

Tom M. Apostol

CALCULUS II

Cálculo con funciones de varias variables y Álgebra Lineal,
con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

**CALCULUS, Multi – Variable Calculus and Linear Algebra,
With applications to Differential Equations and Probability**

Edición original en lengua inglesa publicada por

Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.

Copyright © by Blaisdell Publishing Company

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1984

ISBN: 978-84-291-5003-2 Tomo 2

ISBN: 978-84-291-5001-8 Obra completa

Edición e-book (PDF)

© Editorial Reverté, S. A., 2019

ISBN: 978-84-291-9482-1 Tomo 2

Versión española por:

Dr. D. Francisco Vélez Cantarell

Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias de Barcelona

Revisada por:

Dr. D. Enrique Linés Escardó

Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

a

Jane y Stephen

PRÓLOGO

Este libro es una continuación de mi Calculus, volumen I, segunda edición. El presente volumen fue escrito con el mismo plan fundamental que inspiró al primero. Un adecuado enfoque hacia la técnica se combina con un riguroso desarrollo teórico. Se ha procurado hacer llegar al estudiante el espíritu de la matemática moderna sin exagerar el formalismo. Como en el volumen I, se han incluido comentarios de tipo histórico para hacer vivir al lector la evolución de las ideas.

El segundo volumen está dividido en tres partes, tituladas. Análisis lineal, Análisis no lineal, y Temas especiales. Los dos últimos capítulos del volumen I han sido repetidos y son los dos primeros capítulos del volumen II, de modo que toda la materia relativa al álgebra lineal está completa en cada volumen.

La parte 1 contiene una introducción al álgebra lineal, incluyendo transformaciones lineales, matrices, determinantes, autovalores y formas cuadráticas. Se dan aplicaciones al análisis, en particular al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales. Se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales con la ayuda del cálculo matricial. Se demuestran los teoremas de existencia y unicidad por medio del método de Picard de aproximaciones sucesivas, que también se trata utilizando los operadores de contracción.

En la parte 2 se discute el cálculo de funciones de varias variables. El cálculo diferencial se unifica y simplifica con la ayuda del álgebra lineal. Se incluyen reglas de la cadena para campos escalares y vectoriales, y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y a problemas de extremos. En cálculo integral se incluyen integrales de línea, integrales múltiples y de superficie, con aplicaciones al análisis vectorial. En esto la exposición sigue más o menos la línea clásica y no incluye un desarrollo formal de las formas diferenciales.

Los temas especiales tratados en la parte 3 son Probabilidades y Análisis numérico. El de probabilidades está dividido en dos capítulos, uno que trata de los espacios muestrales finitos o infinitos numerables; el otro de espacios muestrales no numerables, variables aleatorias, y funciones de distribución. Las aplicaciones se ilustran en el estudio de variables aleatorias uni- y bi-dimensionales.

El último capítulo contiene una introducción al análisis numérico, poniendo especial atención en los distintos tipos de polinomios de aproximación. Termina el libro con un estudio de las fórmulas de integración aproximada, tales como la regla de Simpson y una discusión de la fórmula de sumación de Euler.

En este volumen hay materia suficiente para un curso anual completo con tres o cuatro sesiones semanales. Presupone un conocimiento del cálculo con una variable como se desarrolla en la mayoría de los cursos del primer año de cálculo. El autor ha imaginado el curso con cuatro sesiones semanales, dos de exposición por parte del profesor y dos para preguntar a los alumnos, empleando aproximadamente diez semanas en cada parte y omitiendo las secciones señaladas con asterisco.

