Mathematik im Kontext

Dirk van Dalen
David E. Rowe

L. E. J. Brouwer: Intuitionismus

2. Auflage

Springer Spektrum

Mathematik im Kontext

Reihe herausgegeben von
David E. Rowe, Mainz, Deutschland
Klaus Volkert, Köln, Deutschland

Die Buchreihe Mathematik im Kontext publiziert Werke, in denen mathematisch wichtige und wegweisende Ereignisse oder Perioden beschrieben werden. Neben einer Beschreibung der mathematischen Hintergründe wird dabei besonderer Wert auf die Darstellung der mit den Ereignissen verknüpften Personen gelegt sowie versucht, deren Handlungsmotive darzustellen. Die Bücher sollen Studierenden und Mathematikern sowie an Mathematik Interessierten einen tiefen Einblick in bedeutende Ereignisse der Geschichte der Mathematik geben.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/8810

Dirk van Dalen · David E. Rowe

L. E. J. Brouwer: Intuitionismus

2. Auflage

Springer Spektrum

Dirk van Dalen
Utrecht University
Utrecht, Niederlande

David E. Rowe
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mainz, Deutschland

ISSN 2191-074X ISSN 2191-0758 (electronic)
Mathematik im Kontext
ISBN 978-3-662-61388-7 ISBN 978-3-662-61389-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61389-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Ursprünglich erschienen beim BI-Wiss.-Verlag, Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim, 1992

Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Das vorliegende Buch enthält drei Arbeiten aus den 1920er-Jahren von L.E.J. Brouwer (1881–1966), dem Begründer des Intuitionismus. Die ersten zwei davon wurden erst nach seinem Tod in [Brouwer 1992] veröffentlicht, während die dritte zu seiner Lebenszeit in [Brouwer 1929] erschienen ist. Da das Buch [Brouwer 1992] längst vergriffen ist, kamen wir auf die Idee, einen Neudruck für die Reihe „Mathematik im Kontext" vorzubereiten. Angesichts der in den letzten Jahrzehnten stark anwachsenden historischen und philosophischen Literatur zu Brouwer[1] schien es uns angebracht, diese wichtigen Texte nochmals zugänglich zu machen.

Teil I dieses Buches besteht aus Brouwers im Jahre 1927 gehaltenen Berliner Gastvorlesungen. Inhaltlich stellen diese Vorlesungen die Ouvertüre zu einem erweiterten und vertieften Intuitionismus dar. Seine früheren Arbeiten dagegen sind gewissermaßen neutrale Konstruktionen zur Grundlage der zeitgenössischen Mathematik, d.h. sie sind im Wesentlichen Beschränkungen der Mathematik auf konstruktive Methoden (so wie E. Bishop dies später gemacht hat). Dabei deckte er manche Neues auf, z.B. die Feinstruktur des Kontinuums („Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?" [Brouwer 1922]) und die Zerlegung mathematischer Grundbegriffe (konstruktive Analyse von Inklusion, Identität usw.).

Der Verlag Walter de Gruyter in Berlin erklärte sich bereit, diese Vorlesungen zu veröffentlichen, und eine erste Fassung derselben war schon 1927 fertig. Aber das Manuskript wurde niemals eingereicht. Vielleicht hatte der Ausgang des Grundlagenstreits im Jahre 1928 Brouwer die Lust genommen, das Büchlein fertigzustellen. Aber sein Hang zum Perfektionismus wird wohl auch mit im Spiel gewesen sein. Denn diese Berliner Gastvorlesungen sind immerhin noch bis zum Jahr 1934 wiederholt und gründlich von Brouwer revidiert worden. An einigen Stellen unterscheiden sich Erstfassung und die späteren Überarbeitungen ziemlich stark; in einigen Fällen wird deswegen die Urversion in den Anmerkungen am Ende des Textes wiedergegeben. Diese Stellen sind durch Ziffern in eckigen Klammern gekennzeichnet; diese Anmerkungen wie auch die andere Fußnoten sind im Übrigen bis auf einige klar erkennbare Ausnahmen alle von Brouwer.

