Ulrich Gabbert
Ingo Raecke

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Technische Mechanik

für Wirtschaftsingenieure

8., aktualisierte Auflage

HANSER

Gabbert / Raecke

Technische Mechanik für Wirtschaftsingenieure

Ulrich Gabbert

Ingo Raecke

Technische Mechanik für Wirtschaftsingenieure

8., aktualisierte Auflage

HANSER

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Ulrich Gabbert

Dr.-Ing. Ingo Raecke
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Mechanik, Lehrstuhl Numerische Mechanik

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild: © shutterstock.com/FOTOGRIN
Satz: Ingo Raecke
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46661-6
E-Book-ISBN 978-3-446-46951-8

Vorwort

Die Lehrveranstaltung Technische Mechanik gehört zu den unverzichtbaren Grundlagenfächern eines jeden Ingenieurstudiums an Universitäten und an Fachhochschulen. Die Technische Mechanik basiert auf wenigen akzeptierten physikalischen Grundgesetzen sowie einer Vielzahl von experimentell abgesicherten Annahmen, durch die aus einer realen technischen Problemstellung ein mechanisches Idealsystem – ein Modell – gebildet wird, das erst die Lösung des technischen Problems ermöglicht. Verletzt man aus Unkenntnis den oft engen Gültigkeitsbereich dieser Annahmen, so hat die Lösung meist nur noch wenig mit dem realen Ausgangsproblem zu tun, was in der Praxis zu schweren Havarien und Unglücksfällen mit hohen menschlichen und materiellen Verlusten führen kann. Beispiele dafür gibt es leider mehr als genug.

Daher müssen Ingenieure über ein gesichertes Basiswissen, die notwendigen Orientierungsgrundlagen und eine zuverlässige Denkfähigkeit verfügen, die es ihnen erst ermöglichen, richtige Entscheidungen treffen zu können – Entscheidungen, die häufig mit der Verantwortung für die Sicherheit und die Zuverlässigkeit von Ingenieurprodukten verknüpft sind und von denen häufig genug auch die Umsätze und die Gewinne des Unternehmens in entscheidendem Maße abhängig sind.[1] Deshalb sollten gerade Wirtschaftsingenieure über eine besondere Kompetenz in der Beurteilung technischer Lösungen verfügen.

Der Inhalt des vorliegenden Lehrbuchs orientiert sich an dieser Zielrichtung und entspricht vom Umfang her einer zweisemestrigen Lehrveranstaltung mit einem Gesamtstundenumfang von 8 Semesterwochenstunden (2 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Übung pro Woche), wie sie heute üblicherweise an Universitäten und Fachhochschulen für den Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen angeboten wird. Die von uns vorgenommene Stoffauswahl erhält den Gesamtzusammenhang der Technischen Mechanik und umfasst die auch für alle anderen Ingenieurstudiengänge im Grundstudium üblichen Gebiete Statik, Festigkeitslehre und Dynamik, allerdings im reduzierten Umfang. Die Webseite plus.hanser-fachbuch.de enthält den Buchinhalt

---

[1] Siehe dazu auch „Denkschrift zur Didaktik der Mechanik“, erarbeitet von einem Ausschuss der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) unter Leitung von E. Stein, Deutsches Komitee für Mechanik, April 1999

in Form einer PowerPoint-Präsentation, in der die Lehrinhalte Schritt für Schritt entwickelt werden, wobei über das Buch hinausgehende farbige Darstellungen, Animationen und 24 Videos den Lernprozess unterstützen. In dem Buch werden 83 Beispiele vorgerechnet, da nach unseren Erfahrungen Beispiele wesentlich zum Verständnis und zum aktiven Anwenden des vermittelten Wissens beitragen.

Das Buch ist, wie bereits der Titel verdeutlicht, für die Studierenden des Studienganges Wirtschaftsingenieurwesen an Universitäten und an Fachhochschulen geschrieben worden. Es ist aber natürlich auch geeignet für alle anderen Ingenieurstudiengänge, wie Maschinenbau, Verfahrenstechnik, Elektrotechnik, Energietechnik, Logistik, Berufsschullehrer für Technik, Chemieingenieurwesen, Sport und Technik, Medizintechnik, Biomechanik u. a.

Die freundliche Aufnahme, die das Buch gefunden hat, machte eine weitere Auflage erforderlich. Die vorliegende achte Auflage ist inhaltlich mit der siebten Auflage identisch. Eine weitere Anpassung an die neue deutsche Rechtschreibung wurde vorgenommen.

Die Autoren bedanken sich bei all denen, die zur Verbesserung des Buches und zur Beseitigung von Schreibfehlern und anderen kleinen Mängeln beigetragen haben. Unser besonderer Dank gilt Dr.-Ing. Harald Berger, Dr.-Ing. Joachim Grochla und Dr.-Ing. Heinz Köppe für ihre wertvollen Hinweise zur inhaltlichen Verbesserung des Buches. Dem Verlag sei für seine stetigen Bemühungen um dieses Buch gedankt.

Magdeburg, im Februar 2021 Ulrich Gabbert, Ingo Raecke

Inhaltsverzeichnis

1 Statik

Was ist Technische Mechanik?

Die Mechanik ist die Lehre von der Wirkung von Kräften auf Körper. Sie ist ein Teilgebiet der Physik. Die Technische Mechanik wendet physikalische Gesetze auf technische Probleme an und entwickelt dabei grundlegende Methoden und Berechnungswege, um das mechanische Verhalten von realen technischen Systemen untersuchen, beschreiben und beurteilen zu können.

Die Technische Mechanik unterteilt man nach der Beschaffenheit der betrachteten Körper in die Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Das vorliegende Buch behandelt ausschließlich die Technische Mechanik fester Körper (Festkörpermechanik). Dieses Gebiet wird üblicherweise weiter unterteilt in

- **Statik**
- **Festigkeitslehre** und
- **Dynamik.**

Diese Unterteilung liegt auch dem vorliegenden Buch zu Grunde.

Die Statik – genauer die Statik fester Körper –, der wir uns im *Kapitel 1* zuwenden, ist die Lehre von der Wirkung von Kräften auf starre Körper im Gleichgewichtszustand. Die Beanspruchung der betrachteten Körper wird dabei als zeitlich unveränderlich vorausgesetzt. Es ist das Ziel der Statik, Bedingungen (Gleichgewichtsbedingungen) für die angreifenden Kräfte zu formulieren, unter denen ein Körper oder ein Körpersystem in Ruhe bleibt.

