Im diskutierten Beispiel sind offensichtlich die Kraft und die Gegenkraft **gleichzeitig** präsent, denn beide „befinden sich“ in derselben Fuge an demselben Punkt. Betrachten wir nun das Beispiel des Systems Erde-Mond. Man kann sich das idealisiert so vorstellen, dass beide wie ein starrer, aus zwei ungleichen, radialsymmetrischen Massen bestehender Hantelkörper mit einer Winkelgeschwindigkeit um den (Schwer-)Punkt  $S$  drehen. Das ist jedoch ein gedachter Punkt, denn die Stange, welche in einer richtigen Hantel die beiden Köpfe verbindet, fehlt. Trotzdem schneiden wir wie in Abb. 1.3 dargestellt frei. Wir erhalten zwei Teilsysteme, eins für die Erde, eins für den Mond. Im ersten Fall wirkt die Kraft  $F_{ME}$ , die der Mond aufgrund seiner Gravitation auf die Erde ausübt, und im zweiten Fall die Kraft  $F_{EM}$ , mit der die Erde den Mond anzieht. Es gilt  $F_{ME} = -F_{EM}$ , also **actio = reactio**. Man beachte: Die Gravitationswirkung wird ohne ein Medium, sozusagen durch das Vakuum übertragen. Für wahre Mechaniker ist das eine unangenehme Vorstellung. Man nennt das abschätzig auch **Fernwirkung**. Außerdem teilt sich (nach Newton) die Information, dass eine Masse gravitiert, unendlich schnell über beliebig weite Distanzen hinweg mit. Auch das klingt nach Science Fiction. Schließlich fragt man sich, welche Kraft im Erde-Mond-Beispiel den Gravitationskräften denn eigentlich das Gleichgewicht hält. Der Franzose d'Alembert hat darauf eine Antwort. Es handelt sich hier doch eigentlich um ein dynamisches Problem, und dann muss man neben den Freischnittkräften auch noch die mit einem negativen Vorzeichen versehene Trägheitskraft, genannt **Zentripetalkraft**, antragen. Dieses Konglomerat nennt man dann auch **Zentrifugalkraft**  $F_{Zf}$ . Höchst abstrus das Ganze! Darum lassen sich Newtonianer auch nicht darauf ein. Im Kapitel über Kontinuumsmechanik werden wir diese beiden Standpunkte miteinander vergleichen und verstehen, dass dies mit dem sogenannten Beobachterwechsel zusammenhängt.

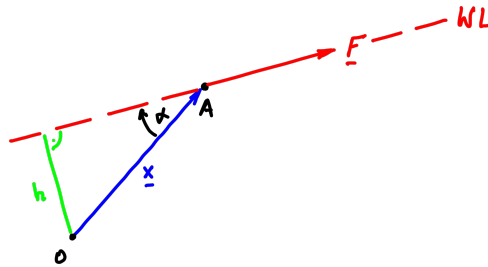


Bild 1.5 Moment einer Kraft und Wirkungslinie.

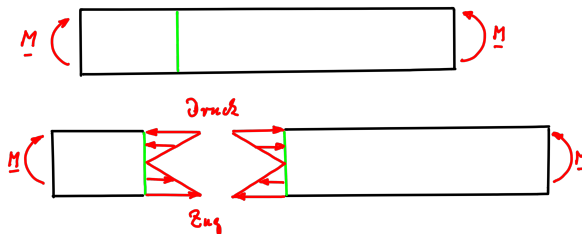


Bild 1.4 Freischnitt durch Balkenquerschnitt.

Nun zu den **inneren Reaktionskräften**. Wir betrachten die in Abb. 1.4 dargestellte Situation eines belasteten Balkens. Unter dem gezeichneten Biegemoment  $M$  wird er sich „zu einem Smiley“ biegen: Der Obergurt wird dabei gestaucht und der Untergurt gestreckt. Diese Wirkung wird sich aufgrund innerer Kräfte im Balken einstellen. Um sie sichtbar zu machen, müssen wir über dem Querschnitt  $A$  wie gezeichnet freischnitten. Dieser innere Schnitt durch Materie enthüllt die inneren Reaktionskräfte. Man beachte, dass auch hier das Actio=Reactio-Prinzip gilt: Wenn man die beiden Teilbalken zusammenführt, annihilieren sich die Kraftverteilungen der beiden Teilbalken und die Situation vor dem Schnitt ist wiederhergestellt. Solche inneren Reaktionskräfte zu kennen, ist wichtig, denn sie entscheiden darüber, ob der Balken zerreißt, absichert oder knickt.

