

Kai-Uwe Bletzinger  
Falko Dieringer  
Rupert Fisch  
Benedikt Philipp

# Aufgabensammlung zur Baustatik

Übungsaufgaben zur Berechnung ebener Stabtragwerke



2., aktualisierte Auflage

HANSER





**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**

# Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp • *Aufgabensammlung zur Baustatik*

Dallmann • *Baustatik*

Band 1: *Berechnung statisch bestimmter Tragwerke*

Band 2: *Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke*

Band 3: *Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke*

Engel/Al-Akel • *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Engel/Lauer • *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Fouad/Zapke • *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann • *Hydraulik für Bauingenieure*

Göttsche/Petersen • *Festigkeitslehre – klipp und klar für Studierende des Bauingenieurwesens*

Jochim/Lademann • *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke • *Physik im Bauwesen*

Malpricht • *Schalungsplanung*

Prüser • *Konstruieren im Stahlbetonbau*

Rjasanowa • *Mathematik für Bauingenieure*

Kai-Uwe Bletzinger  
Falko Dieringer  
Rupert Fisch  
Benedikt Philipp

# Aufgabensammlung zur Baustatik

Übungsaufgaben zur Berechnung ebener Stabtragwerke

2., aktualisierte Auflage

HANSER

## Die Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger, Technische Universität München

Prof. Dr.-Ing. Falko Dieringer, Hochschule für Technik Stuttgart und Ingenieurbüro Tragform Ingenieure, Stuttgart

Dr.-Ing. Rupert Fisch, Ingenieurbüro Tragraum Ingenieure PartmbB, Regensburg

Dr.-Ing. Benedikt Philipp, Ingenieurbüro BPR Dr. Schäpertöns Consult, München



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2022 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelbild: Michael Putz, TRAGRAUM Ingenieure PartmbB/DAV Kletterzentrum Berlin by [www.t-wall.org](http://www.t-wall.org)

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Satz: Eberl & Koesel Studio GmbH, Krugzell

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47278-5

E-Book-ISBN 978-3-446-47356-0

# Vorwort

Die Idee für dieses Übungsbuch ist in einem Teamgespräch zum Stand der Lehre am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München im Jahr 2011 entstanden. Die Autoren haben beschlossen, den Studierenden mehr Übungsmaterial zu den Handrechenverfahren der Statik an Stabtragwerken zur Verfügung zu stellen.

Friedrich Dürrenmatt schreibt in *Die Physiker*: „Was einmal gedacht wurde, kann nicht mehr zurückgenommen werden“. So findet sich im Erlernen von Statik die Parallele darin, dass ein statisches System, welches bereits einmal durchdacht wurde, nicht wieder vergessen werden kann. Das mehrmalige Rechnen ein und derselben Aufgabe stellt somit nur einen geringen Mehrwert dar, da der zentrale Baustein, das Tragwerks- bzw. Systemverständnis, bereits beim ersten Mal durchdacht wurde.

So ist die Motivation gewachsen eine umfangreiche Aufgabensammlung aufzubauen, in der eine ausreichende Anzahl an Übungsaufgaben zur Verfügung gestellt wird.

Durch die verfügbaren Kontrollmöglichkeiten ist ein selbstständiges Erlernen der Statik möglich. Zum besseren Einstieg in die verwendete Notation sind jedem Kapitel eine thematische Einführung und Musteraufgaben vorangestellt. Die mitgelieferte Stabwerkssoftware *Stiff* bietet einzigartige Kontroll- und Ergänzungsmöglichkeiten zur Bearbeitung des Buches und rundet somit das Gesamtpaket „Aufgabensammlung zur Baustatik“ ab.

Nach mehrjährigem erfolgreichem Einsatz dieser Aufgabensammlung innerhalb der Technischen Universität München wird dieser Aufgabenschatz in überarbeiteter Fassung als Gesamtwerk in diesem Buch dem kompletten Publikum an Studierenden und Schülern im deutschsprachigen Raum bereitgestellt.

Wir wünschen Ihnen damit viel Erfolg!

Zuletzt gilt unser Dank allen Studenten und Helfern, die, vom Erstellen, über das Gegenrechnen, hin zur Fehleridentifikation der Aufgaben und Musterlösungen, einen maßgeblichen Beitrag zum Gelingen des Gesamtwerks geleistet haben.

*Kai-Uwe Bletzinger*

*Falko Dieringer*

*Rupert Fisch*

*Benedikt Philipp*

## Vorwort zur zweiten Auflage

Auch im Zeitalter vollständig virtueller Welten bildet das Erlernen von theoretischen Hintergründen und deren sichere Anwendung nach wie vor das Fundament akademischer Ausbildung. Gleichzeitig stellen diese Fähigkeiten im Alltag der konstruktiven Ingenieure und Ingenieurinnen ein wichtiges und wertvolles Grundwerkzeug dar. Nur wer das Erlernte sicher anwenden kann, ist auch in der Lage, die täglichen Herausforderungen selbstverantwortlich zu meistern und Neues zu schaffen.

Die erste Auflage des Buchs erschien im Jahr 2015 und wird mittlerweile in einigen Hochschulen und Universitäten als Übungsbuch neben den klassischen Vorlesungsunterlagen empfohlen. Zum einen begleitend zu den Lehrveranstaltungen und zum anderen direkt für die Prüfungsvorbereitung.

Die vorliegende zweite Auflage wurde inhaltlich aktualisiert und erweitert. Einige Aufgaben wurden auf Grundlage wertvoller Rückmeldungen überarbeitet. Die begleitende Lehrsoftware *Stiff* wurde laufend erweitert und wesentlich fortentwickelt. Vollständig neu in dieser Auflage ist die kapitelweise inhaltliche Begleitung mit digitalen Inhalten und Videos.