Brouwer hatte sich eigentlich mehrmals vorgenommen, ein Buch zu schreiben. Schon 1915 wurde er von Wilhelm Blaschke eingeladen, ein Buch über „Ihre grundlegenden geometrischen Arbeiten" für Teubner zu verfassen. Obwohl Brouwer damals zögerte sich festzulegen, war er nicht abgeneigt, eine Übersicht über die damalige Topologie unter dem Titel „Neuere Untersuchungen über Analysis Situs" zu verfassen. Daraus aber wurde nichts [Dalen 2013, S. 252].

Teil II des vorliegenden Buches entstammt einem anderen Projekt von Mitte der 1920er-Jahre. Als Brouwer seine erste Reihe von Arbeiten zum Intuitionismus in *Mathematische Annalen* vollendete, plante er wohl eine Monografie über die Neubegründung der Theorie der reellen Funktionen. In seinem Nachlass befindet

[1] An dieser Stelle möchten wir auf folgenden Arbeiten verweisen: [Stigt 1990], [Mancosu 1998], [Dummett 2000], [Hesseling 2003], [Dalen 2011], [Dalen 2013], [Rowe 2018], [Rowe u. Felsch 2019]. Für eine vollständige Bibliografie von Brouwers Arbeiten siehe [Dalen 2013].

sich jedenfalls ein Manuskript für eine größere Abhandlung, das ein vollständiges Kapitel über „Grundlagen aus der Theorie der Punktmengen“ und einen Teil des zweiten Kapitels, „Hauptbegriffe über reelle Funktionen einer Veränderlichen“, enthält. Das Manuskript ist handgeschrieben und versehen mit Korrekturen von Brouwer. Im Großen und Ganzen ist hierin der Aufbau der intuitionistischen Analysis einschließlich der elementaren Topologie euklidischer Räume und der Maßtheorie in einer Form dargelegt, wie sie schon in seinen Arbeiten von 1918 bis 1924 veröffentlicht worden war.

Ob Brouwer einen Vertrag für dieses Buchprojekt mit einem Verleger geschlossen hat, ist nicht bekannt. Wir wissen auch nicht, warum er die Arbeit an diesem Manuskript nicht weiter fortsetzte. Es sei jedoch angemerkt, dass er in der ersten Hälfte von 1924 noch mit dem Manuskript befasst war, als er seine Arbeit [Brouwer 1924] bei den *Mathematischen Annalen* einreichte. Wahrscheinlich war er davon überzeugt, dass er auf diesem Weg einen größeren Leserkreis erreichen konnte, weswegen er es vorzog, eine Reihe von Aufsätzen in den Annalen zu veröffentlichen. Auf jeden Fall war dies eine bedauerliche Entscheidung. Denn seine Darstellung der „Reellen Funktionen“ war sehr detailliert und hätte ihm gewiss einige Leser mehr verschafft. Brouwer war ziemlich konservativ im Umgang mit Bezeichnungen und Symbolismen. In einzelnen Fällen ist daher seine Schreibweise modernisiert worden, z.B. indem wir die üblichen Durchschnitts- und Vereinigungssymbole eingefügt haben. Auch ist hier und da die Orthografie der heutigen Schreibweise angepasst worden.

Teil III bringt abschließend einen Neudruck von Brouwers Vortrag „Mathematik, Wissenschaft und Sprache“, den er am 10. März 1928 in Wien gehalten hat. Dazu wurde er von seinen Freunden Felix Ehrenhaft und Hans Hahn eingeladen, und zwar im Namen des Komitees zur Veranstaltung von Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften. Der Inhalt dieses Vortrags weicht stark von beiden vorherigen Werken ab, indem Brouwer direkt auf Fragen zur philosophischen Grundlage des Intuitionismus eingeht. Vier Tage später hielt er einen zweiten Vortrag zum Thema „Die Struktur des Kontinuums“, dessen Inhalt dem der Berliner Gastvorlesungen näher steht. Leser und Leserinnen, die sich in erster Linie für Brouwers philosophische Ansichten interessieren, sind gut beraten, mit diesem Text zu beginnen.