### 1.2.4 Momentenbegriff

Beim letzten Beispiel war bereits von Biegung aufgrund einer externen Kraftwirkung die Rede. Diese Biegung resultiert eigentlich aus einem Drehmoment, respektive Drehmomentenvektor, den wir wie folgt definieren:

$$\mathbf{M}^{(O)} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}. \quad (1.14)$$

Dabei ist  $O$  ein beliebiger Fußpunkt oder auch Bezugspunkt, der über den Ortsvektor wie in Abb. 1.5 gezeichnet zum im Punkt  $A$  angreifenden Kraftvektor führt.  $\mathbf{x}$  wird in diesem Zusammenhang auch als **Aufpunkt** bezeichnet. Es gilt für den Hebelarm  $h$ , der als Senkrechtabstand vom Fußpunkt zur Wirkungslinie der Kraft definiert ist:

$$h = |\mathbf{x}| \sin \alpha. \quad (1.15)$$

Also wegen [Gleichung \(1.7\)](#):

$$|\mathbf{M}^{(0)}| = |\mathbf{F}|h. \quad (1.16)$$

Das ist die Archimedische Definition des Begriffes Moment als Kraft×Hebelarm. Sehr oft studieren wir in der Technischen Mechanik ebene Probleme. Dann ist  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2$ . Mit den Gleichungen [Gleichung \(1.14\)](#) und [Gleichung \(1.10\)](#) finden wir dann:

$$\mathbf{M}^{(0)} = (F_2x_1 - F_1x_2)\mathbf{e}_3. \quad (1.17)$$

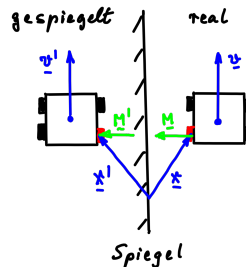
Wir fassen dieses Ergebnis in einem Merksatz zum praktischen Gebrauch zusammen:



Bei ebenen Problemen steht der Momentenvektor senkrecht zur Zeichenebene ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ). Er kann aus ihr heraus- oder hineinzeigen. Das entspricht einem positiven Wert und umgekehrt. Wir berechnen diese Komponente in  $\mathbf{e}_3$ -Richtung mit der einfachen Regel Kraft×Hebelarm der einzelnen Kraftkomponenten  $F_1, F_2$ , die mit Pfeilspitzen eingezeichnet werden. Dabei gilt „linksrum um O“ ist positiv und „rechtsrum“ negativ. Im gezeichneten Fall entspricht das den Produkten  $F_2x_1$  und  $-F_1x_2$ .

Einige Bemerkungen sind angezeigt:

- Der Momentenbegriff wird korrekterweise über den Momentenvektor erklärt. In der Praxis zweidimensionaler Probleme ist es jedoch oft müßig, den Vektorbegriff zu bemühen. Hier hilft der Merksatz weiter!



**Bild 1.6** Polare und axiale Vektoren.

- Aufgrund der Definition über das Kreuzprodukt ist der Momentenvektor ein **axialer Vektor** im Gegensatz zum Ortsvektor oder zum Kraftvektor, die **polare Vektoren** sind. Axiale Vektoren behalten bei einer Punktspiegelung ihr Vorzeichen bei, polare nicht. Das ist in der [Abb. 1.6](#) zu sehen: Das Auto bewegt sich aufgrund eines vom Motor auf die Hinterachse wirkenden Drehmoments, repräsentiert durch den Momentenvektor  $\mathbf{M}$ . Auch sein Spiegelbild bewegt sich in dieselbe Richtung. Dazu gehört ein Momentenvektor  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ , der in dieselbe Richtung weist. Beim Positionsvektor des linken Hinterrades jedoch wechselt der Pfeil von rechts auf links zeigend. Dieser wird demnach gespiegelt.
- Begreift man den Momentenvektor ausschließlich über eine Kraftgröße, wie in [Gleichung \(1.14\)](#) geschehen, so handelt es sich um eine abgeleitete und nicht um eine primitive Größe.

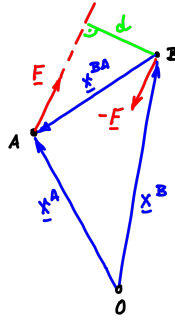


Bild 1.7 Ein Kräftepaar.