Lassen Sie sich begeistern und erlernen Sie die statischen Grundfähigkeiten für Ihre persönliche Entwicklung und Ihre erfolgreiche Zukunft. Lassen Sie sich von einem Zitat von Seneca dabei begleiten: „Nicht, weil es schwer ist, tun wir es nicht; sondern weil wir es nicht tun, ist es schwer“.

*Kai-Uwe Bletzinger*

*Falko Dieringer*

*Rupert Fisch*

*Benedikt Philipp*

# Inhalt

<b>Vorwort</b> .....	V
<b>Digitale Inhalte</b> .....	XIII
<b>1 Einleitung und Definitionen</b> .....	1
1.1 Zur Benutzung des Buchs .....	1
1.2 Definition der Auflagersymbole .....	2
1.3 Definition der Gelenkarten .....	5
1.4 Allgemeine Hinweise .....	5
<b>2 Tragwerksbeurteilung</b> .....	7
2.1 Grundlagen zur Tragwerksbeurteilung .....	7
2.2 Beispielaufgabe 1 .....	10
2.3 Beispielaufgabe 2 .....	12
2.3.1 System 1 .....	13
2.3.2 System 2 .....	14
2.3.3 System 3 .....	15
2.3.4 System 4 .....	16
2.4 Beispielaufgabe 3 .....	16
2.5 Aufgaben .....	19
2.6 Lösungen .....	33

<b>3</b>	<b>Schnittgrößen statisch bestimmter Systeme</b> .....	35
3.1	Grundlagen zur Berechnung von Schnittgrößen an statisch bestimmten Tragwerken .....	35
3.2	Beispielaufgabe 1 .....	37
3.2.1	Auflager- und Zwischenreaktionen .....	37
3.2.2	Schnittgrößen: Moment .....	38
3.2.3	Schnittgrößen: Querkraft .....	39
3.2.4	Schnittgrößen: Normalkraft .....	40
3.2.5	Entfernen des Momentengelenks am Knoten 4 .....	41
3.2.6	Lösen der Einspannung am Knoten 1 .....	42
3.3	Beispielaufgabe 2 .....	43
3.3.1	Auflagerreaktionen .....	43
3.3.2	Schnittgrößen: Moment .....	44
3.3.3	Schnittgrößen: Querkraft .....	46
3.3.4	Schnittgrößen: Normalkraft .....	47
3.4	Aufgaben .....	49
3.5	Lösungen .....	64
<b>4</b>	<b>Polplan, Kinematik</b> .....	65
4.1	Grundlagen zu Polplänen und Kinematik .....	65
4.1.1	Begriffe zu Polplänen .....	65
4.1.2	Regeln zur Bestimmung der Haupt- und Nebenpole einer einzelnen Scheibe i .....	68
4.1.3	Ermittlung der Verschiebungsfigur für kinematische Systeme .....	71
4.1.4	Widersprüche im Polplan .....	73
4.2	Beispielaufgabe 1 .....	75
4.2.1	System 1 .....	75
4.2.2	System 2 .....	77
4.2.3	System 3 .....	81
4.3	Beispielaufgabe 2 .....	84
4.3.1	System 1 .....	85
4.3.2	System 2 .....	87
4.3.3	System 3 .....	89
4.4	Beispielaufgabe 3 .....	91
4.4.1	Verschiebungsfigur .....	92
4.4.2	Brauchbares System .....	95
4.5	Aufgaben .....	96
4.6	Lösungen .....	109

<b>5</b>	<b>Prinzip der virtuellen Kräfte</b> .....	111
5.1	Grundlagen zum Prinzip der virtuellen Kräfte .....	111
5.2	Beispielaufgabe .....	114
5.2.1	Schnittgrößen aus gegebener Belastung .....	114
5.2.2	Verschiebungen am Knoten 2 .....	116
5.2.3	Horizontalverschiebung am Knoten 2 maximal 4,0 cm .....	119
5.3	Aufgaben .....	120
5.4	Lösungen .....	137
<b>6</b>	<b>Prinzip der virtuellen Verschiebungen</b> .....	139
6.1	Grundlagen zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen .....	139
6.2	Beispielaufgabe .....	142
6.2.1	Vertikale Auflagerkraft $B_V$ am Lager B .....	142
6.2.2	Querkraft $V_a$ im Schnitt a .....	145
6.2.3	Moment $M_a$ im Schnitt a .....	149
6.2.4	Normalkraft $N_b$ im Schnitt b .....	152
6.3	Aufgaben .....	155
6.4	Lösungen .....	172
<b>7</b>	<b>Kraftgrößenverfahren</b> .....	173
7.1	Grundlagen zum Kraftgrößenverfahren .....	173
7.2	Beispielaufgabe 1 .....	177
7.2.1	Tragwerk 1 .....	177
7.2.2	Tragwerk 2 .....	179
7.2.3	Tragwerk 3 .....	179
7.2.4	Tragwerk 4 .....	180
7.3	Beispielaufgabe 2 .....	182
7.3.1	Lastfall 1: Einzellast P .....	182
7.3.2	Lastfall 2: Temperaturdifferenz $\Delta T$ .....	186
7.3.3	Lastfall 3: konstante Temperaturänderung $T_S$ .....	187
7.3.4	Lastfall 4: Auflagerverschiebung $\Delta u$ .....	189
7.4	Aufgaben .....	192
7.5	Lösungen .....	207
<b>8</b>	<b>Einflusslinien für Kraftgrößen</b> .....	209
8.1	Grundlagen zu Einflusslinien für Kraftgrößen .....	209
8.2	Beispielaufgabe .....	212
8.2.1	Bestimmung der Einflusslinien .....	212