1.1 Grundlagen

1.1.1 Starrer Körper

Von einem starren Körper sprechen wir dann, wenn der Abstand zwischen zwei Punkten auf dem Körper bei beliebigen Belastungen unverändert bleibt. In der Statik vernachlässigen wir also die Verformung eines Körpers unter der Wirkung von Kräften.

Ein starrer Körper ist die Idealvorstellung eines Körpers, der unter Krafteinwirkung keine Verformung erfährt.

Natürlich ist ein realer Körper niemals ein starrer Körper. Das Modell eines starren Körpers ist aber in vielen Fällen eine für technische Bauteile und Konstruktionen zweckmäßige Annahme. Diese Annahme muss aber unbedingt kritisch überprüft werden, um die Gültigkeit der daraus folgenden Berechnungsergebnisse sicherzustellen. Die Annahme ist zulässig, wenn die Verformungen infolge der Einwirkung von äußeren Kräften so gering sind, sodass die Lageänderung der angreifenden Kräfte im Rahmen der Rechengenauigkeit vernachlässigt werden kann. Jeder reale Körper unter der Wirkung von äußeren Belastungen, der sich in Ruhe – d. h. im Gleichgewicht – befindet, kann gedanklich in einen starren Körper verwandelt werden (***Erstarrungsprinzip***).

1.1.2 Kraft

Der zentrale Begriff der Statik ist die Kraft. Als Urbilder der Kraft können die Gewichtskraft und die Muskelkraft angesehen werden. Die Muskelkraft kann erfahrungsgemäß an einem Körper im Schwerefeld der Erde Gleichgewicht herstellen. Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist bzw. nicht beschleunigt wird. Der Kraftbegriff in der Statik kann daher folgendermaßen definiert werden.

Jede physikalische Größe, die sich mit der Gewichtskraft ins Gleichgewicht setzen lässt, ist eine Kraft.

Aus der Erfahrung ist auch bekannt, dass eine Kraft in der Lage ist, eine ruhende Masse in Bewegung zu versetzen oder den Bewegungszustand von Körpern zu ändern. Mit derartigen Fragen befassen wir uns im *Kapitel 3 Dynamik*. Die Wirkung von Kräften auf Körper führt zu Deformationen an diesen Körpern, deren Berechnung Gegenstand des *Kapitels 2 Festigkeitslehre* ist.

Weitere Beispiele für Kräfte sind: magnetische und elektrische Kräfte, Druckkräfte von Flüssigkeiten und Gasen, Windkräfte, Federkräfte usw. Kräfte sind Vektoren und daher durch die Größen

- Betrag
- Richtung
- Richtungssinn und
- Angriffspunkt

bestimmt. Zur Kennzeichnung von Vektoren in Formeln wird das entsprechende Symbol mit einem Vektorpfeil versehen. Der Kraftvektor wird üblicherweise durch $\vec{F}$ (von force) gekennzeichnet. Der Betrag des Kraftvektors wird durch $|\vec{F}| = F$ dargestellt (eventuell wird F mit einem Index versehen, der den Angriffspunkt und/oder die Richtung kennzeichnet).

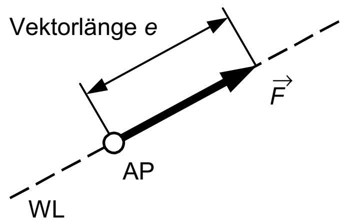

Bild 1.1 Zeichnerische Darstellung eines Vektors

Für die maßstäbliche zeichnerische Darstellung der Kraft benötigt man die Richtung (auch als Wirkungslinie WL bezeichnet) des Kraftvektors $\vec{F}$, den Angriffspunkt AP der Kraft, und die Vektorlänge e. Die Pfeilspitze legt den Richtungssinn auf der Wirkungslinie WL fest (*Bild 1.1*). Um den Betrag von $\vec{F}$ als Vektorlänge e darstellen zu können, muss man einen Maßstabsfaktor m_F festlegen. Mit dem Maßstabsfaktor ergibt sich die zeichnerische Vektorlänge e zu

$$e = \frac{1}{m_F} F \qquad \text{mit} \quad F \text{ in N} \quad \text{und} \quad m_F \text{ in } \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Die Einheiten der Kraft (gesetzlich verbindlich) lauten:

$$1 \ \text{N} = 1 \ \text{kg·m·s}^{-2}$$
$$1 \ \text{kN} = 1000 \ \text{N} \qquad \text{(alt: 1 kp = 9,81 N)}$$

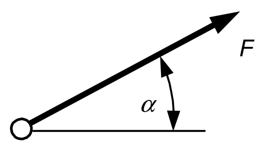

Bild 1.2 Skizze eines Kraftvektors

In dem vorliegenden Buch verzichten wir auf die Erläuterung von grafischen Verfahren zu Ermittlung von Kräften. Unsere Skizzen sind daher nicht streng maßstäblich und dienen im Wesentlichen der prinzipiellen Darstellung von Kräften. Das Pfeilbild einer Kraft gibt die Lage, die Richtung und den Richtungssinn an und wird durch die Angabe des Betrages F und des Richtungswinkels α ergänzt (siehe *Bild 1.2*).

In der Mechanik unterscheiden wir

- räumlich verteilte Kräfte (z. B. Gewichtskraft, elektrische und magnetische Kräfte),
- flächenhaft verteilte Kräfte (z. B. Druckkräfte von Flüssigkeiten und Gasen) sowie
- Einzelkräfte

Eine Einzelkraft ist ein idealisierter Grenzfall. Sie kann z. B. durch eine Seilkraft veranschaulicht werden, bei der der Angriffsbereich eine sehr kleine Querschnittsfläche des Seiles ist. Eine Einzelkraft kann am starren Körper als ein linienflüchtiger Vektor angenommen werden. Es gilt der folgende Satz (wichtiges Axiom der Statik der starren Körper):

> An einem starren Körper kann eine Einzelkraft beliebig entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass sich ihre Wirkung auf den starren Körper ändert. Video 2

1.1.3 Wechselwirkungsprinzip

Das Wechselwirkungsprinzip geht auf NEWTON[1] (1687) zurück, der die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung postulierte.

> Zu jeder Kraft gehört auf der gleichen Wirkungslinie eine Gegenkraft von gleichem Betrag, aber mit entgegengesetztem Richtungssinn.