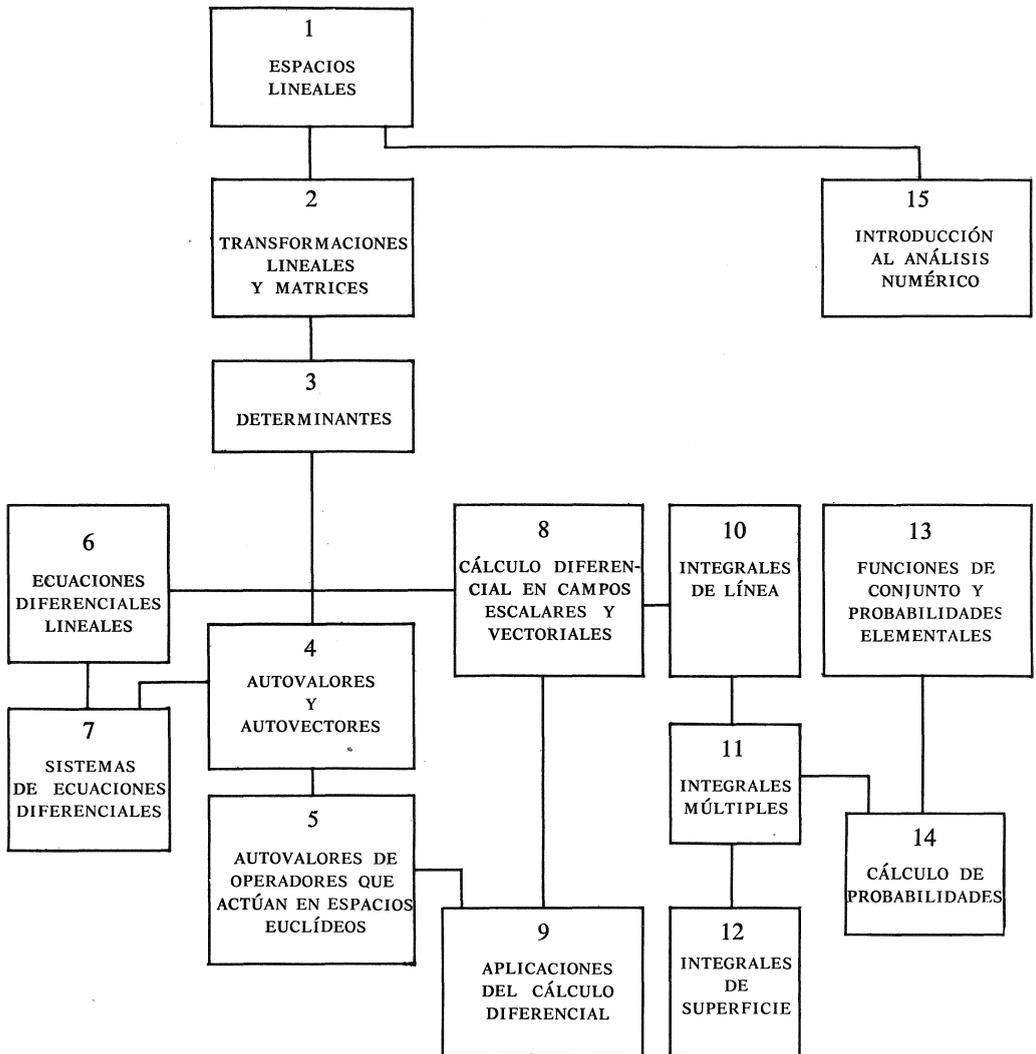
Este segundo volumen ha sido planeado de modo que muchos capítulos pueden omitirse en cursos abreviados. Por ejemplo, el último capítulo de cada parte puede suprimirse sin romper la continuidad de la exposición. La parte primera proporciona material para un curso combinado de álgebra lineal y de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cada profesor puede elegir los temas adecuados a sus necesidades y preferencias consultando el diagrama de la página siguiente que muestra la interdependencia lógica de los capítulos.

Una vez más reconozco con agrado el asesoramiento de numerosos amigos y colegas. Al preparar la segunda edición recibí valiosa ayuda de los profesores Herbert S. Zuckerman de la Universidad de Washington, y Basil Gordon de la Universidad de California, Los Ángeles, cada uno de los cuales sugirió varias mejoras. Agradezco también al personal de la Blaisdell Publishing Company su cooperación y ayuda.

Como en otras ocasiones me da especial satisfacción expresar mi gratitud a mi esposa por su valiosa y variada contribución. En reconocimiento le dedico gustosamente este libro.

T. M. A.

Pasadena, California



ÍNDICE ANALÍTICO

Parte 1. Análisis lineal

1. ESPACIOS LINEALES

1.1	Introducción	3
1.2	Definición de espacio lineal	3
1.3	Ejemplos de espacios lineales	5
1.4	Consecuencias elementales de los axiomas	7
1.5	Ejercicios	8
1.6	Subespacios de un espacio lineal	9
1.7	Conjuntos dependientes e independientes en un espacio lineal	11
1.8	Bases y dimensión	14
1.9	Componentes	15
1.10	Ejercicios	16
1.11	Productos interiores, espacios euclídeos. Normas	17
1.12	Ortogonalidad en un espacio euclídeo	21
1.13	Ejercicios	24
1.14	Construcción de conjuntos ortogonales. Método de Gram-Schmidt	26
1.15	Complementos ortogonales. Proyecciones	31
1.16	Aproximación óptima de elementos de un espacio euclídeo por elementos de un subespacio de dimensión finita	34
1.17	Ejercicios	36

2. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

2.1	Transformaciones lineales	39
2.2	Núcleo y recorrido	41
2.3	Dimensión del núcleo y rango de la transformación	42

2.4	Ejercicios	44
2.5	Operaciones algebraicas con transformaciones lineales	46
2.6	Inversas	48
2.7	Transformaciones lineales uno a uno	51
2.8	Ejercicios	53
2.9	Transformaciones lineales con valores asignados	55
2.10	Representación matricial de las transformaciones lineales	56
2.11	Construcción de una representación matricial en forma diagonal	60
2.12	Ejercicios	62
2.13	Espacios lineales de matrices	63
2.14	Isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices	65
2.15	Multiplicación de matrices	66
2.16	Ejercicios	70
2.17	Sistemas de ecuaciones lineales	72
2.18	Técnicas de cálculo	75
2.19	Inversas de matrices cuadradas	80
2.20	Ejercicios	83
2.21	Ejercicios varios sobre matrices	84

3. DETERMINANTES

3.1	Introducción	87
3.2	Justificación de la elección de los axiomas para una función determinante	88
3.3	Conjunto de axiomas que definen una función determinante	90
3.4	Cálculo de determinantes	93
3.5	El teorema de unicidad	96
3.6	Ejercicios	97
3.7	Producto de determinantes	99
3.8	Determinante de la matriz inversa de una matriz no singular	101
3.9	Determinantes e independencia de vectores	102
3.10	Determinante de una matriz diagonal en bloques	102
3.11	Ejercicios	104
3.12	Fórmulas para desarrollar determinantes. Menores y cofactores	105
3.13	Existencia de la función determinante	110
3.14	Determinante de una matriz transpuesta	112
3.15	La matriz cofactor	113
3.16	Regla de Cramer	115
3.17	Ejercicios	116

4. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

4.1	Transformaciones lineales representadas mediante matrices diagonales	119
4.2	Autovectores y autovalores de una transformación lineal	120
4.3	Independencia lineal de autovectores correspondientes a autovalores distintos	123
4.4	Ejercicios	125
4.5	Caso de dimensión finita. Polinomios característicos	126
4.6	Cálculo de autovalores y autovectores en el caso de dimensión finita	128
4.7	Traza de una matriz	131
4.8	Ejercicios	132
4.9	Matrices que representan la misma transformación lineal. Matrices lineales	134
4.10	Ejercicios	139

5. AUTOVALORES DE OPERADORES EN ESPACIOS EUCLÍDEOS

5.1	Autovalores y productos interiores o escalares	141
5.2	Transformaciones hermitianas y hemi-hermitianas	142
5.3	Autovalores y autovectores de los operadores hermitianos y hemi-hermitianos	145
5.4	Ortogonalidad de los autovectores correspondientes a autovalores distintos	145
5.5	Ejercicios	146
5.6	Existencia de un conjunto ortonormal de autovectores para operadores hermitianos y hemi-hermitianos que actúan en espacios de dimensión finita	148
5.7	Representación matricial para operadores hermitianos y hemi-hermitianos	149
5.8	Matrices hermitianas y hemi-hermitianas. Matriz adjunta de una matriz	150
5.9	Diagonalización de una matriz hermitiana o hemi-hermitiana	151
5.10	Matrices unitarias. Matrices ortogonales	152
5.11	Ejercicios	154
5.12	Formas cuadráticas	156
5.13	Reducción de una forma cuadrática real a forma diagonal	159
5.14	Aplicaciones a la Geometría Analítica	161
5.15	Ejercicios	166

* 5.16	Autovalores de una transformación simétrica obtenidos como valores de su forma cuadrática	166
* 5.17	Propiedades relativas a extremos de los autovalores de una transformación simétrica	168
* 5.18	Caso de dimensión finita	170
5.19	Transformaciones unitarias	170
5.20	Ejercicios	174

6. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

6.1	Introducción histórica	175
6.2	Revisión de los resultados relativos a las ecuaciones de primer y segundo orden	176
6.3	Ejercicios	178
6.4	Ecuaciones diferenciales lineales de orden n	179
6.5	Teorema de existencia y unicidad	181
6.6	Dimensión del espacio solución de una ecuación lineal homogénea	181
6.7	Álgebra de operadores de coeficientes constantes	182
6.8	Determinación de una base de soluciones para ecuaciones lineales con coeficientes constantes por factorización de operadores	185
6.9	Ejercicios	190
6.10	Relación entre las ecuaciones homogéneas y no homogéneas	192
6.11	Determinación de una solución particular de la ecuación no homogénea. Método de variación de constantes	193
6.12	No singularidad de la matriz wronskiana de n soluciones independientes de una ecuación lineal homogénea	198
6.13	Métodos especiales para determinar una solución particular de la ecuación no homogénea. Reducción a un sistema de ecuaciones lineales de primer orden	200
6.14	Método del anulador para determinar una solución particular de la ecuación no homogénea	201
6.15	Ejercicios	204
6.16	Ejercicios varios sobre ecuaciones diferenciales lineales	206
6.17	Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes analíticos	207
6.18	La ecuación de Legendre	211
6.19	Polinomios de Legendre	215
6.20	Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre	217
6.21	Ejercicios	218