8.2.2	Extremwerte für das Moment $M_8$ .....	216
8.2.3	Maximale Momente im Tragwerk und Verformungen am Knoten 10 .....	217
<b>8.3</b>	<b>Aufgaben</b> .....	220
<b>8.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	237
<b>9</b>	<b>Einflusslinien für Verschiebungsgrößen</b> .....	239
<b>9.1</b>	<b>Grundlagen zu Einflusslinien für Verschiebungsgrößen</b> .....	239
<b>9.2</b>	<b>Beispielaufgabe</b> .....	244
9.2.1	Vertikale Verformung $w_3$ .....	244
9.2.2	Einflusslinie für $w_3$ .....	246
9.2.3	Auswertung für Lastfall $p$ .....	249
9.2.4	Ersetzen der Feder durch ein Auflager – Berechnung mit Stiff .....	249
9.2.5	Minimale bzw. maximale Durchsenkung von $w_3$ – Berechnung mit Stiff .....	250
<b>9.3</b>	<b>Aufgaben</b> .....	252
<b>9.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	268
<b>10</b>	<b>Verschiebungsgrößenverfahren nach Theorie I. Ordnung</b> .....	269
<b>10.1</b>	<b>Grundlagen zum Verschiebungsgrößenverfahren</b> .....	269
<b>10.2</b>	<b>Beispielaufgabe 1</b> .....	277
10.2.1	System 1 .....	278
10.2.2	System 2 .....	286
<b>10.3</b>	<b>Beispielaufgabe 2</b> .....	293
<b>10.4</b>	<b>Beispielaufgabe 3</b> .....	298
10.4.1	Kinematische Abhängigkeiten .....	299
10.4.2	Steifigkeiten mit dem PvV .....	299
10.4.3	Berechnung mit Stiff .....	302
<b>10.5</b>	<b>Beispielaufgabe 4</b> .....	304
10.5.1	Kinematische Abhängigkeiten .....	304
10.5.2	Steifigkeiten mit dem PvV .....	305
10.5.3	Berechnung mit Stiff .....	307
<b>10.6</b>	<b>Aufgaben</b> .....	308
<b>10.7</b>	<b>Lösungen</b> .....	326
<b>11</b>	<b>Elastisch gebetteter Balken</b> .....	327
<b>11.1</b>	<b>Grundlagen zum elastisch gebetteten Balken</b> .....	327
<b>11.2</b>	<b>Beispielaufgabe</b> .....	331
11.2.1	Verformungen am idealisierten 2D-System .....	332
11.2.2	Verankerung des Balkens 2 .....	339

11.3	Aufgaben .....	339
11.4	Lösungen .....	356
<b>12</b>	<b>Verschiebungsgrößenverfahren nach Theorie II. Ordnung .....</b>	<b>359</b>
12.1	Grundlagen zum Verschiebungsgrößenverfahren nach Theorie II. Ordnung .....	359
12.2	Beispielaufgabe .....	366
	12.2.1 Verformungen ohne Berücksichtigung einer Vorverformung .....	366
	12.2.2 Verformungen mit Berücksichtigung einer Vorverformung .....	370
12.3	Aufgaben .....	372
12.4	Lösungen .....	397
<b>13</b>	<b>Stabilität .....</b>	<b>399</b>
13.1	Grundlagen zur Stabilität .....	399
13.2	Beispielaufgabe .....	407
	13.2.1 Berechnung der Knotenverformungen nach Theorie I. und II. Ordnung für $\nu = 1,0$ .....	407
	13.2.2 Berechnung des kritischen Lastfaktors $\nu_{\text{krit}}$ .....	411
	13.2.3 Knickfigur für $\nu_{\text{krit}}$ .....	412
	13.2.4 Überprüfung der Ergebnisse mit Stiff .....	413
	13.2.5 Bestimmung der Euler'schen Knicklast und der jeweiligen Knicklänge der einzelnen Stäbe .....	415
13.3	Aufgaben .....	416
13.4	Lösungen .....	433
<b>14</b>	<b>Grundformeln und Tafeln .....</b>	<b>435</b>
14.1	Integraltafeln .....	435
14.2	$\omega$ -Tafeln .....	437
14.3	Grundformeln des Verschiebungsgrößenverfahrens (VV) nach Theorie I. Ordnung .....	438
14.4	Grundformeln des Verschiebungsgrößenverfahrens (VV) nach Theorie II. Ordnung .....	447
14.5	Grundformeln des Verschiebungsgrößenverfahrens (VV) des elastisch gebetteten Balkens nach Theorie I. Ordnung .....	455
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>459</b>



# Digitale Inhalte

Begleitend zu den theoretischen Informationen und den Aufgaben finden Sie ergänzende Inhalte online.

Die mitgelieferte **Stabwerkssoftware Stiff** bietet einzigartige Kontroll- und Ergänzungsmöglichkeiten zur Bearbeitung des Buches und wird laufend erweitert und fortentwickelt.

Die Software können Sie herunterladen unter:



Umfangreiche Tutorien zur Nutzung finden Sie unter:



Vollständig neu in dieser Auflage ist die kapitelweise inhaltliche Begleitung mit **Videos**:





# 1

## Einleitung und Definitionen

### ■ 1.1 Zur Benutzung des Buchs

Das vorliegende Arbeitsbuch stellt Ihnen eine Aufgabensammlung zu den zentralen Inhalten der im deutschsprachigen Raum stattfindenden Statik-Vorlesungen an Hochschulen und Universitäten bereit.

Jedes Kapitel behandelt einen abgeschlossenen Themeninhalt und beginnt mit einer Aufarbeitung der theoretischen Hintergründe. Dann wird ein Ablaufschema bzw. „Kochrezept“ dargestellt und auf umfassende Beispielaufgaben angewendet, für die ausführliche Musterlösungen dargestellt werden. Idealerweise gehen wir davon aus, dass die Leserinnen und Leser des Buches sich intensiv mit diesen Musterlösungen auseinandersetzen, so dass sie Struktur und Ablauf dieser beispielhaften Lösungsgänge sinngemäß auf die folgenden Aufgaben übertragen und dann selbstständig bearbeiten können. Das wird anfänglich nicht einfach sein, ist aber eines der wichtigsten didaktischen Ziele dieses Buches, nämlich Fähigkeiten zur eigenständigen Problemlösung zu entwickeln und einzuüben. Denn genau darauf kommt es im Berufsalltag an, wenn man sich neuen Projekten stellen muss.