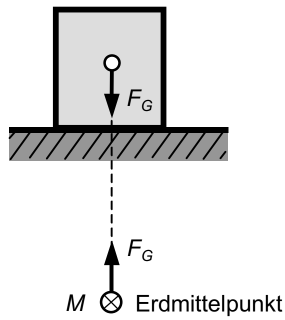

Bild 1.3 Wechselwirkungsprinzip

Eine Kraft tritt also niemals allein auf, sondern es gehört zu jeder Kraft eine gleich große Gegenkraft (siehe *Bild 1.3*). Das gilt beispielsweise auch für Kräfte, die an Körpern wirken, die sich nicht berühren (z. B. Gravitationskräfte zwischen Himmelskörpern, magnetische Kräfte).

1.1.4 Schnittprinzip

Ein Körper kann mittels eines gedachten Schnittes von seiner Umgebung befreit werden. Die dadurch verlorengegangene gegenseitige Beeinflussung zwischen Körper und Umgebung muss danach durch geeignet gewählte Kräfte ersetzt werden, die den ursprünglichen Ruhezustand (oder Bewegungszustand, siehe *Kapitel 3 Dynamik*) des Körpers wieder herstellen. Durch dieses grundlegende Prinzip wird es möglich, innere Kräfte eines technischen Systems sichtbar und damit berechenbar zu machen. Im *Bild 1.4* wurde beispielsweise der Körper aus *Bild 1.3* von seiner Unterlage befreit und die Wirkung der Unterlage auf den Körper sowie die Wirkung des Körpers auf seine Unterlage durch die Kraft F_N ersetzt.

---

[1] ISAAC NEWTON (1643 – 1727), englischer Mathematiker, Physiker und Astronom

1.1.5 Reaktionskräfte und eingeprägte Kräfte

Durch Lagerungen oder Abstützungen kann ein starrer Körper erfahrungsgemäß in seiner Lage fixiert werden – der Körper ist dann an seine Lage gebunden. Kräfte, die bei der Anwendung des Schnittprinzips die Wirkung der Lager oder der Stützen ersetzen, nennt man ***Reaktionskräfte*** (oder auch ***Bindungskräfte***). Der Angriffspunkt und die Wirkungslinie einer Reaktionskraft werden durch die von der zugehörigen Bindung verhinderten Bewegung des Körpers bestimmt (vgl. *Kapitel 1.4.2*).

Alle Kräfte, die nicht durch starre Bindungen (Lagerungen, Abstützungen) bedingt sind, heißen ***eingeprägte Kräfte***.

1.1.6 Gleichgewicht

Das Gleichgewichtsprinzip der Statik sagt aus, dass ein starrer Körper dann im Gleichgewicht ist, wenn er sich im Zustand der Ruhe (oder der gleichförmigen Bewegung) befindet.

In diesem Sinne wurde der Begriff schon in den vorhergehenden Kapiteln gebraucht. Wenn wir einen starren Körper aus der Umgebung freischneiden, alle Bindungen durch Reaktionskräfte ersetzen und auch die eingeprägten Kräfte antragen, liegt ein geometrisch bekannter Körper unter der Wirkung von Kräften vor. Wenn die Kräfte den Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung nicht verändern, befindet sich der Körper im Gleichgewicht.

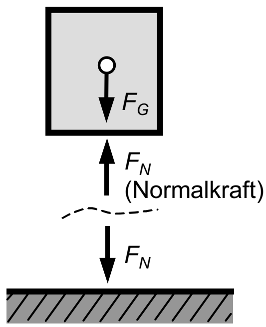

Bild 1.4 Schnittprinzip und Gleichgewicht

Der einfachste Fall einer Gleichgewichtsgruppe von Kräften liegt offensichtlich vor, wenn ein Körper unter der Wirkung von nur zwei Kräften steht (*Bild 1.4*). Dann herrscht Gleichgewicht, wenn die beiden Kräfte

1. die gleiche Größe (gleichen Betrag) haben,
2. entgegengesetzt zueinander gerichtet sind und
3. auf der gleichen Wirkungslinie liegen.

Diese durch die Erfahrung bestätigte Erkenntnis kann auf die Wirkung von beliebig vielen Kräften verallgemeinert werden (siehe *Kapitel 1.2*).

1.1.7 Äquivalenz von Kräften

Der Begriff Gleichgewicht soll noch durch den dualen Begriff Äquivalenz ergänzt werden.

Eine Gruppe von Kräften nennt man äquivalent (mechanisch gleichwertig) zu einer zweiten Gruppe von Kräften, wenn beide für sich an demselben starren Körper die gleiche mechanische Wirkung hervorrufen.

Für einen starren Körper sind unendlich viele Kräftegruppen denkbar, die zu einer gegebenen Kräftegruppe äquivalent sind. So sind beispielsweise zwei nach Betrag und Richtungssinn gleiche Kräfte auf der gleichen Wirkungslinie mit unterschiedlichem Angriffspunkt am starren Körper äquivalent.

Aus dem Gleichgewichts- bzw. Äquivalenzprinzip werden wir in den folgenden Kapiteln mathematische Gleichgewichts- bzw. Äquivalenzbedingungen ableiten, aus denen wir unbekannte Kräfte berechnen können.

1.2 Zentrales ebenes Kraftsystem

Eine Gruppe von Kräften, die an einem starren Körper angreift und in einer Ebene liegt, heißt zentrales ebenes Kraftsystem, wenn sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden.

1.2.1 Resultierende

Eine Gruppe von Kräften ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$) lässt sich durch eine äquivalente Kraft, die sogenannte ***Resultierende*** $\vec{F}_R$, ersetzen. Die Resultierende ist den Kräften ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$) äquivalent.

Grafische Lösung[2]

Wir betrachten zunächst nur zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Das *Bild 1.5 a)* zeigt den Lageplan, der die Angriffspunkte, die Lage der Wirkungslinien und die Richtung der beiden Kräfte zeigt. Der Lageplan wird üblicherweise unter Verwendung eines Längenmaßstabes gezeichnet, in den die Winkel der Wirkungslinien korrekt

[2] Die Anwendung grafischer Methoden dient nachfolgend vorwiegend zur Veranschaulichung. Die Lösung von Aufgaben erfolgt stets analytisch.

eingetragen werden. Im Kräfteplan (*Bild 1.5 b)* werden Betrag und Richtung der Kräfte unter Nutzung eines Kraftmaßstabes gezeichnet, wobei hier die Lage der Kräfte nicht mehr erfasst werden kann.

Parallelogrammsatz:[3] Zwei Kräfte lassen sich im Kräfteplan grafisch zu einer Resultierenden zusammenfassen, die nach Größe und Richtung durch die Diagonale in einem Parallelogramm bestimmt wird, dessen Seiten von den beiden (maßstäblich gezeichneten) Kräften aufgespannt werden.