6.22	Método de Frobenius	222
6.23	Ecuación de Bessel	224
6.24	Ejercicios	231

7. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

7.1	Introducción	235
7.2	Cálculo con funciones matriciales	238
7.3	Series de matrices. Normas de matrices	239
7.4	Ejercicios	241
7.5	Exponencial de una matriz	242
7.6	Ecuación diferencial que se satisface por e^{tA}	243
7.7	Teorema de unicidad para la ecuación diferencial matricial $F'(t) = AF(t)$	244
7.8	Ley de exponentes para exponenciales de matrices	245
7.9	Teoremas de existencia y unicidad para sistemas lineales ho- mogéneos con coeficientes constantes	246
7.10	El problema de calcular e^{tA}	247
7.11	Teorema de Cayley-Hamilton	249
7.12	Ejercicios	251
7.13	Método de Putzer para calcular e^{tA}	253
7.14	Otros métodos para calcular e^{tA} en casos especiales	256
7.15	Ejercicios	260
7.16	Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes	261
7.17	Ejercicios	264
7.18	Sistema lineal general $Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t)$	266
7.19	Resolución de sistemas lineales homogéneos mediante series de potencias	271
7.20	Ejercicios	272
7.21	Demostración del teorema de existencia por el método de las aproximaciones sucesivas	273
7.22	Aplicación del método de aproximaciones sucesivas a los sis- temas no lineales de primer orden	279
7.23	Demostración de un teorema de existencia y unicidad para sis- temas no lineales de primer orden	281
7.24	Ejercicios	283
* 7.25	Aproximaciones sucesivas y puntos fijos de operadores	285
* 7.26	Espacios lineales normados	286
* 7.27	Operadores de contracción	287

* 7.28	Teorema del punto fijo para operadores de contracción	289
* 7.29	Aplicaciones del teorema del punto fijo	291

Parte 2. Análisis no lineal

8. CÁLCULO DIFERENCIAL EN CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

8.1	Funciones de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^m . Campos escalares y vectoriales	297
8.2	Bolas abiertas y conjuntos abiertos	298
8.3	Ejercicios	300
8.4	Límites y continuidad	302
8.5	Ejercicios	306
8.6	La derivada de un campo escalar respecto a un vector	308
8.7	Derivadas direccionales y derivadas parciales	310
8.8	Derivadas parciales de orden superior	311
8.9	Ejercicios	312
8.10	Derivadas direccionales y continuidad	313
8.11	La diferencial	314
8.12	Gradiente de un campo escalar	316
8.13	Condición suficiente de diferenciabilidad	318
8.14	Ejercicios	320
8.15	Regla de la cadena para derivadas de campos escalares	321
8.16	Aplicaciones geométricas. Conjuntos de nivel. Planos tangentes	324
8.17	Ejercicios	327
8.18	Diferenciales de campos vectoriales	328
8.19	La diferenciabilidad implica la continuidad	330
8.20	La regla de la cadena para diferenciales de campos vectoriales	331
8.21	Forma matricial de la regla de la cadena	332
8.22	Ejercicios	336
* 8.23	Condiciones suficientes para la igualdad de las derivadas parciales mixtas	337
8.24	Ejercicios varios	342

9. APLICACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

9.1	Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	345
9.2	Ecuación en derivadas parciales de primer orden con coeficientes constantes	346
9.3	Ejercicios	349
9.4	La ecuación de ondas uni-dimensional	351
9.5	Ejercicios	356
9.6	Derivación de funciones definidas implícitamente	359
9.7	Ejemplos resueltos	363
9.8	Ejercicios	368
9.9	Máximos, mínimos y puntos de ensilladura	369
9.10	Fórmula de Taylor de segundo orden para campos escalares	375
9.11	Determinación de la naturaleza de un punto estacionario por medio de los autovalores de la matriz hessiana	378
9.12	Criterio de las derivadas segundas para determinar extremos de funciones de dos variables	380
9.13	Ejercicios	381
9.14	Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange	383
9.15	Ejercicios	387
9.16	Teorema del valor extremo para campos escalares continuos	388
9.17	Teorema de la continuidad uniforme para campos escalares continuos	391

10. INTEGRALES DE LÍNEA

10.1	Introducción	393
10.2	Caminos e integrales de línea	393
10.3	Otras notaciones para las integrales de línea	394
10.4	Propiedades fundamentales de las integrales de línea	396
10.5	Ejercicios	399
10.6	El concepto de trabajo como integral de línea	399
10.7	Integrales de línea con respecto a la longitud de arco	401
10.8	Otras aplicaciones de las integrales de línea	402
10.9	Ejercicios	403
10.10	Conjuntos conexos abiertos. Independientes del camino	405
10.11	Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea	406
10.12	Aplicaciones a la Mecánica	408
10.13	Ejercicios	409