Im Rahmen der digitalen Inhalte werden die Themen nochmals aufgegriffen bzw. wiederholt und die zielsichere Anwendung vorgemacht. Dies erfolgt beispielhaft mit der zum Download verfügbaren Software Stiff.

In jedem Kapitel folgen nach den ausführlichen Musterbeispielen weitere 30 Aufgaben zum Selberüben. Sie sind nach Schwierigkeitsgrad klassifiziert, um bei der Orientierung zu helfen, welche Aufgaben Sie sich zutrauen oder um einzuschätzen, wie weit Sie mit dem eigenen Wissensstand und Lernfortschritt bereits gekommen sind. Am Ende jedes Kapitels finden Sie zu jeder Aufgabe Lösungswerte ausgewählter Größen (z.B. Schnittgrößen oder Verschiebungen) für die Kontrolle der eigenen Rechnung. Ein zusätzlicher und überaus wichtiger Lernerfolg wird erzielt, wenn Sie sich parallel zur Handrechnung eine eigene Musterlösung erstellen, indem Sie die Aufgabe mit einer geeigneten software modellieren und berechnen, wie z.B. mit unserer Software Stiff. Auch dazu braucht man die angegebenen Lösungswerte zur Kontrolle. Sie werden schnell merken, wie die alterna-

tiven Herangehensweisen Ihr eigenes Verständnis für Statik und Ihre Sicherheit bei der Handrechnung fördern. Wie Sie mithilfe geeigneter Software eine Musterlösung anfertigen können, dazu finden Sie in den digitalen Inhalten weitere Hilfestellungen.

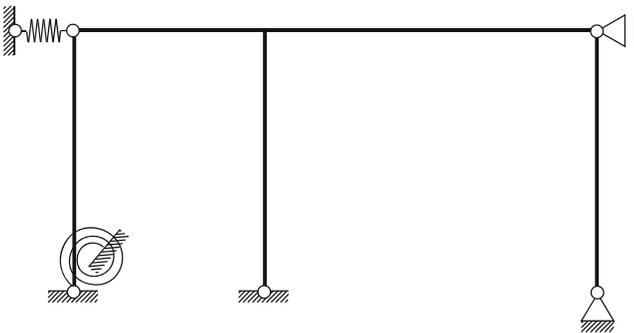
Jede Aufgabe soll zum Verständnis des Themas beitragen, indem Sie sich über die eigentliche Aufgabenstellung hinaus damit beschäftigen. Es ist dabei sehr wichtig, dass Sie sich dafür Zeit nehmen und jeden Schritt sorgfältig durchführen. Es wird dabei vorkommen, dass Sie die angegebenen Lösungswerte nicht auf Anhieb ermitteln. Dies ist kein Grund zur Verzweiflung, sondern der Beginn des tatsächlichen, gründlichen Lernens, indem Sie Ihre Handrechnung Schritt für Schritt mithilfe der eigenen Musterlösung durchgehen. So können Sie die Fehler entdecken und beurteilen, ob es nur Flüchtigkeitsfehler sind oder tatsächliche Wissenslücken, um die Sie sich nochmal kümmern sollten. Mit einer gründlich bearbeiteten Aufgabe lernen Sie mehr, als wenn Sie viele nur oberflächlich behandeln. Durch diesen Prozess werden Sie am Ende stärker aus der Aufgabe herausgehen – mit dem Ziel einer virtuellen Beherrschung der Inhalte, einem besseren Gefühl für Tragwerke und einer guten Prüfungsnote.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

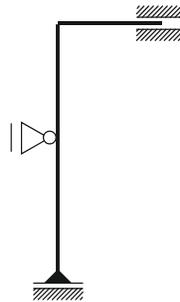
## ■ 1.2 Definition der Auflagersymbole

Im Folgenden werden allgemein verwendete Auflagersymbole anhand einiger Beispiele und Tabellen eingeführt:

### Häufig verwendete Auflagersymbole:



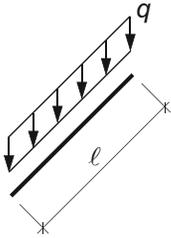
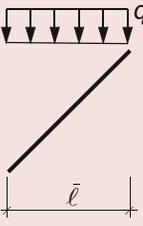
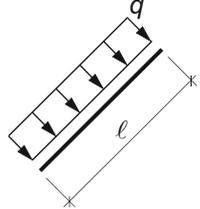
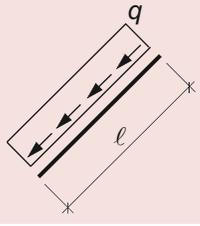
### Weitere verwendete Auflagersymbole:



Symbol	Beschreibung	Freie Verschiebungsgrößen	Auflagerreaktionen
	Zweiwertiges Auflager: Beide Verschiebungen sind festgehalten, die Verdrehung ist frei.		
	Einwertiges/Verschiebliches Auflager: Eine Verschiebung ist festgehalten, die andere Verschiebung und die Verdrehung sind frei.		
	Einspannung: Beide Verschiebungen und die Verdrehung sind festgehalten.		
	Senkfeder (auch Dehnfeder oder Normalkraftfeder): Die Verschiebung in Richtung der Feder ist über das Federgesetz $F_f = k_f \cdot u_f$ mit der Durchsenkung $u_f$ gekoppelt. Analog zum Pendelstab leistet die Feder keinen Widerstand senkrecht zu ihrer Achse.		
	Drehfeder (auch Rotationsfeder): Die Verdrehung der Feder ist über das Federgesetz $M_\varphi = k_\varphi \cdot \varphi$ mit der Verdrehung $\varphi$ gekoppelt. Die Verschiebungen werden durch die Drehfeder nicht festgehalten.		
	Biegesteifes verschiebliches Lager: Verschiebung senkrecht zum Stab bzw. in Stablängsrichtung ist nicht festgehalten.		