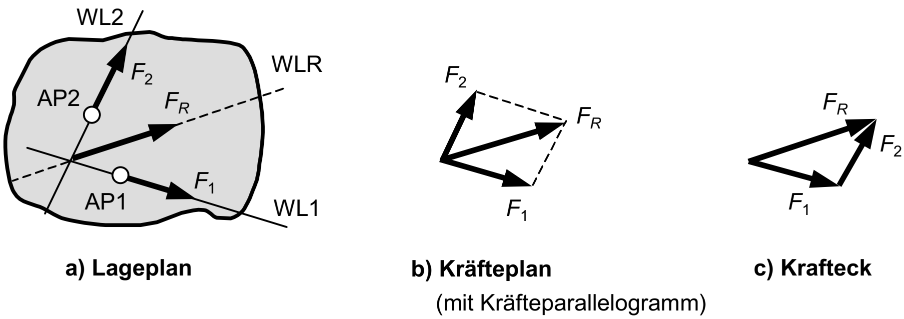

Bild 1.5 Lageplan, Kräfteplan, Krafteck

Der Parallelogrammsatz der Statik entspricht mathematisch dem Additionsgesetz von Vektoren, das wir nachfolgend für die analytische Ermittlung der Resultierenden benutzen werden. Das *Bild 1.5 b)* zeigt den Kräfteplan mit dem Kräfteparallelogramm.

Das Krafteck in *Bild 1.5 c)* ist eine Vereinfachung des Kräfteparallelogramms, bei dem die Reihenfolge der Kräfte beliebig ist.

Nach der beschriebenen grafischen Ermittlung der Resultierenden im Kräfteplan wird diese auf der resultierenden Wirkungslinie (WLR) in den Lageplan eingezeichnet.

Eine Umkehrung der Aufgabe, d. h. die Zerlegung einer Kraft in beliebig viele Komponenten ist nicht möglich. Eine Kraft kann in der Ebene eindeutig nur in zwei Komponenten zerlegt werden!

---

[3] Der Parallelogrammsatz ist ein Axiom, das weder bewiesen noch auf einfachere Aussagen zurückgeführt werden kann. Seine Richtigkeit hat sich dadurch bestätigt, dass alle Folgerungen aus diesem Axiom zu widerspruchsfreien, mit der Praxis übereinstimmenden Ergebnissen geführt haben.

Analytische Lösung[4]

Wie bereits erwähnt, können auf Kräfte die Regeln der Vektorrechnung angewandt werden. Für die Zusammensetzung von n Kräften zu einer Resultierenden gilt folglich:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_i + \ldots + \vec{F}_n \tag{1.1}$$

In Komponentenschreibweise bezogen auf ein (x,y)-Koordinatensystem (*Bild 1.6*) gilt für die Resultierenden in x-Richtung F_{Rx} und in y-Richtung F_{Ry}[5]

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \qquad F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \tag{1.2}$$

Sind die Kräfte $\vec{F}_i$ mit ihren Beträgen F_i und den Winkeln α_i (Winkel zwischen der positiven x-Achse und den Kräften $\vec{F}_i$ im mathematisch positiven Sinn, d. h. für die Lage des Koordinatensystems in *Bild 1.6* im Gegenuhrzeigersinn) gegeben, so kann man die Kräfte in ihre Komponenten in Richtung der x-Achse und der y-Achse zerlegen und erhält

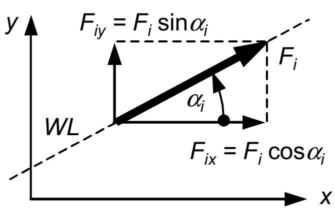

Bild 1.6 Komponenten einer Kraft

Video 3

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \qquad F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i \tag{1.3}$$

Hinweis: Verwendet man die oben angegebene Definition für die Winkel α_i (Winkel zwischen der positiven x-Achse und den Kräften $\vec{F}_i$ im mathematisch positiven Sinn), so wird in *Gleichung (1.3)* das richtige Vorzeichen der Kraftkomponenten automatisch über die Winkelfunktionen berücksichtigt.

Für die Resultierende ergibt sich dann

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \tag{1.4}$$

---

[4] Die Anwendung grafischer Methoden dient nachfolgend vorwiegend zur Veranschaulichung. Die Lösung von Aufgaben erfolgt stets analytisch.

[5] Kraftkomponenten werden mitunter auch nach der Richtung, in der sie liegen, indiziert. Zum Beispiel *H* für eine horizontal liegende Kraftkomponente und *V* für eine vertikal liegende Kraftkomponente. Nachteil: Es muss eine eindeutige Festlegung getroffen werden, wann so indizierte Kraftkomponenten positiv sind.

Die Lage der Resultierenden wird durch den Winkel α_R bestimmt, der sich aus

$$\tan\alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \tag{1.5}$$

ergibt. Da für α_R noch zwei Quadranten möglich sind, bildet man für die Eindeutigkeit des Richtungssinns noch

$$\sin\alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_R} \tag{1.6}$$

Beispiel 1.1 Resultierende zweier Kräfte

Video 4

Für die im Lageplan des *Bildes 1.7* dargestellten zwei Kräfte F_1 und F_2 soll die Resultierende ermittelt werden.

Wir wollen hier zunächst die Berechnung der Resultierenden nach den oben angegebenen allgemeinen Gleichungen vornehmen, um dann als weitere Möglichkeit die Berechnung vorzustellen, wie sie für praktische Belange meist zweckmäßiger ist.

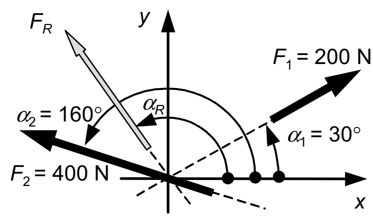

Bild 1.7 Resultierende zweier Kräfte

Berechnung mit den Gleichungen (1.3) – (1.6)

Da die Winkel zur Beschreibung der Lage der Kräfte im (x,y)-Koordinatensystem nach obiger Definition bekannt sind, folgen unmittelbar aus *Gleichung (1.3)* die Komponenten der resultierenden Kraft zu

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n=2} F_i \cos\alpha_i = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 = \left(200\cdot\cos 30^\circ + 400\cdot\cos 160^\circ\right)\mathrm{N}$$

$$\underline{F_{Rx}} = (173{,}2 - 375{,}9)\,\mathrm{N} = \underline{-202{,}7\,\mathrm{N}}$$

bzw.