Zum Schluss möchten wir unseren Kollegen Tilman Sauer und Duco van Straten dafür danken, dass sie die Idee eines Mainzer Brouwer-Symposiums im Mai 2018 gefördert und realisiert haben. Damals kamen wir mit ihnen, Jan van Mill und Teun Koetsier zusammen, ein fröhliches Treffen, aus dem dieses Buch sozusagen als Nebenprodukt entstanden ist. Übrigens bedanken wir uns bei Stella Schmoll vom Springer-Verlag wie auch bei Eva Kaufholz-Soldat, Natalia Poleacova und Dietlind Grüne für ihre Hilfe bei der Herstellung und Korrektur des Textes.

Dirk van Dalen
David E. Rowe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Grundlagenstreit wurde im September 1920 durch Brouwers aufsehenerregenden Vortrag [Brouwer 1921] auf der Naturforscherversammlung in Bad Nauheim eingeleitet. Otto Blumenthal war damals anwesend, wie auch bei einem Vortrag von Arthur Schoenflies „Zur Axiomatik der Mengenlehre“ [Schoenflies 1921]. Danach traf Blumenthal mit den beiden Vortragenden zusammen, da er als geschäftsführender Redakteur der *Mathematischen Annalen* ihre Texte gemeinsam veröffentlichen wollte. Otto Blumenthal berichtete hierüber in einem Brief an Felix Klein: „Schönflies' Arbeit soll dann unmittelbar neben Brouwers sehr anregenden Vortrag über Zahlen, die nicht in Dezimalbrüche entwickelt werden können, gestellt werden, und ich hoffe, dass diese beiden Publikationen klar den Willen der Redaktion betonen sollen, zu der neuen Krisis der Mengenlehre Stellung zu nehmen und Arbeiten darüber herauszufordern“ [Rowe/Felsch, S. 120].

Einen Monat vor Brouwers Auftritt schrieb Blumenthal am 20. August 1920 an David Hilbert: „Ich hoffe doch sehr, dass Sie nach Nauheim kommen werden. Von allem anderen abgesehen, halte ich die Auseinandersetzung mit Brouwers ‚Intuitionismus‘ für so wichtig, dass Sie dabei nicht schweigen sollten“ [Rowe/Felsch, S. 93]. Aus welchen Gründen auch immer entschied sich Hilbert dagegen. Blumenthal ließ ihn danach in einem Schreiben vom 16. September 1920 über Brouwers Enttäuschung wissen: „Übermorgen fahre ich nach Nauheim, dann will ich noch für ein paar [Tage] zu Brouwer nach Holland. Dieser ist auch schon enttäuscht, dass Sie nicht nach Nauheim kommen und dort Ihren angekündigten Vortrag halten“ [Rowe/Felsch, S. 98].[2]

Weniger als ein Jahr später brach ein regelrechter Kampf zwischen Brouwer und Hilbert aus, entfacht durch Hermann Weyls polemischen Aufsatz „Über die neue Grundlagenkrise in der Mathematik“ [Weyl 1921]. Dort warnte er vor der „drohenden Auflösung des Staatswesens der Analysis“ und appellierte an die jüngere Generation, indem er auf die neue Richtung hinwies: „Brouwer – das ist die Revolution!“. Es gab allerdings ein anderes Stichwort, das Weyl schon in einem Streit mit Georg Pólya ins Spiel brachte, und zwar „Ehrlichkeit“. In seinem Text verweist er auf die „halb und dreiviertel ehrlichen Selbsttäuschungsversuche“, welche als „Erklärungen von berufener Seite“ für die Antinomien innerhalb der Mengenlehre ausgegeben werden. Diese hätten die Absicht, einen falschen Eindruck zu erwecken, indem sie die Ernsthaftigkeit der Lage dementieren. Man soll glauben, so Weyl, es handele sich um Grenzstreitigkeiten, die „nur die entlegensten Provinzen des mathematischen Reichs angehen und in keiner Weise die innere Solidität und Sicherheit des Reiches selber, seine eigentliche Kerngebiete gefährden können“. Dies sei aber nicht der Fall, denn „in der Tat: jede ernste und ehrliche Besinnung muss zu der Einsicht führen, dass jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der Mathematik als Symptome gewertet werden müssen; in ihnen kommt an den