Die Aussage des letzten Spiegelpunktes ist fragwürdig, wie wir nun sehen werden. Betrachte die in der Abb. 1.7 gezeigte Situation von zwei antiparallelen, gleich großen Kraftvektoren  $\pm F$ , deren Wirkungslinien nicht zusammenfallen. Die Gesamtkraftwirkung ist also null. Die Momentenwirkung jedoch nicht und gegeben durch:

$$M^{(O)} = (\mathbf{x}^A - \mathbf{x}^B) \times F. \quad (1.18)$$

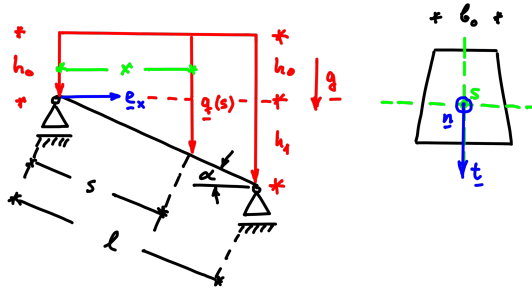
Wie man sich überzeugt, hängt der Differenzvektor **nicht** von der Wahl des Fußpunktes O ab. In der Tat ergibt sich bei Auswertung des Kreuzproduktes für den Betrag des Momentenvektors genau  $M = dF$ , wobei  $d$  der einzeichnete Senkrechtabstand ist, und diese Größe hängt von O nicht ab. Man kann nun in Gedanken einen Grenzprozess durchführen, und zwar so, dass  $d \rightarrow 0$  und  $F \rightarrow \infty$  mit  $M = \text{const.}$  gilt. Das wird dann nochmals abstrahiert, und man spricht von der Existenz eines **reinen Momentes** bzw. **reinen Momentenvektors M** oder auch **Momentenpaares** (englisch *moment couple*), das nicht auf Kraft und Abstandsdefinitionen beruht, sondern eine eigenständige primitive Größe verkörpert. An den Vektor schreiben wir auch keinen Fußpunkt O, und er darf beliebig im Raum verschoben werden, ohne dass sich seine Wirkung auf einen Körper ändert. In Cartoonzeichnungen verwenden wir für das reine Moment gerne die Symbole  $\odot$  und  $\ominus$ , um (meist für ebene Probleme) anzudeuten, dass es sich um ein links (positives) oder rechts (negatives) drehendes, reines Moment handelt. Ein letztes Wort zu diesem Thema: Irgendwie muss man ein Momentenpaar ja erzeugen und wenn man an den Grenzprozess denkt, ja wohl letztlich auf atomaren Wirkungsfeldern beruhend begreifen. Wären dies rein radial gerichtete Kraftwirkungen, so wäre das Momentenpaar eine abgeleitete Größe. Es scheint jedoch wohl so zu sein, dass es auch wirbelförmige Felder gibt.

### Beispiel 1.1 Streckenlast I

In den Kapiteln, die sich mit Balken beschäftigen, z. B. Abschnitt 1.6, spielen Streckenlasten  $q$  eine wesentliche Rolle. Zur Vertiefung dieses Begriffs betrachten wir erstens einen statisch bestimmt gelagerten Balken von gleichbleibendem Querschnitt der Länge  $\ell$ , auf dessen Oberkante mit der Weite  $b_0$  das Gewicht einer Sandschüttung (Wichte  $\gamma_0$  in  $\text{N/m}^3$ ) ruht: Abb. 1.8. Am linken Ende ist die Höhe der Schüttung  $h_0$ , am rechten  $h_0 + h_1$  wie gezeichnet. Wir nehmen an, dass der Sand feucht ist und am Oberkante des Trägers „klebt“. Positionen auf der Flächenschwerachse können wir entweder durch die Koordinate  $0 \leq s \leq \ell$  über den Richtungsvektor  $\mathbf{n}$  (der Normalenvektor im Flächenschwerpunkt S des Balkenquerschnittes) oder durch die Horizontalabstände

$0 \leq x \leq \ell \cos \alpha$  mit dem horizontalen Richtungsvektor  $\mathbf{e}_x$  erfassen. Geometrische Überlegungen führen dann auf eine in diesen Koordinaten lineare Funktion der Schütthöhe:

$$h(x) = h_0 + \frac{x}{\ell} \frac{h_1}{\cos \alpha} \equiv h_0 + x \tan \alpha \quad \text{oder} \quad h(s) = h_0 + s \sin \alpha = h_0 + \frac{h_1}{\ell} s. \quad (1.19)$$



**Bild 1.8** Geneigter Stab prismatischen Querschnitts.

Die Streckenlast  $\mathbf{q}(s)$  wird im Eigensystem des Balkenquerschnitts dargestellt. Dazu führen wir zusätzlich noch den Tangentialvektor  $\mathbf{t}$  an die Querschnittsfläche wie gezeichnet ein:

$$\mathbf{q}(s) = n(s)\mathbf{n} + q_n(s)\mathbf{t}. \quad (1.20)$$

Darin sind  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{t}$  der Normalenvektor und der Tangentialvektor der *Schnittfläche* und nicht der Oberfläche des Körpers, siehe Abb. 1.8 rechts. Man nennt die Anteile  $n(s)$  und  $q_n(s)$  dementsprechend Normal- und Querlastverteilungen, wobei zu die Normallast tangential an der Balkenoberfläche liegt und die Querlast senkrecht zu dieser – eben genau andersherum als in Bezug auf die Schnittfläche. Wir werden später sehen, dass  $n(s)$  und  $q_n(s)$  für die Schnittlasten Normalkraft- und Querkraftverteilung verantwortlich sind. Nichtsdestotrotz ist es wichtig sich zu erinnern, dass im dargestellten Fall ihr Angriffspunkt (man erinnere, dass Kräfte gebundene Vektoren sind) auf der Oberseite des Balkens liegt, ganz genau gesagt in der zugehörigen Schwerachsebene des Querschnitts. Wir haben:

$$n(s) = q(s) \sin \alpha, \quad q_n(s) = q(s) \cos \alpha. \quad (1.21)$$

Den Betrag  $q(s)$  der Querlast findet man über das Gewicht der Sandschüttung an der Stelle  $s$ :

$$q(s) = \gamma_0 b_0 h(s) \quad (1.22)$$

und mithin:

$$n(s) = \gamma_0 b_0 (h_0 + s \sin \alpha) \sin \alpha, \quad q_n(s) = \gamma_0 b_0 (h_0 + s \sin \alpha) \cos \alpha, \quad s \in [0, \ell]. \quad (1.23)$$

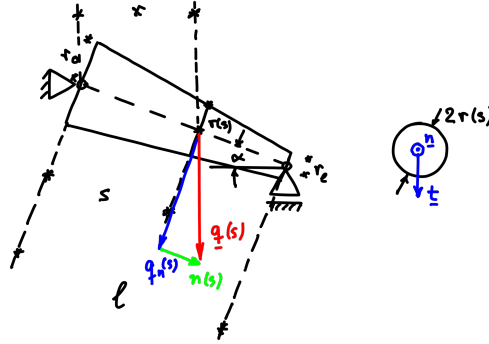
Der Spezialfall eines horizontalen Balkens  $\alpha = 0$  bringt:

$$n(x) = 0, \quad q_n(x) = \gamma_0 b_0 h_0 = \text{const.} \quad (1.24)$$

So erklärt es sich, dass man  $n(s)$  in vielen Büchern wenig Beachtung schenkt und sich auf  $q_n(s)$  fokussiert, das man kurz auch mit  $q(x)$  (Querlastverteilung) bezeichnet. ■

**Beispiel 1.2 Streckenlast II**

Das vorherige Beispiel 1.1 hat gezeigt, dass es nicht ganz einfach ist, Quer- und Normallasten zu realisieren. Der erwähnte Sand muss sozusagen am geneigten Balken „kleben“, damit dies geschieht, oder man hängt Gewichte dran. Dann sind die Verteilungen aber nicht wirklich kontinuierlich, sondern eher diskret.



**Bild 1.9** Geneigter konischer Stab.

Wirklich kontinuierliche Verteilungen erhält man, wenn man das Eigengewicht des Balkens beachtet. Betrachten wir dazu den in Abb. 1.9 geneigten konischen Stab der Länge  $\ell$  und der Wichte  $\gamma_0$ . Am linken Ende habe er die Fläche  $A_0 = \pi r_0^2$  und rechts  $A_\ell = \pi r_\ell^2$ . Mit den Bezeichnungen für Koordinaten aus Beispiel 1.1 schreiben wir für die Zwischenradien:

$$r(s) = r_0 + \frac{s}{\ell}(r_\ell - r_0). \tag{1.25}$$

Über das Gewicht der eingezeichneten Kreisscheibe findet man für den Betrag der Streckenlast:

$$q(s) = \gamma_0 b_0 \pi r^2(s) \tag{1.26}$$

und somit:

$$n(s) = \gamma_0 \pi \left[ r_0 + \frac{s}{\ell}(r_\ell - r_0) \right]^2 \sin \alpha, \quad q_n(s) = \gamma_0 \left[ r_0 + \frac{s}{\ell}(r_\ell - r_0) \right]^2 \cos \alpha, \quad s \in [0, \ell]. \tag{1.27}$$

Anders als im vorherigen Fall liegt der Angriffspunkt dieser Kraftverteilungen aber nicht auf der Oberkante der Kreisquerschnitte, sondern im Zentrum des Kreises, seinem Flächenschwerpunkt. Speziell für einen horizontal gelagerten konischen Stab ( $\alpha = 0$ ) finden wir:

$$n(x) = 0, \quad q_n(x) = \gamma_0 \left[ r_0 + \frac{x}{\ell}(r_\ell - r_0) \right]^2. \tag{1.28}$$

Offenbar ist die Querlastverteilung diesmal nicht konstant, sondern wächst quadratisch über  $x$  an. ■