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n=2} F_i \sin\alpha_i = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 = \left(200\cdot\sin 30^\circ + 400\cdot\sin 160^\circ\right)\mathrm{N}$$

$$\underline{F_{Ry}} = (100 + 136{,}8)\,\mathrm{N} = \underline{236{,}8\,\mathrm{N}}$$

Der Betrag der Resultierenden ergibt sich aus *Gleichung (1.4)*

$$\underline{\underline{F_R}} = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-202{,}7)^2 + 236{,}8^2}\ \mathrm{N} = \underline{\underline{311{,}7\,\mathrm{N}}}$$

und für den Winkel der Resultierenden in Bezug auf das (x,y)-Koordinatensystem erhalten wir aus *Gleichung (1.5)*

$$\tan\alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{236{,}8\,\mathrm{N}}{-202{,}7\,\mathrm{N}} = -1{,}168 \qquad \Rightarrow \qquad \text{zwei Lösungen für } \alpha_R$$

$$\alpha_{R,1} = -49{,}43^\circ$$

$$\alpha_{R,2} = 180^\circ + \alpha_{R,1} = 130{,}57^\circ$$

Für die Eindeutigkeit des Winkels berechnen wir noch mit *Gleichung (1.6)*

$$\sin\alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{236{,}8\,\mathrm{N}}{311{,}7\,\mathrm{N}} = 0{,}7597 \qquad \Rightarrow \qquad \text{zwei weitere Lösungen für } \alpha_R$$

$$\alpha_{R,3} = 49{,}43^\circ$$

$$\alpha_{R,4} = 180^\circ - \alpha_{R,3} = 130{,}57^\circ$$

Der gesuchte Winkel α_R muss die beiden *Gleichungen (1.5)* und *(1.6)* erfüllen. Das trifft nur für den Winkel von 130,57° zu. Damit hat die Resultierende den Richtungswinkel

$$\underline{\underline{\alpha_R = 130{,}57^\circ}}$$

Die Resultierende kann jetzt auf einer Wirkungslinie durch den Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien von F_1 und F_2 mit dem Richtungswinkel α_R eingezeichnet werden (siehe *Bild 1.7*).

Weitere Berechnungsmöglichkeit:

Die 2. Berechnungsmöglichkeit beruht darauf, dass zunächst nur die Beträge der Kraftkomponenten – in der Regel aus Winkeln zwischen 0 und $\pi/2$ zu einer der Koordinatenachsen – berechnet werden. Das richtige Vorzeichen der Kraftkomponenten für das Aufschreiben der *Gleichung (1.2)* muss dann aus der Anschauung gewonnen werden. Für dieses Beispiel erhalten wir (vgl. Kraftzerlegung in *Bild 1.8*):

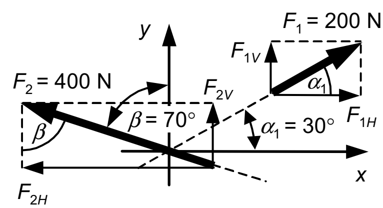

Bild 1.8 Komponenten von F_1 und F_2

$$\underline{F_{Rx}} = F_{1H} - F_{2H} = F_1\cos\alpha_1 - F_2\sin\beta = (173{,}2 - 375{,}9)\,\mathrm{N} = \underline{-202{,}7\ \mathrm{N}}$$

$$\underline{F_{Ry}} = F_{1V} + F_{2V} = F_1\sin\alpha_1 + F_2\cos\beta = (100 + 136{,}8)\,\mathrm{N} = \underline{236{,}8\ \mathrm{N}}$$

Wie man sieht, erhält man die gleichen Komponenten für die Resultierende. Die Rechnung wird dann wie oben fortgesetzt. Bei der Berechnung des Richtungswinkels α_R kann man sich auf die *Gleichung (1.5)* beschränken, wenn der richtige Winkel von den zwei möglichen wiederum aus der Anschauung (Beurteilung der Vorzeichen von F_{Rx} und F_{Ry}) gewonnen wird. Da in diesem Beispiel F_{Rx} negativ und F_{Ry} positiv ist, kann die Resultierende nur unter dem Winkel von $\alpha_R = 130{,}57°$ verlaufen. Die andere Lösung aus *Gleichung (1.5)* mit $\alpha_R = -49{,}43°$ würde bedeuten, dass F_{Rx} positiv und F_{Ry} negativ sein müssten (Kraft genau entgegengesetzt zu F_R), was hier nicht der Fall ist.

1.2.2 Gleichgewicht von Kräften

Das Kraftgleichgewicht ist, wie wir bereits im *Kapitel 1.1.6* festgestellt haben, die Bedingung für die Ruhe bzw. für die gleichförmige Bewegung eines Systems.

Eine zentrale ebene Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende gleich null ist.

Analytische Lösung

Wir fordern, dass die Summe aller Kräfte in zwei beliebigen Richtungen – meist nutzen wir dazu die x-Richtung (Index x) und die y-Richtung (Index y) oder die horizontale Richtung (Index H) und die vertikale Richtung (Index V) – und schreiben

$$F_{Rx} = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_{RH} = 0 \quad \text{oder symbolisch:} \quad \rightarrow : \tag{1.7}$$

$$F_{Ry} = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_{RV} = 0 \quad \text{oder symbolisch:} \quad \uparrow : \tag{1.8}$$

Da das Gleichgewicht in jeder beliebigen Richtung aufgeschrieben werden kann, gibt es unendlich viele Gleichgewichtsbedingungen. Da von diesen jedoch nur zwei linear unabhängig sind, können nur zwei Unbekannte berechnet werden. Weitere Gleichgewichtsbedingungen können gegebenenfalls zur Kontrolle benutzt werden.

1.2.3 Lagerungsbedingungen[6]

Seile, Stäbe und reibungsfreie Auflagen sind wichtige technische Realisierungen der Lagerung von starren Körpern. Wenn wir einen starren Körper mit Hilfe des Schnittprinzips von seinen Lagerungen befreien, werden die Lagerkräfte sichtbar.

Seile und Stäbe

Seile und Stäbe können nur Kräfte in Längsrichtung aufnehmen. Wir führen einen Schnitt durch das Seil oder den Stab und tragen eine Zugkraft (Zugkräfte sind dann

[6] Weitere Lagerungsbedingungen werden im *Kapitel 1.4.2* behandelt.

nach dieser Festlegung immer positive Kräfte) an das Schnittufer in Längsrichtung an (siehe *Bild 1.9*).