[2] Ob Hilbert tatsächlich einen Vortrag öffentlich angekündigt hatte, scheint allerdings unklar zu sein; auf jeden Fall stand er nicht auf der Liste der vorangemeldeten Redner im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*.

D. van Dalen und D. E. Rowe, *L. E. J. Brouwer: Intuitionismus*, Mathematik im Kontext, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61389-4_1

Tag, was der äusserlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum verbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht".

Weyls vorübergehende Bekehrung zum Intuitionismus war sicherlich dramatisch, zumal dieselbe kaum anders als ein offener Bruch mit Hilbert gedeutet werden konnte. In einem Brief an Klein schrieb er ganz offen, wie stark er von Brouwers Persönlichkeit angezogen war: „Brouwer ist ein Mensch, den ich von ganzer Seele lieb habe. Ich habe ihm jetzt in Holland in seinem Heim besucht, und das einfache, schöne, reine Leben, an dem ich dort ein paar Tage teilnahm, bestätigte mir ganz und gar das Bild, das ich mir von ihm gemacht."[3] Weyl gab seinen früheren Versuch [Weyl 1918], das Kontinuum zu erfassen, preis, um sich Brouwers allgemeinen Ansichten anzuschließen. So bekannte sich Weyl zu Brouwers schon längst bestehender Auffassung, dass das unbeschränkte *tertium non datur* keine Legitimation in mathematischen Beweisen besäße, ein Bekenntnis, das Brouwer sicherlich als einen Ausdruck der Ehrlichkeit betrachtete. Noch mehr, Brouwer lehnte jegliche Art allgemeiner Existenzbeweise als bedeutungslos für die Mathematik ab.

Ein Jahr später beendete Hilbert sein Schweigen mit einem heftigen Gegenangriff in seiner Hamburger Rede über eine „Neubegründung der Mathematik" [Hilbert 1922]. Er gab nicht zu, dass die Mathematik sich in einer Krisenlage befand. Denn Brouwer sei nicht die Revolution, wie Weyl meinte, sondern „nur die Wiederholung eines Putschversuches mit alten Mitteln", und dieser sei „von vorherein zur Erfolgslosigkeit verurteilt" [Hilbert 1922, S. 160]. Brouwer vermied eine Zeit lang derartig polemisch gefärbte Ausdrücke, bis er seine bissige Kritik in [Brouwer 1928] veröffentlichte.[4]

Diese Ereignisse und Streitigkeiten standen im Hintergrund, als Brouwer zu einer Vortragsreihe über Intuitionismus nach Berlin eingeladen wurde. Er begann seine Vorlesungen im Januar 1927, und sie dienten in der Folge als Muster für weitere Vortragsreihen, die er in Genf (1934) und Cambridge (ab 1946) gehalten hat. Es lohnt sich in diesem Zusammenhang einige zentrale Probleme zu beschreiben, die für die Entstehung von Brouwers Grundauffassungen wichtig waren. Hier gehen wir kurz auf die Wurzeln seiner Ideen ein, die schon zur Zeit der Dissertation [Brouwer 1907] sichtbar waren.

Seit Georg Cantor 1883 das Wohlordnungsproblem formulierte, ist die Wohlordnung des Kontinuums stets der Prüfstein der mengentheoretischen Grundlagen gewesen. Auch nach Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes im Jahre 1904 gab es noch Mathematiker, die diesem Beweis inhaltliche Bedeutung absprachen. Zu diesen gehörten nicht nur E. Borel und H. Poincaré, sondern auch Brouwer. In seiner Dissertation behauptete er:

> Nun wissen wir, daß es außer den abzählbaren Mengen, wofür der Satz *bestimmt gilt*, nur noch das Kontinuum gibt, wofür der Satz *bestimmt nicht gilt*, zunächst weil man den größten Teil der Elemente des Kon-

[3] Weyl an Klein, 15. November 1920, Nachlass Klein, SUB Göttingen, XII: 296.