10.14	El primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea	411
10.15	Condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea un gradiente	413
10.16	Condiciones necesarias para que un campo vectorial sea un gradiente	415
10.17	Métodos especiales para construir funciones potenciales	417
10.18	Ejercicios	420
10.19	Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden	422
10.20	Ejercicios	425
10.21	Funciones de potencial en conjuntos convexos	426

11. INTEGRALES MÚLTIPLES

11.1	Introducción	431
11.2	Particiones de rectángulos. Funciones escalonadas	432
11.3	Integral doble de una función escalonada	433
11.4	Definición de integral doble de una función definida y acotada en un rectángulo	436
11.5	Integrales dobles superior e inferior	436
11.6	Cálculo de una integral doble por integración uni-dimensional reiterada	438
11.7	Interpretación geométrica de la integral doble como un volumen	439
11.8	Ejemplos resueltos	440
11.9	Ejercicios	442
11.10	Integrabilidad de funciones continuas	443
11.11	Integrabilidad de funciones acotadas con discontinuidades	445
11.12	Integrales dobles extendidas a regiones más generales	446
11.13	Aplicaciones a áreas y volúmenes	450
11.14	Ejemplos resueltos	451
11.15	Ejercicios	453
11.16	Otras aplicaciones de las integrales dobles	455
11.17	Dos teoremas de Pappus	459
11.18	Ejercicios	461
11.19	Teorema de Green en el plano	462
11.20	Algunas aplicaciones del teorema de Green	467
11.21	Condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial bi-dimensional sea un gradiente	468
11.22	Ejercicios	471

* 11.23	Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas	473
* 11.24	El número de giros	475
* 11.25	Ejercicios	478
11.26	Cambio de variables en una integral doble	479
11.27	Casos particulares de la fórmula de transformación	484
11.28	Ejercicios	488
11.29	Demostración de la fórmula de transformación en un caso particular	490
11.30	Demostración de la fórmula de transformación en el caso general	492
11.31	Extensiones a un número mayor de dimensiones	494
11.32	Cambio de variables en una integral n -múltiple	497
11.33	Ejemplos resueltos	500
11.34	Ejercicios	504

12. INTEGRALES DE SUPERFICIE

12.1	Representación paramétrica de una superficie	509
12.2	Producto vectorial fundamental	513
12.3	El producto vectorial fundamental, considerado como una normal a la superficie	516
12.4	Ejercicios	517
12.5	Área de una superficie paramétrica	518
12.6	Ejercicios	524
12.7	Integrales de superficie	525
12.8	Cambio de representación paramétrica	527
12.9	Otras notaciones para las integrales de superficie	530
12.10	Ejercicios	532
12.11	Teorema de Stokes	534
12.12	El rotacional y la divergencia de un campo vectorial	537
12.13	Ejercicios	539
12.14	Otras propiedades del rotacional y de la divergencia	540
12.15	Ejercicios	545
* 12.16	Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional	546
* 12.17	Ejercicios	551
12.18	Extensiones del teorema de Stokes	552
12.19	Teorema de la divergencia (teorema de Gauss)	557
12.20	Aplicaciones del teorema de la divergencia	561
12.21	Ejercicios	563

Parte 3. Temas especiales

13. FUNCIONES DE CONJUNTO Y PROBABILIDAD ELEMENTAL

13.1	Introducción histórica	571
13.2	Funciones de conjunto con aditividad finita	572
13.3	Medidas con aditividad finita	574
13.4	Ejercicios	575
13.5	Definición de probabilidad para espacios muestrales finitos	577
13.6	Terminología propia del cálculo de probabilidades	579
13.7	Ejercicios	581
13.8	Ejemplos resueltos	581
13.9	Ejercicios	584
13.10	Algunos principios básicos de análisis combinatorio	586
13.11	Ejercicios	591
13.12	Probabilidades condicionadas	592
13.13	Independencia	595
13.14	Ejercicios	597
13.15	Experimentos o pruebas compuestas	598
13.16	Pruebas de Bernoulli	603
13.17	Número más probable de éxitos en n pruebas de Bernoulli	605
13.18	Ejercicios	608
13.19	Conjuntos numerables y no numerables	610
13.20	Ejercicios	614
13.21	Definición de probabilidad para espacios muestrales infinitos numerables	615
13.22	Ejercicios	617
13.23	Ejercicios variados sobre probabilidades	618

14. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

14.1	Definición de probabilidad para espacios muestrales no numerables	621
14.2	Numerabilidad del conjunto de puntos con probabilidad positiva	622
14.3	VARIABLES ALEATORIAS	623
14.4	Ejercicios	625