## Einführung der allgemein verwendeten Lastsymbole:

Symbol	Beschreibung
	Ungleichmäßige Temperaturverteilung über den Querschnitt: Im Allgemeinen wird die Differenz zwischen der Temperatur an der Querschnittsunterseite $T_u$ und der Querschnittsoberseite $T_o$ angegeben.
	Gleichmäßige Temperaturverteilung über den Querschnitt: Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Temperatur an der Querschnittsunterseite $T_u$ und der Querschnittsoberseite $T_o$ gleich ist.
	Eingeprägte Einzelverschiebung: Die jeweils angegebene Verschiebung bezieht sich auf einen bestimmten Punkt im Tragwerk. Im Allgemeinen können auch eingeprägte Rotationen vorhanden sein.

Symbol	Beschreibung
	<p>Einzellast und Einzelmoment: Die jeweils angegebene Belastung bezieht sich auf einen bestimmten Punkt im Tragwerk.</p>
	<p>Global orientierte Linienlast <math>q</math>: Die Linienlast ist global orientiert, hier in vertikaler Richtung nach unten. Diese Linienlast bezieht sich auf die gesamte Stablänge <math>l</math>. Dieser Typ von Linienlast kann zur Modellierung von Eigengewichtslasten verwendet werden.</p>
	<p>Global orientierte Linienlast <math>q</math>: Die Linienlast ist global orientiert, hier in vertikaler Richtung nach unten. Diese Linienlast bezieht sich auf die projizierte Stablänge <math>\bar{l}</math>. Dieser Typ von Linienlast kann zur Modellierung von Schneelasten verwendet werden.</p>
	<p>Lokal orientierte Linienlast <math>q</math>: Die Linienlast ist lokal orientiert, hier senkrecht zur Stablängsachse. Die Linienlast bezieht sich auf die gesamte Stablänge <math>l</math>. Dieser Typ von Linienlast kann zur Modellierung von Windlasten verwendet werden.</p>
	<p>Lokal orientierte Linienlast <math>q</math>: Die Linienlast ist lokal orientiert, hier parallel zur Stablängsachse. Die Linienlast bezieht sich auf die gesamte Stablänge <math>l</math>.</p>

Einführung von allgemein verwendeten Parametern und Formelzeichen:

$E$  Elastizitätsmodul

$G$  Schubmodul

$A$  Querschnittsfläche

$I$  Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment)

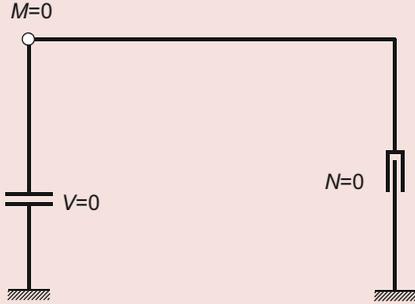
$\alpha$  Temperatureausdehnungskoeffizient

$h$  Querschnittshöhe

$k$  Federsteifigkeit

## ■ 1.3 Definition der Gelenkarten

Einführung von allgemein verwendeten Gelenktypen:

Symbol	Beschreibung	Beispiel
$M=0$ 	Momentengelenk: Das Moment ist an diesem Punkt gleich Null $M = 0$ . Normalkräfte und Querkräfte können übertragen werden.	
$V=0$ 	Querkraftgelenk: Die Querkraft ist gleich an diesem Punkt Null $V = 0$ . Normalkräfte und Momente können übertragen werden.	
$N=0$ 	Normalkraftgelenk: Die Normalkraft ist an diesem Punkt gleich Null $N = 0$ . Querkräfte und Momente können übertragen werden.	

## ■ 1.4 Allgemeine Hinweise

In den folgenden Aufgaben wird die Balkentheorie nach Euler-Bernoulli verwendet. Hierbei gelten die bekannten Annahmen:

- Ebenbleiben des Querschnitts,
- Schubverzerrungen können vernachlässigt werden.

Hieraus ergeben sich die zwei wesentlichen Steifigkeiten zur Definition eines Querschnittes aus statischer Sicht:

- Axiale Steifigkeit  $EA$  als Produkt aus Elastizitätsmodul  $E$  und Querschnittsfläche  $A$
- Biegesteifigkeit  $EI$  als Produkt aus Elastizitätsmodul  $E$  und Flächenmoment 2. Grades  $I$  um die lokale  $y$ -Achse

Aus baustatischer Sicht kann oft für Querschnitte mit entsprechenden Steifigkeiten die Annahme getroffen werden, dass eine unendlich große Steifigkeit vorliegt ( $EA$  und/oder  $EI \rightarrow \infty$ ). Diese Annahme erleichtert im Allgemeinen die Handrechnung. Für die Modellierung eines Tragwerks mithilfe eines Computerprogramms muss für jede Steifigkeit eine endliche Größe angegeben werden. Bei der Definition der Steifigkeiten ist hierbei zu beachten, dass die unendliche Steifigkeit mittels einer ausreichend großen Zahl, d.h. mehrere Zehnerpotenzen größer als die größte vorkommende Steifigkeit, berücksichtigt wird. Hierbei sollten jedoch die Grenzen numerischer Berechenbarkeit unbedingt beachtet werden.