[4] Zur weiteren Entwicklung des Grundlagenstreits siehe [Dalen 2013, S. 491–601]; zur Rezeption des Intuitionismus siehe [Hesseling 2003].

> tinuums als unbekannt betrachten muß und man sie deshalb am allerwenigsten individuell ordnen kann, und dann, weil alle wohlgeordneten Mengen abzählbar sind. [Brouwer 1907, S. 153]

In Brouwers frühen Arbeiten sind mit „Intuitionisten" fast immer die Franzosen, also Borel, Poincaré usw. gemeint. In seiner Antrittsvorlesung „Intuitionismus und Formalismus" [Brouwer 1912] bezeichnete er dann seine eigene Richtung als Neu-Intuitionismus. (Es bedurfte eines nicht geringen Maßes an Selbstbewusstsein, um von „Neu-Intuitionismus" zu sprechen, in einer Zeit, als er noch dessen einziger Vertreter war!) Die erste Fassung der Berliner Gastvorlesungen verwendet noch die Bezeichnung „Neu-Intuitionismus", aber bei den Korrekturen wurde das „Neu-" systematisch gestrichen.

Brouwers Ansichten über das Kontinuum änderten sich allerdings allmählich. Am Anfang war er der festen Meinung gewesen, wie alle damaligen (Semi- und Voll-)Konstruktivisten, dass Funktionen und Folgen durch Gesetze bestimmt werden müssten („die reellen Zahlen des Intuitionisten, bestimmt durch endliche Konstruktionsgesetze" [Brouwer 1912, S. 92]). Aber schon in [Brouwer 1914], seiner Rezension von Schoenflies' „Die Entwicklung der Mengenlehre", trifft man Betrachtungen über „Fundamentalreihen von Auswahlen unter den endlichen Zahlen" an. 1916 führte er dann in einer Vorlesung über Punktmengen Wahlfolgen explizit ein. Der Begriff einer Wahlfolge nahm danach einen zentralen Platz in Brouwers Verständnis des Kontinuums ein. Eine Wahlfolge besteht aus einer Folge natürlicher Zahlen, die keinem Gesetz unterstellt sind. Die Konstruktivisten betrachteten vorzugsweise unendliche gesetzmäßige Folgen, aber Brouwer wollte sich in Ergänzung dazu ein mathematisches Universum vorstellen, in dem das menschliche Potenzial zur freien Schöpfung von unendlichen Reihen zugelassen sein sollte (vergl. [Brouwer 1925]).

In der historischen Einführung zu seinen Berliner Gastvorlesungen verweist Brouwer auf die zentrale Rolle von Wahlfolgen für das, was er *die zweite Handlung des Intuitionismus* nennt. Hier ist die Rede von „der Selbstentfaltung der mathematischen Ur-Intuition zur *Mengenkonstruktion*". Diese trägt, so Brouwer, „das ganze Gebäude der intuitionistischen Mathematik". Was *die erste Handlung des Intuitionismus* betrifft, stehe diese für „die rückhaltslose Loslösung der Mathematik von der mathematischen Sprache und dementsprechend von der sprachlichen Erscheinung der theoretischen Logik". In seinen Cambridge Lectures wird diese erste Handlung folgendermaßen ausgedruckt:

> Completely separating mathematics from mathematical language and hence from the phenomena of language described by theoretical logic, recognizing that intuitionistic mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time. This perception of a move of time may be described as the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the twoity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of

> all twoities. And it is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics. [Brouwer 1981, S. 4–5]

Nachdem Brouwer die Wahlfolgen eingeführt hatte, kehrte er zu seinen früheren philosophischen Überlegungen zurück. Wie man in seinem Wiener Vortrag „Mathematik, Wissenschaft und Sprache“ nachlesen kann, wurzeln die Wahlfolgen in den sogenannten kausalen Folgen, die im Geiste des einzelnen Menschen erzeugt werden können. Überlegungen dieser Art findet man schon in den Fragmenten der Dissertation, die von Brouwers Doktorvater abgelehnt worden waren (vgl. [Stigt 1979], [Dalen 2013, S. 77–117]).