14.5	Funciones de distribución	626
14.6	Discontinuidad de las funciones de distribución	630
14.7	Distribuciones discretas. Funciones de masa de probabilidad	634
14.8	Ejercicios	637
14.9	Distribuciones continuas. Funciones de densidad	639
14.10	Distribución uniforme sobre un intervalo	641
14.11	Distribución de Cauchy	646
14.12	Ejercicios	647
14.13	Distribuciones exponenciales	649
14.14	Distribuciones normales	652
14.15	Observaciones sobre distribuciones más generales	656
14.16	Ejercicios	657
14.17	Distribuciones de funciones de variables aleatorias	658
14.18	Ejercicios	660
14.19	Distribución de variables aleatorias bidimensionales	660
14.20	Distribuciones discretas bidimensionales	663
14.21	Distribuciones continuas bidimensionales. Funciones de densidad	664
14.22	Ejercicios	666
14.23	Distribuciones de funciones de dos variables aleatorias	668
14.24	Ejercicios	673
14.25	Esperanza y varianza	676
14.26	Esperanza de una función de una variable aleatoria	680
14.27	Ejercicios	681
14.28	Desigualdad de Chebyshev	683
14.29	Leyes de los grandes números	685
14.30	El teorema central del límite	689
14.31	Ejercicios	691
	Referencias citadas	692

15. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO

15.1	Introducción histórica	695
15.2	Aproximaciones por polinomios	697
15.3	Aproximaciones polinómicas y espacios lineales normados	698
15.4	Problemas fundamentales en la aproximación por polinomios	700
15.5	Ejercicios	703
15.6	Polinomios de interpolación	705
15.7	Puntos de interpolación igualmente separados	708
15.8	Análisis del error de la interpolación por polinomios	709

15.9	Ejercicios	713
15.10	Fórmula de interpolación de Newton	716
15.11	Puntos de interpolación igualmente separados. El operador de las diferencias sucesivas	718
15.12	Polinomios factoriales	720
15.13	Ejercicios	721
15.14	Problema de mínimo relativo a la norma del máximo	724
15.15	Polinomios de Chebyshev	725
15.16	Propiedad de mínimo de los polinomios de Chebyshev	728
15.17	Aplicación a la fórmula del error en la interpolación	730
15.18	Ejercicios	730
15.19	Integración aproximada. Regla de los trapecios	733
15.20	Regla de Simpson	736
15.21	Ejercicios	742
15.22	Fórmula de sumación de Euler	745
15.23	Ejercicios	752
	Referencias citadas	755
	Soluciones a los ejercicios	757
	Índice	805

PARTE 1
Análisis lineal

1

ESPACIOS LINEALES

1.1 Introducción

A lo largo de la Matemática se encuentran muchos ejemplos de objetos matemáticos que pueden sumarse unos con otros y multiplicarse por números reales. Ante todo, los números reales son objetos de tal naturaleza. Otros ejemplos son las funciones vectoriales, los números complejos, las series y los vectores en el espacio *n-dimensional*. En este capítulo tratamos un concepto matemático general, llamado *espacio lineal*, que incluye todos esos ejemplos y muchos otros como casos particulares.

Brevemente, un espacio lineal es un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera sobre el que pueden realizarse ciertas operaciones llamadas *adición* y *multiplicación por números*. Al definir un espacio lineal no especificamos la naturaleza de los elementos ni decimos cómo se realizan las operaciones entre ellos. En cambio, exigimos que las operaciones tengan ciertas propiedades que tomamos como axiomas de un espacio lineal. Vamos ahora a hacer con detalle una descripción de esos axiomas.

1.2 Definición de espacio lineal

Sea V un conjunto no vacío de objetos, llamados *elementos*. El conjunto V se llama espacio lineal si satisface los diez axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

Axiomas de clausura

AXIOMA 1. CLAUSURA RESPECTO DE LA ADICIÓN. *A todo par de elementos x e y de V corresponde un elemento único de V llamado suma de x e y , designado por $x + y$.*

AXIOMA 2. CLAUSURA RESPECTO DE LA MULTIPLICACIÓN POR NÚMEROS REALES. *A todo x de V y todo número real a corresponde un elemento de V llamado producto de a por x , designado por ax .*

Axiomas para la adición

AXIOMA 3. LEY CONMUTATIVA. *Para todo x y todo y de V , tenemos $x + y = y + x$.*

AXIOMA 4. LEY ASOCIATIVA. *Cualesquiera que sean x, y, z de V , tenemos $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