# 2

## Tragwerksbeurteilung

Videos zu diesem Kapitel finden Sie unter



### ■ 2.1 Grundlagen zur Tragwerksbeurteilung

Zur Beurteilung der Lagerung und des inneren Aufbaus eines Tragwerks ist der Grad der statischen Unbestimmtheit eine wichtige Aussage. Er ist u. a. auch ein Maß für die Redundanz des Tragwerks gegenüber Versagen. Bei Anwendung der Auf- und Abbaukriterien kann gleichzeitig auch die Brauchbarkeit eines Systems beurteilt werden. Abzählformeln vergleichen dagegen nur die Zahl der statisch unbekanntes Größen und die verfügbaren Bestimmungsgleichungen. Eine in allen Fällen zweifelsfreie Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit ist damit nicht möglich. Von der Verwendung von Abzählformeln wird daher abgeraten.

Beim Vorgehen nach dem Abbaukriterium wird das Tragwerk kontrolliert durch gedachte Schnitte in ein brauchbares, statisch bestimmtes System überführt. Die Zahl der dabei freigeschnittenen inneren Größen entspricht dem Grad der statischen Unbestimmtheit.

Bei der Anwendung des Abbaukriteriums greift man auf die drei in Tabelle 2.1 dargestellten statisch bestimmten und brauchbaren Grundtragwerke zurück.

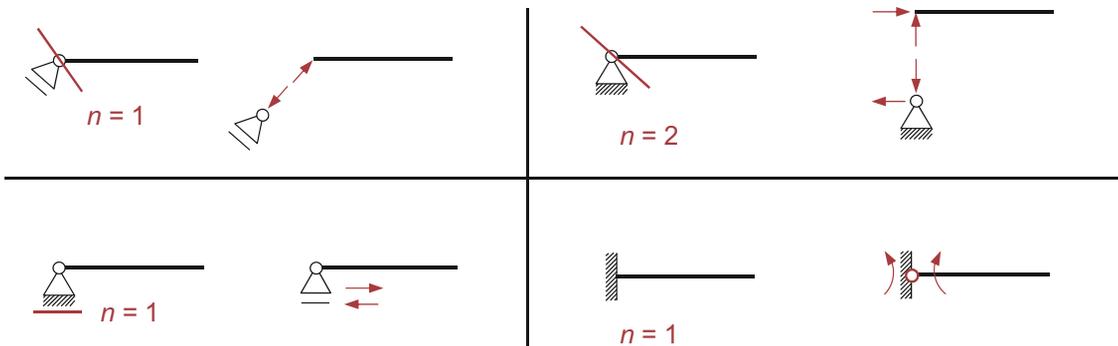
**Tabelle 2.1** Statisch bestimmte und brauchbare Grundtragwerke

	Grundtragwerk	Erweitertes Grundtragwerk	Unbrauchbarer Sonderfall
Kragträger			ungelagert 
Balken mit 3 Lagerkräften			Wirkungslinien der Lagerkräfte treffen sich in einem Punkt 
Dreigelenktragwerk (3-GTW)			Gelenke liegen auf einer Linie 

Der Nachweis der Brauchbarkeit ist automatisch erbracht, wenn

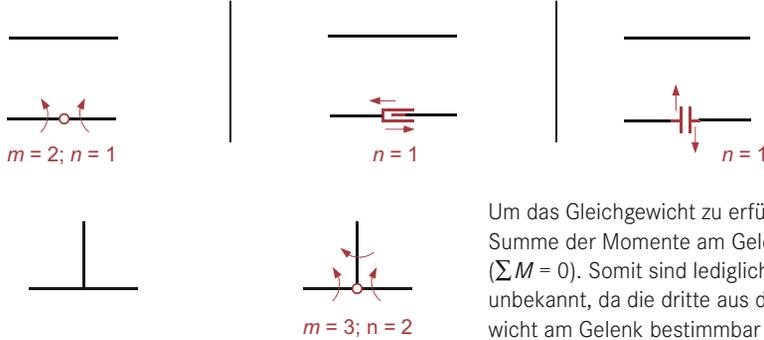
- das Tragwerk in ein statisch bestimmtes System überführt werden kann, welches aus Kombinationen der Grundtragwerke besteht und
- die kinematischen Ausnahmefälle vermieden werden (vgl. auch Kapitel 4 – Polplan, Kinematik).

Für die Überführung in ein statisch bestimmtes System sind Teil- oder Vollschnitte erforderlich. Die Anzahl der ausgelösten Lager- bzw. Schnittkräfte, d.h. der statischen Unbekannten oder Überzähligen (vgl. Kapitel 7 – Kraftgrößenverfahren), bestimmt den Grad  $n$  der statischen Unbestimmtheit.



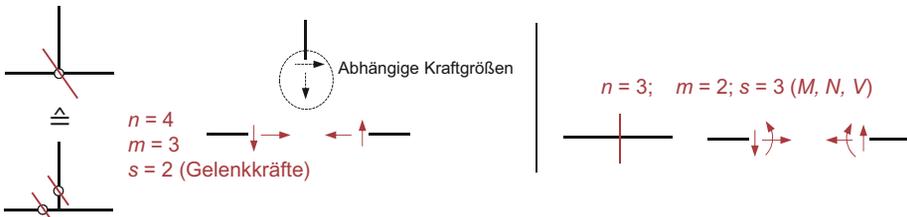
Auslösen von Lagerkräften

Verbindet ein zusätzlich eingeführtes Gelenk  $m$  Stäbe, so werden  $n = m - 1$  unbekannte Kraftgrößen ausgelöst.



Um das Gleichgewicht zu erfüllen, muss die Summe der Momente am Gelenk 0 ergeben ( $\sum M = 0$ ). Somit sind lediglich 2 Kraftgrößen unbekannt, da die dritte aus dem Gleichgewicht am Gelenk bestimmbar ist.