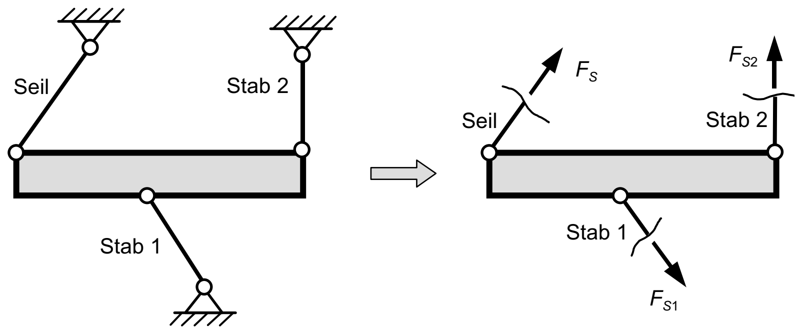

Bild 1.9 Lagerung durch Seile und Stäbe

Hinweis: Ein Seil kann nur Zugkräfte übertragen!

Ein Stab, der am Körper und an einem Festpunkt gelenkig befestigt ist, kann sowohl Zug- als auch Druckkräfte übertragen. Wenn wir in der Rechnung für die Stabkraft ein negatives Vorzeichen erhalten, d. h. $F_S < 0$, wird der Stab auf Druck beansprucht.

Reibungsfreie (ideal glatte) Berührung zwischen Körper und Unterlage

Beispiele für diese Lagerungsvariante sind die Lagerung einer Kugel in einer starren Rinne (siehe *Bild 1.10*) bzw. die Lagerung eines starren Körpers auf einer glatten Kante oder Schneide.

Durch einen Schnitt wird der Körper von der Unterlage befreit und üblicherweise eine Druckkraft F_N normal (senkrecht) zur gemeinsamen Tangentialebene von Körper und Unterlage angetragen. Wenn die Berechnung der Lagerkraft das Ergebnis $F_N < 0$ liefert, bedeutet das ein Abheben des Körpers von der Unterlage.

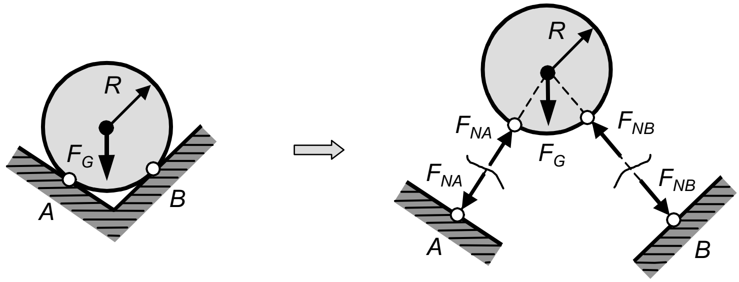

Bild 1.10 Reibungsfreie Berührung zwischen Körper und Unterlage

Wir erkennen daran, dass das Vorzeichen einer Kraft von der Definition der positiven Kraftrichtung abhängt. Natürlich ist bei einer korrekten Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen das Ergebnis unabhängig von der gewählten positiven Kraftrichtung.

Beispiel 1.2 Berechnung der Stabkräfte eines Stabzweischlages

Video 5

Wir wollen die Stabkräfte in einem sogenannten Stabzweischlag berechnen (siehe *Bild 1.11 a*). Die beiden Stäbe 1 und 2 sind an einem Ende gelenkig miteinander verbunden (z. B. durch ein Scharnier) und an dem anderen Ende jeweils durch ein Gelenk an einer starren Wand fixiert. Der Stabzweischlag wird durch eine Kraft F belastet.

Gegeben: F, α, β

Gesucht: Stabkräfte F_{S1} und F_{S2}

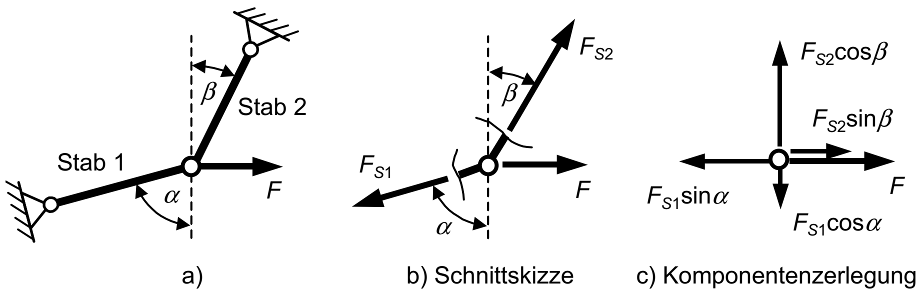

Bild 1.11 Berechnung der Stabkräfte eines Stabzweischlages

Zur Lösung schneiden wir das Verbindungsgelenk frei und tragen an den beiden Schnittstellen der Stäbe die Stabkräfte an (siehe *Bild 1.11 b*). Wir erhalten ein zentrales ebenes Kraftsystem, das sich im Gleichgewicht befinden muss. Die Gleichgewichtsbedingungen *(1.7)* und *(1.8)* liefern (vergleiche *Bild 1.11 c*)

$$\rightarrow: \quad -F_{S1}\sin\alpha + F_{S2}\sin\beta + F = 0 \qquad (1)$$
$$\uparrow: \quad -F_{S1}\cos\alpha + F_{S2}\cos\beta = 0 \qquad (2)$$

Das sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannte F_{S1} und F_{S2}. Aus der *Gleichung (2)* folgt

$$F_{S2} = F_{S1}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (3)$$

Einsetzen in die *Gleichung (1)* liefert:

$$-F_{S1}\sin\alpha + F_{S1}\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta} + F = 0$$

$$F_{S1}\,\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}=F$$

Mit dem Additionstheorem $\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$ ergibt sich daraus

$$F_{S1}=\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}F \qquad (4)$$

Einsetzen von *Gleichung (4)* in *Gleichung (2)* liefert

$$F_{S2}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}F \qquad (5)$$

Damit sind die Stabkräfte bekannt.

Diskussion der Lösung

Für $\alpha=\beta$ liegen die Stäbe auf einer Geraden. Aus den *Gleichungen (4)* und *(5)* ergeben sich dann rechnerisch unendlich große Stabkräfte. Dieser Widerspruch resultiert hier aus der Modellannahme eines starren Körpers. Lässt man die Verformbarkeit der Stäbe zu, dann stellt sich im Gleichgewichtszustand ein kleiner Winkel zwischen den Stäben ein, was zu endlich großen Stabkräften führt, die allerdings sehr groß sind und zur Zerstörung der Konstruktion führen können.

1.3 Allgemeines ebenes Kraftsystem

Ein allgemeines ebenes Kraftsystem ist eine Gruppe von Kräften mit beliebigen Wirkungslinien (WL), die sich nicht alle in einem Punkt schneiden.