AXIOMA 5. EXISTENCIA DE ELEMENTO CERO. *Existe un elemento en V , designado con el símbolo O , tal que*

$$x + O = x \quad \text{para todo } x \text{ de } V.$$

AXIOMA 6. EXISTENCIA DE OPUESTOS. *Para todo x de V , el elemento $(-1)x$ tiene la propiedad*

$$x + (-1)x = O.$$

Axiomas para la multiplicación por números

AXIOMA 7. LEY ASOCIATIVA. *Para todo x de V y todo par de números reales a y b , tenemos*

$$a(bx) = (ab)x.$$

AXIOMA 8. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICIÓN EN V . *Para todo x y todo y de V y todo número real a , tenemos*

$$a(x + y) = ax + ay.$$

AXIOMA 9. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICIÓN DE NÚMEROS. *Para todo x de V y todo par de números reales a y b , tenemos*

$$(a + b)x = ax + bx.$$

AXIOMA 10. EXISTENCIA DE ELEMENTO IDÉNTICO. *Para todo x de V , tenemos $1x = x$.*

Los espacios lineales así definidos, se llaman, a veces, espacios lineales *reales* para resaltar el hecho de que se multiplican los elementos de V por números reales. Si en los axiomas 2, 7, 8 y 9 se reemplaza *número real* por *número complejo*, la estructura que resulta se llama *espacio lineal complejo*. Algunas veces un espacio lineal se llama también *espacio vectorial lineal* o simplemente *espacio vectorial*; los números utilizados como multiplicadores se llaman *escalares*. Un espacio lineal real tiene números reales como escalares; un espacio lineal complejo tiene como escalares números complejos. Si bien consideraremos principalmente ejemplos de espacios lineales reales, todos los teoremas son válidos para espacios lineales complejos. Cuando digamos espacio lineal sin más, se sobrentenderá que el espacio puede ser real o complejo.

1.3 Ejemplos de espacios lineales

Si precisamos el conjunto V y decimos cómo se suman sus elementos y cómo se multiplican por números, obtenemos un ejemplo concreto de espacio lineal. El lector fácilmente puede comprobar que cada uno de los ejemplos siguientes satisface todos los axiomas para un espacio lineal real.

EJEMPLO 1. Sea $V = \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales, y sean $x + y$ y ax la adición y la multiplicación ordinarias de números reales.

EJEMPLO 2. Sea $V = \mathbf{C}$ el conjunto de todos los números complejos, definimos $x + y$ como la adición ordinaria de números complejos, y ax como la multiplicación del número complejo x por el número real a . Aunque los elementos de V sean números complejos, éste es un espacio lineal real porque los escalares son reales.

EJEMPLO 3. Sea $V = V_n$, el espacio vectorial de todas las n -plas de números reales, con la adición y la multiplicación por escalares definidas en la forma ordinaria en función de los componentes.

EJEMPLO 4. Sea V el conjunto de todos los vectores V_n ortogonales a un vector no nulo dado N . Si $n = 2$, este espacio lineal es una recta que pasa por O con N como vector normal. Si $n = 3$, es un plano que pasa por O con N como vector normal.

Los siguientes ejemplos se llaman *espacios funcionales*. Los elementos de V son funciones vectoriales, con la suma de dos funciones f y g definidas en la forma ordinaria:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo real x en la intersección de los dominios de f y g . La multiplicación de una función f por un escalar real a se define así: af es aquella función cuyo valor en cada x del dominio de f es $af(x)$. El elemento cero es la función cuyos valores son nulos para todo x . El lector puede comprobar fácilmente que cada uno de los conjuntos siguientes es un espacio funcional.

EJEMPLO 5. El conjunto de todas las funciones definidas en un intervalo dado.

EJEMPLO 6. El conjunto de todos los polinomios.

EJEMPLO 7. El conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$, siendo n fijo. (Siempre que consideremos este conjunto, se sobrentenderá que siempre está incluido el polinomio nulo.) El conjunto de todos los polinomios de grado *igual* a n no es un espacio lineal porque no se satisfacen los axiomas de clausura. Por ejemplo, la suma de dos polinomios de grado n puede no ser de grado n .

EJEMPLO 8. El conjunto de todas las funciones continuas en un intervalo dado. Si el intervalo es $[a, b]$, designamos este espacio con $C(a, b)$.

EJEMPLO 9. El conjunto de todas las funciones derivables en un punto dado.

EJEMPLO 10. El conjunto de todas las funciones integrables en un intervalo dado.

EJEMPLO 11. El conjunto de todas las funciones f definidas en el punto 1 siendo $f(1) = 0$. El número 0 es esencial en este ejemplo. Si reemplazamos 0 por un número no nulo c , violamos el axioma de clausura.

EJEMPLO 12. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + ay' + by = 0$, donde a y b son constantes dadas. También aquí es esencial el 0. El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial no homogénea no satisface los axiomas de clausura.