Auslösen von Schnittgrößen durch Einführen von Gelenken



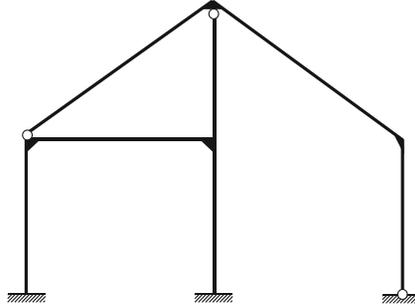
Entfernen von Gelenken

Vollschnitt eines Stabes

Entstehen am Vollschnitt  $m$  Schnittufer, so werden  $n = (m - 1) \cdot s$  unbekannte Kraftgrößen ausgelöst. Dabei ist  $s$  die Zahl der ursprünglich übertragbaren Schnittgrößen.

## ■ 2.2 Beispielaufgabe 1

Machen Sie das nachstehende Tragwerk auf drei unterschiedliche Arten statisch bestimmt.

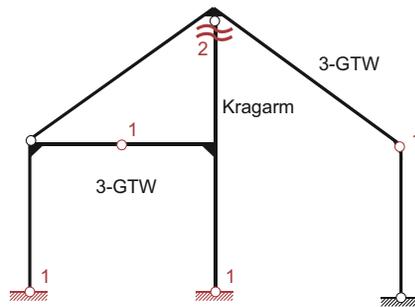


Das gegebene Tragwerk wird in statisch bestimmte Grundsysteme (Kragträger, Balken mit 3 Lagerkräften, 3-Gelenk-Tragwerk) zerlegt. Die Anzahl der dabei freigeschnittenen Schnittgrößen entspricht dem Grad der statischen Unbestimmtheit  $n$ .

Für das gegebene Tragwerk gilt:  $n = 6$ .

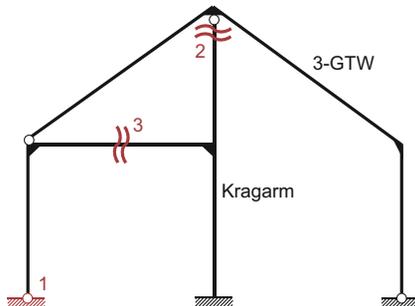
Im Folgenden werden mehrere Lösungsmöglichkeiten aufgezeigt, doch sind auch andere Lösungen möglich:

*Anmerkung: Die Zahlen geben die Anzahl der jeweils freigeschnittenen Schnittgrößen an.*



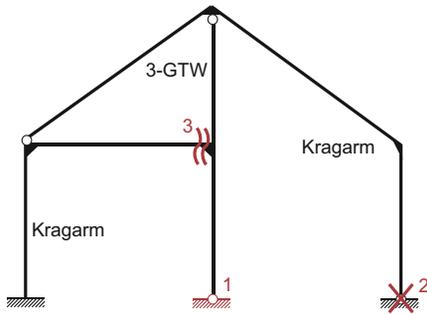
### Variante 1:

Das Tragwerk besteht aus einem 3-Gelenk-Tragwerk (links), an das ein senkrechter Kragarm anschließt. An dieses System wird ein weiteres 3-Gelenk-Tragwerk angehängt. Da der Kragarm direkt am oberen Gelenk durchgeschnitten wird, werden hier nur 2 Schnittgrößen frei (im Gelenk gilt  $M = 0$ ).

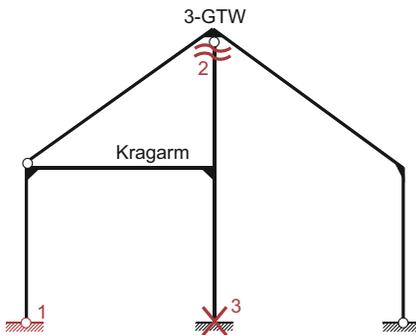


### Variante 2:

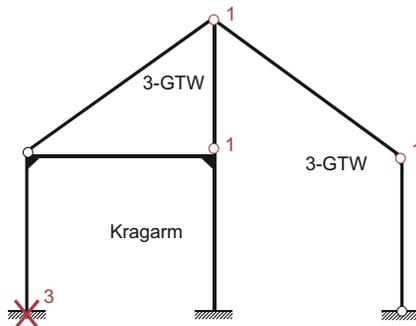
Bei dieser Möglichkeit wird das Tragwerk in zwei separate Systeme (einem Kragarm und ein 3-Gelenk-Tragwerk) aufgeteilt. Beim Schnitt direkt am Gelenk werden 2 Schnittgrößen freigeschnitten (vgl. Variante 1).

**Variante 3:**

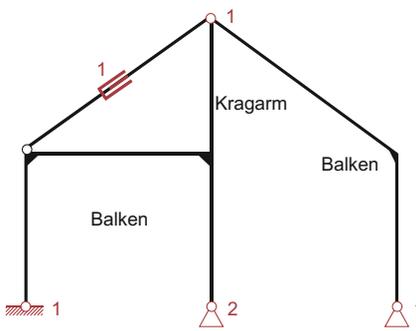
Dieses System wird aus einem Kragarm (links, mit biegesteifer Ecke) aufgebaut, an den ein 3-Gelenk-Tragwerk anschließt. An dieses wird ein weiterer Kragarm (rechts) angehängt.

**Variante 4:**

In diesem System bilden die äußeren Stäbe ein 3-Gelenk-Tragwerk. An dieses ist auf der linken Seite ein horizontaler Kragarm angeschlossen, an welches wiederum zwei senkrechte Stäbe als Kragarme angeschlossen sind.