Wir suchen nach den Bedingungen für das Gleichgewicht einer solchen beliebigen Kräftegruppe an einem starren Körper. Als Vorbetrachtung wollen wir nachfolgend zunächst die Resultierende zweier paralleler Kräfte ermitteln.

1.3.1 Ermittlung der Resultierenden zweier paralleler Kräfte

In *Bild 1.12 a)* haben wir zwei parallele Kräfte F_1 und F_2 an einem Körper angetragen. Wir wollen eine grafische Lösungsmöglichkeit diskutieren und ergänzen dazu die beiden Kräfte um eine Gleichgewichtsgruppe von zwei Hilfskräften F_H. Anschließend bilden wir grafisch mit dem Parallelogrammsatz die Resultierenden F_1^* und F_2^* und danach die Resultierende F_R dieser beiden Kräfte (siehe *Bild 1.12 b*).

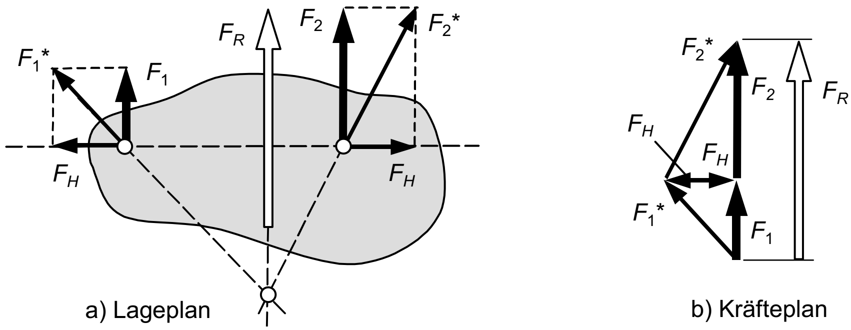

Bild 1.12 Resultierende zweier paralleler Kräfte

Wir haben hier die Resultierende und deren Lage (Wirkungslinie) mit einem Kunstgriff ermittelt, indem wir das Kraftsystem durch zwei sich gegenseitig aufhebende Hilfskräfte F_H auf der gleichen Wirkungslinie[7] ergänzt haben.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass F_2 den gleichen Betrag wie F_1 hat, aber auf einer parallelen Wirkungslinie entgegengesetzt zu F_1 gerichtet ist (*Bild 1.13*).

Die beiden Kräfte bilden ein sogenanntes ***Kräftepaar***.

> Ein ***Kräftepaar*** ist eine Kräftegruppe aus zwei gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Kräften auf parallelen Wirkungslinien.

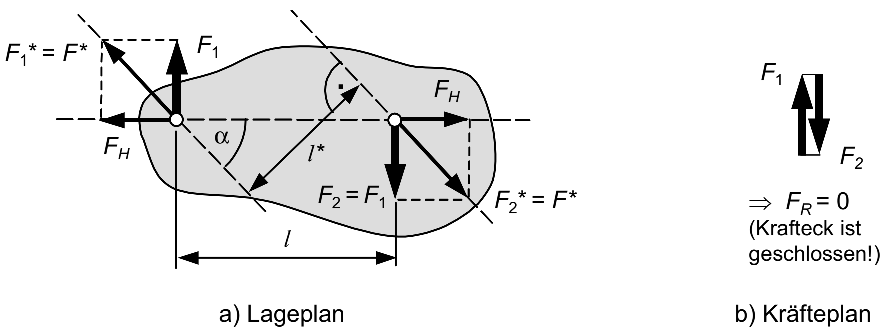

Bild 1.13 Parallele entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit gleichem Betrag (Kräftepaar)

Wegen $F_1 = F_2$ folgt $F_1^* = F_2^*$ und mit $l^* = l \cdot \sin\alpha$ und $F_1 = F_1^* \cdot \sin\alpha$ ergibt sich $F_1 \cdot l = F_1^* \cdot l^*$. Es ergeben sich also zwei neue entgegengesetzt gleiche Kräfte F^* auf parallelen Wirkungslinien mit exakt dem gleichen Produkt von Kraft· Abstand wie

---

[7] Die Ergänzung zweier sich gegenseitig aufhebender Kräfte kann auf beliebigen Wirkungslinien, die nicht parallel zu F_1 und F_2 sein dürfen, vorgenommen werden. Allerdings ist eine Lage der Wirkungslinien für die zu ergänzenden Kräfte senkrecht zu F_1 und F_2 zu empfehlen.

das der Ausgangskräfte mit dem Abstand *l*. Offenbar ist bei Wirkung eines Kräftepaares auf einen starren Körper das Produkt aus Abstand und Kraft, das wir als ***Moment*** bezeichnen, eine adäquate mechanische Größe.

1.3.2 Moment

Ein Kräftepaar kann nicht durch eine resultierende Kraft ersetzt werden! Ein Kräftepaar liefert ein ***Moment***!

Als Maß für die Wirkung eines Kräftepaares (siehe *Bild 1.14*) dient sein Moment

$$M = F \cdot l \qquad \text{mit der Einheit: N·m (N·cm, kN·m).} \qquad (1.9)$$

Die Wirkung eines Momentes auf einen starren Körper besteht in dem Bestreben, ihn um eine Achse senkrecht zu der vom Kräftepaar gebildeten Ebene zu drehen (z. B. Lenkrad, Schraubendreher). Daraus folgt auch die symbolische Darstellung durch einen den Drehsinn symbolisierenden gekrümmten Pfeil (in der Regel für ebene Probleme) bzw. durch einen Doppelpfeil (bei allgemeiner Lage der Drehachse).

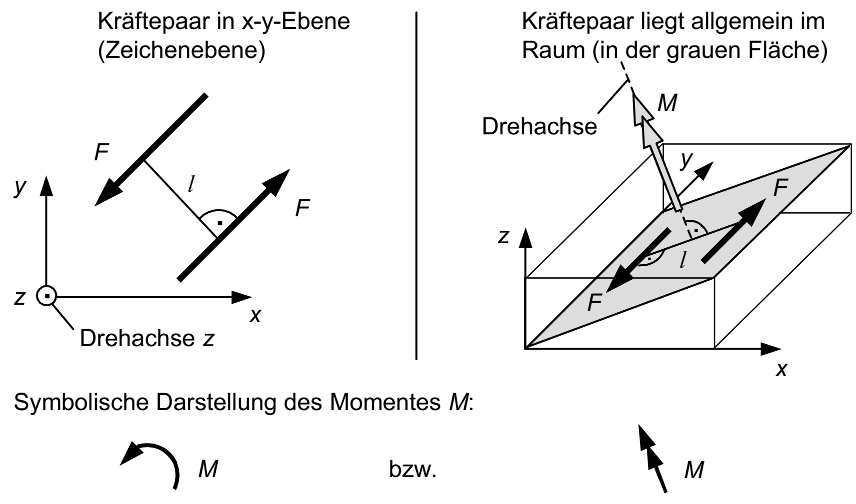

Bild 1.14 Kräftepaar und Moment mit symbolischer Darstellung

Das Moment *M* ist wie die Kraft *F* ein Vektor, was symbolisch durch $\vec{M}$ ausgedrückt wird. Der Momentenvektor $\vec{M}$ steht senkrecht auf der durch die beiden Kräfte des Kräftepaares aufgespannten Ebene (*Bild 1.14*). Liegt das Kräftepaar, welches das Moment bildet, in der Zeichenebene, so steht der Momentenvektor senkrecht auf der Zeichenebene.