Dieser Erzeugungsprozess führt zu Brouwers Begriff der natürlichen Zahlen. Das hierzu gehörige Urphänomen ist nach Brouwer die Intuition von Zeit, welche die Iteration von „Ding in der Zeit“ zu noch ein „Ding“ möglich macht. Dieses Phänomen liegt eigentlich außerhalb der Mathematik. Denn eine Sensation kann in konstituierende Eigenschaften gespaltet werden, sodass ein Einzelmoment des Lebens wie eine Reihe qualitativ verschiedener Erlebnisse betrachtet wird, die sich dann im Intellekt als *observierte* mathematische Reihen vereinigen. Brouwer behauptet, dass das Subjekt aus nachfolgenden Eindrücken einen neu zusammengestellten Eindruck schafft; dies sei die Urform von „zwei“. Übrigens kann das Subjekt zu ursprünglichen Eindrücken zurückkehren. Durch Wiederholung dieses Verfahrens wird die nachfolgende Zahl, 3, hervorgerufen. Hinzu kam das Prinzip der natürliche Induktion: Wenn es uns gelingen soll, eine Eigenschaft einer beliebigen natürlichen Zahl n auf die nächstfolgende Zahl $n + 1$ zu übertragen, dann gilt diese Eigenschaft für alle natürliche Zahlen. Auf diese Weise konnte Brouwer die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen behandeln.

Nach dem Krieg fing Brouwer an, eine Reihe neuer intuitionistischer Ideen zu entwickeln, die zur Begründung der reellen Analysis dienen sollten. Dabei musste er einen neuen Stetigkeitsbegriff konzipieren, welcher zu Funktionen passt, die auf das neue Kontinuum definiert sind. Im ersten Teil der großen Arbeit „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ [Brouwer 1918] wurden schon *Mengen* und *Spezies* eingeführt und die Nichtabzählbarkeit der Menge aller Zahlenfolgen mithilfe seines Stetigkeitsprinzips bewiesen. Dieses besagt, dass, wenn es eine Zuordnung von natürlichen Zahlen zu Wahlfolgen von natürlichen Zahlen gibt, dann gibt es für jede Wahlfolge ein Anfangsstück, sodass allen Fortsetzungen dieses Anfangsstückes diesselbe Zahl zugeordnet wird.

Erst im Jahre 1923 gewann Brouwer Klarheit in Bezug auf die Frage der Stetigkeit reeller Funktionen. In einer Reihe von Arbeiten [Brouwer 1923, 1925, 1926, 1927] präzisierte er allmählich seinen Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit der reellen Funktionen auf einem geschlossenen Intervall. Die Beweise stützen sich auf sein Stetigkeitsprinzip wie auch eine Form von transfiniter Induktion, die seit S.C. Kleenes Arbeiten *Bar Induction* genannt wird. Die in Teil I und II wiedergegeben Werke Brouwers enthalten Beweise für diesen Stetigkeitssatz, während die Berliner Gastvorlesungen zwei unmittelbar Folgerungen daraus geben, nämlich die Unzerlegbarkeit des Kontinuums und den Heine-Borel'schen Satz. In diesen Vorlesungen nahm er auch das Ordnungsproblem des Kontinuums wieder in Angriff und nutzte seinen Stetigkeitssatz, um mathematisch streng zu zeigen, dass es überhaupt keine Ordnung des Kontinuums geben kann. Etwas präziser: Es gibt keine Ordnung mit der Trichotomie-Eigenschaft: $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$. Merkwürdigerweise veröffentlichte Brouwer einen Beweis dieses Satzes erst in [Brouwer 1950].