**Variante 5:**

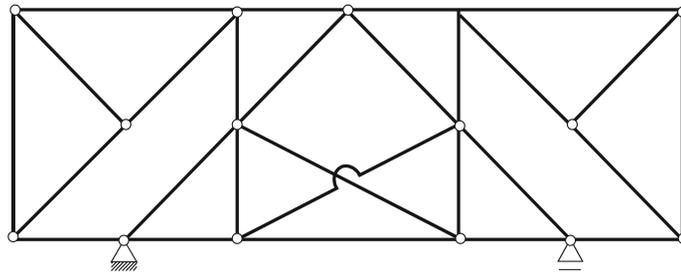
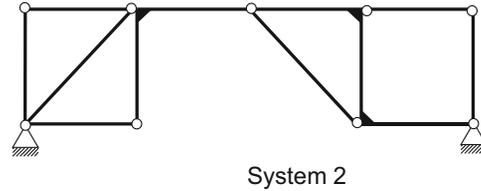
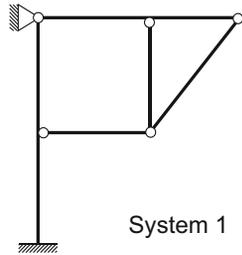
Hier besteht das Tragwerk aus einem Kragarm (mit zwei biegesteifen Ecken), an welchen zwei 3-Gelenk-Tragwerke angeschlossen werden.

**Variante 6:**

Das Tragwerk besteht aus einem Balken mit 3 Lagerkräften (links, mit 2 biegesteifen Ecken), an den ein Kragarm angeschlossen ist. An diesen wird ein weiterer Balken mit 3 Lagerkräften angeschlossen. Übrig ist jetzt nur noch der schräge Stab oben links, in den ein Normalkraftgelenk eingefügt wird, um das System statisch bestimmt zu machen (ohne das Normalkraftgelenk wäre dieser Stab ein Balken mit unverschieblichen Auflagern links und rechts, d. h. er wäre einfach statisch unbestimmt).

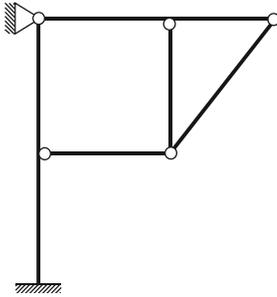
## ■ 2.3 Beispielaufgabe 2

Es ist zu untersuchen, ob die Brauchbarkeit der 4 Systeme gegeben ist, wobei der Grad der statischen Unbestimmtheit  $n$  zu ermitteln ist.

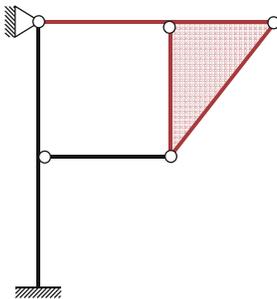


Die grundlegende Vorgehensweise besteht darin, die gegebenen Tragwerke in statisch bestimmte Grundsysteme (Kragträger, Balken mit 3 Lagerkräften, 3-Gelenk-Tragwerk) zu zerlegen. Um die Zerlegung zu vereinfachen, ist es sinnvoll, zuvor eventuell vorhandene (statisch bestimmte!) Scheiben zu markieren. Für die Definition einer Scheibe sei an dieser Stelle auf Kapitel 4 - Polplan, Kinematik verwiesen.

### 2.3.1 System 1

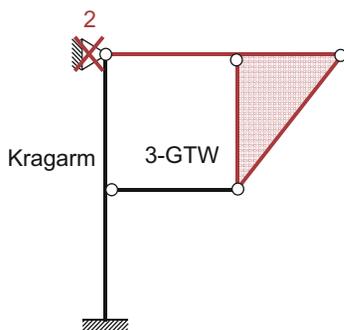


#### Scheiben markieren



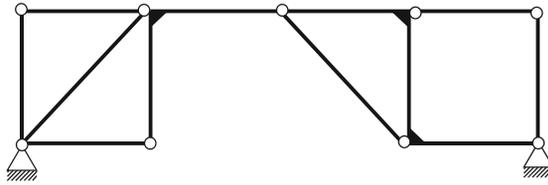
Das Tragwerk enthält eine statisch bestimmte Scheibe (3 Gelenke mit 3 Stäben verbunden).

#### Tragwerk zerlegen

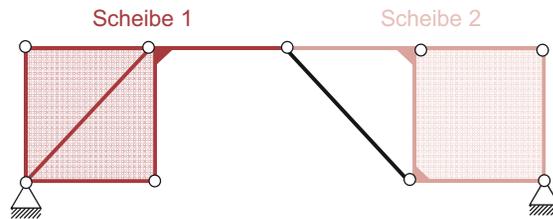


Das System besteht aus einem Kragarm, an den ein 3-Gelenk-Tragwerk, bestehend aus einem Stab und einer Scheibe, angehängt wird. Das System ist 2-fach statisch unbestimmt,  $n = 2$ , und somit brauchbar.

## 2.3.2 System 2

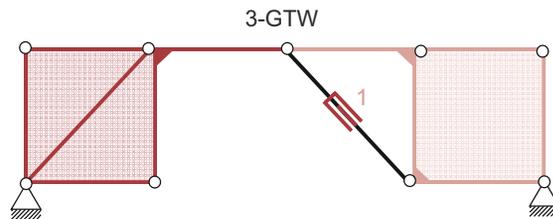


## Scheiben markieren



Die Scheibe 1 besteht aus einem statisch bestimmten Dreieck (3 Gelenke, 3 Stäbe), an das ein weiterer Knoten mit zwei Stäben statisch bestimmt und brauchbar (entspricht dem 3-Gelenk-Tragwerk) angeschlossen wird. Scheibe 2 besteht aus drei Gelenken und drei Stäben, wobei ein Stab zwei biegesteife Ecken besitzt.

## Tragwerk zerlegen



Die beiden Scheiben bilden zusammen ein 3-Gelenk-Tragwerk. In den verbleibenden Stab wird ein Normalkraftgelenk eingefügt, um das System in ein statisch bestimmtes Tragwerk zu überführen (vgl. Aufgabe 1, Variante 6).

$n = 1$ , brauchbar