Bei ebenen Problemen ist zur Kennzeichnung des Drehsinns der gekrümmte Pfeil ausreichend. Für allgemeine Lagen des Momentenvektors wird zweckmäßig die Darstellung als Doppelpfeil gewählt, wobei für die Zuordnung der Doppelpfeilrichtung, die den Drehsinn um die Drehachse festlegt, die rechte Hand-Regel (Rechtsschraube) benutzt wird (*Bild 1.15*).

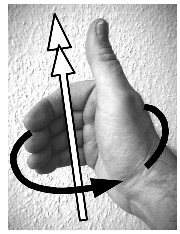

Bild 1.15

> ***Satz:*** Das Moment am starren Körper ist ein freier Vektor.

Der Momentenvektor kann also am starren Körper, im Unterschied zum Kraftvektor, auch senkrecht zu seiner Wirkungslinie verschoben werden ohne dass sich seine Wirkung auf den starren Körper verändert!

Video 2

1.3.3 Versetzungsmoment

Video 6

Was passiert, wenn wir eine Kraft am starren Körper auf eine parallele Wirkungslinie *„**versetzen**“*?

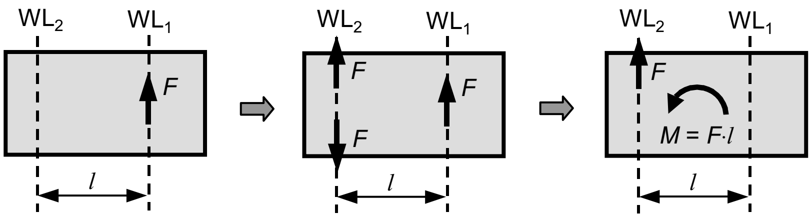

Bild 1.16 Versetzungsmoment beim parallelen Versetzen einer Kraft

Wir betrachten zur Klärung dieser Frage einen Körper mit den beiden parallelen Wirkungslinien WL_1 und WL_2 im Abstand l unter der Wirkung einer Kraft F auf der Wirkungslinie WL_1 (siehe *Bild 1.16*). Wir tragen jetzt auf der Wirkungslinie WL_2 zwei gleich große, sich gegenseitig aufhebende Kräfte F an. Damit ergibt sich ein Kräftepaar mit dem Abstand l, das durch ein Moment $M = F{\cdot}l$ – das sogenannte ***Versetzungsmoment*** – ersetzt werden kann.

> Wenn wir eine Kraft parallel zu ihrer Wirkungslinie verschieben, müssen wir das ***Versetzungsmoment*** berücksichtigen.

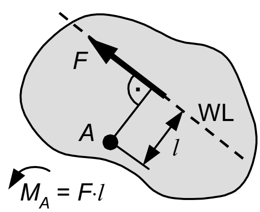

Bild 1.17 Statisches Moment einer Kraft *F* bezüglich *A*

Als ***statisches Moment*** einer Kraft F bezüglich eines beliebigen Punktes A bezeichnen wir das Versetzungsmoment M_A, das beim Versetzen der Kraft F auf eine parallele, durch A verlaufende Wirkungslinie entsteht (siehe *Bild 1.17*).

1.3.4 Rechnerische Ermittlung der Resultierenden (Lösungskonzept)

Für die Ermittlung der resultierenden Wirkung einer beliebigen Anzahl von Kräften an einem starren Körper bezüglich eines Punktes A versetzen wir sämtliche Kräfte durch Parallelverschiebung in den Punkt A und ermitteln das resultierende Versetzungsmoment. Die Kräfte können dann, wie beim zentralen Kraftsystem gezeigt, zu einer Resultierenden F_R zusammengefasst werden (siehe *Gleichungen (1.3)* und *(1.4)*). Für das resultierende Moment ergibt sich (vergleiche *Bild 1.18*)

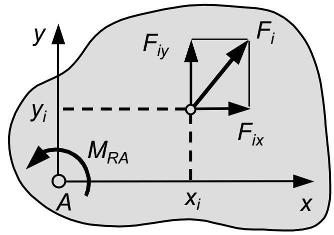

Bild 1.18 Bildung des resultierenden Momentes

$$M_{RA} = \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{iy} x_i - F_{ix} y_i \right) \tag{1.10}$$

Wir wollen die Berechnung an einem Beispiel betrachten.

Beispiel 1.3 Ermittlung der Resultierenden eines ebenen Kräftesystems

An einem starren Körper greifen drei Kräfte an (*Bild 1.19*). Wir suchen die Größe und die Richtung der Resultierenden F_R und deren Lage, die durch den Abstand x charakterisiert ist.

Gegeben: F, a

Gesucht: F_R sowie F_{RH} und F_{RV}, α, x

Zuerst berechnen wir mit den *Gleichungen (1.2)* und *(1.4)* die Größe der Resultierenden F_R.

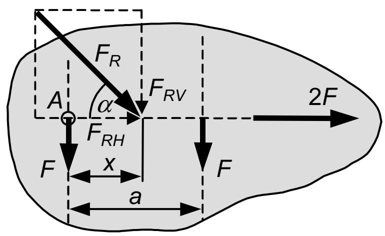

Bild 1.19 Berechnung der Resultierenden

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow:&\quad F_{RH} = 2F \\ \downarrow:&\quad F_{RV} = F + F = 2F \end{aligned}\right\} \qquad F_R = \sqrt{F_{RH}^2 + F_{RV}^2} = \sqrt{8F^2} = 2\sqrt{2}\,F$$

Aus *Gleichung (1.5)* folgt der Richtungswinkel α zu:

$$\tan\alpha = \frac{F_{RV}}{F_{RH}} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{2F}{2F} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$$