Estos ejemplos y muchos otros hacen patente cómo el concepto de espacio lineal está extendido por el Álgebra, la Geometría y el Análisis. Cuando se deduce un teorema de los axiomas de un espacio lineal, obtenemos un resultado válido para cada ejemplo concreto. Unificando varios ejemplos de este modo, conseguimos un conocimiento más profundo en cada uno. En ocasiones el conocimiento de un determinado ejemplo ayuda para anticipar o interpretar resultados válidos para otros ejemplos y pone en evidencia relaciones que de otro modo podrían pasar inadvertidas.

1.4 Consecuencias elementales de los axiomas

Los teoremas que siguen se deducen fácilmente de los axiomas de un espacio lineal.

TEOREMA 1.1. UNICIDAD DEL ELEMENTO CERO. *En cualquier espacio lineal existe un elemento cero y sólo uno.*

Demostración. El axioma 5 nos asegura que existe por lo menos un elemento cero. Supongamos que existan dos, sean O_1 y O_2 . Haciendo $x = O_1$ y $O = O_2$ en el axioma 5, obtenemos $O_1 + O_2 = O_1$. Análogamente, haciendo $x = O_2$ y $O = O_1$, encontramos $O_2 + O_1 = O_2$. Pero $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$ por la ley conmutativa, así que $O_1 = O_2$.

TEOREMA 1.2. UNICIDAD DE ELEMENTOS OPUESTOS. *En cualquier espacio lineal todo elemento tiene exactamente un opuesto. Esto es, para todo x existe un y , y sólo uno tal que $x + y = O$.*

Demostración. El axioma 6 nos dice que cada x tiene por lo menos un opuesto, a saber $(-1)x$. Supongamos que x tenga dos opuestos, sean y_1 e y_2 . Entonces $x + y_1 = O$ y $x + y_2 = O$. Sumando y_2 a los dos miembros de la primera igualdad y aplicando los axiomas 5, 4 y 3, obtenemos que

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2,$$

y

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$

Por consiguiente $y_1 = y_2$, con lo que x tiene exactamente un opuesto, el elemento $(-1)x$.

Notación. El opuesto de x se designa por $-x$. La diferencia $y - x$ se define como la suma $y + (-x)$.

El teorema siguiente muestra un conjunto de propiedades que rigen los cálculos algebraicos elementales en un espacio lineal.

TEOREMA 1.3. *En un espacio lineal, designemos con x e y dos elementos cualesquiera y con a y b dos escalares cualesquiera. Tenemos entonces las propiedades siguientes:*

- a) $0x = O$.
- b) $aO = O$.

- c) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$.
 d) Si $ax = 0$, entonces $a = 0$ o $x = 0$, o los dos.
 e) Si $ax = ay$ y $a \neq 0$ entonces $x = y$.
 f) Si $ax = bx$ y $x \neq 0$, entonces $a = b$.
 g) $-(x+y) = (-x) + (-y) = -x - y$.
 h) $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, y en general, $\sum_{i=1}^n x = nx$.

Demostremos a), b) y c) y dejamos como ejercicios las demostraciones de las otras propiedades.

Demostración de a). Sea $z = 0x$. Deseamos demostrar que $z = 0$. Sumando z a sí mismo y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

Sumemos ahora $-z$ a ambos miembros y obtenemos $z = 0$.

Demostración de b). Sea $z = a0$, sumar z a sí mismo, y aplicar el axioma 8.

Demostración de c). Sea $z = (-a)x$. Sumando z a ax y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = 0,$$

así que z es el opuesto de ax , $z = -(ax)$. Análogamente, si sumamos $a(-x)$ a ax y aplicamos el axioma 8 y la propiedad b), encontramos que $a(-x) = -(ax)$.

1.5 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 28, determinar si cada uno de los conjuntos dados es un espacio lineal real, si la adición y multiplicación por escalares reales está definida en la forma usual. Para aquellos en los que no es así, decir cuáles son los axiomas que no se cumplen. Las funciones de los ejercicios 1 al 17 son reales. En los ejercicios 3, 4 y 5, cada función tiene un dominio que contiene 0 y 1. En los ejercicios 7 al 12, cada dominio contiene todos los números reales.

1. Todas las funciones racionales.
2. Todas las funciones racionales f/g , con el grado de $f \leq$ que el grado de g (incluyendo $f = 0$).
3. Todas las f con $f(0) = f(1)$.
4. Todas las f con $2f(0) = f'(1)$.
5. Todas las f con $f(1) = 1 + f(0)$.
6. Todas las funciones escalonadas definidas en $[0, 1]$.
7. Todas las f en las que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
8. Todas las funciones pares.
9. Todas las funciones impares.