Anstatt sich mit einer Form von Ordnung zufriedenzugeben, die schwächeren Axiomen genügt, wie dies die heutige konstruktive Mathematik tut, suchte Brouwer doch eine „natürliche" Ordnung des Kontinuums zu finden, die so stark wie irgend möglich wäre. Seine Lösung war die sogenannte „virtuelle Ordnung", die man einfach als $\neg\neg a < b$ definieren kann. Diese war die bestmögliche Ordnungserweiterung der natürlichen Ordnung, denn Brouwer konnte 1927 zeigen, dass die virtuelle Ordnung unerweiterbar ist, und auch umgekehrt: Jede unerweiterbare Ordnung muss virtuell sein. Sein Beweis war allerdings keineswegs durchsichtig. Später hat er seine Resultate angezweifelt und eine Modifikationen vorgeschlagen [Brouwer 1975, S. 596]. E. Martino konnte aber doch zeigen, dass sich Brouwers ursprüngliche Argumente aufrechterhalten lassen, wenn man einen modelltheoretischen Standpunkt systematisch einnimmt [Martino 1988]. Der Wunsch Brouwers, die (partielle) Ordnung des Kontinuums so weit wie möglich auszudehnen, hat ihn dazu veranlasst, fast immer in seinen Betrachtungen die virtuelle Ordnung zu benutzen. Leider hat dies die Eleganz seiner Darstellung negativ beeinflusst. Seit der Erscheinung von Heytings Monografie [Heyting 1956] hat sich die natürliche positive Ordnung durchgesetzt.

Die Wandlung in Brouwers Denken in Zusammenhang mit dem Kontinuum spiegelte sich auch in seinen Ansichten zur Rolle des klassischen Kontinuums wider. Am Anfang war er der Meinung, das klassische Kontinuum umfasse viel mehr als das konstruktive Kontinuum. Insbesondere erkannte er nur individuelle reelle Zahlen als konstruktiv gegeben an, die durch Gesetze bestimmt waren. Das klassische Kontinuum dagegen enthielt auch nicht gesetzmäßige reelle Zahlen.

Nachdem er das Kontinuum mithilfe seiner Wahlfolgen neu gestaltet hatte, war Brouwer geneigt, das klassische Kontinuum als den gesetzmäßigen Teil des intuitionistischen Kontinuums zu betrachten. Die Gesamtheit der gesetzmäßigen reellen Zahlen nannte er das *reduzierte Kontinuum*. In seinen „Addenda and corrigenda on the role of the principium tertii exclusi in mathematics" [Brouwer 1951] sprach er tatsächlich vom „klassischen Kontinuum". Man beachte, dass das reduzierte Kontinuum für Intuitionisten nicht sehr attraktiv war, weil es nur eine Spezies und keine Menge war. Letzteres erklärt vielleicht, warum Brouwer sich die Mühe gab, das volle und das reduzierte Kontinuum verschiedentlich getrennt zu behandeln. Damit hat er, vom heutigen Standpunkt aus betrachtet, teilweise die von Bishop und Markov entwickelte Mathematik vorweggenommen.

Als in den Sechzigerjahren Kleene, Kreisel und Myhill ihre Formalisierungen der intuitionistischen Analysis veröffentlichten, war einer der Streitpunkte die Frage, ob gesetzmäßige Reihen (Funktionen) als primitive Objekte akzeptiert werden sollten. Wie man sehen kann, hat Brouwer in den Berliner Gastvorlesungen die gesetzmäßigen Reihen (und reellen Zahlen) als primitiv betrachtet. Schon in [Brouwer 1918] verwendete er „Gesetz“ ohne weitere Spezifizierung. Man könnte darüber spekulieren, ob Brouwer, wenn er den Begriff „rekursive Funktion“ frühzeitig gekannt hätte, die Benennungen „gesetzmäßig“ und „rekursiv“ identifiziert hätte – oder sogar von Wahlfolgen abgesehen hätte. Aufschluss über diese Fragen ist nicht zu verschaffen, da keine Äußerungen Brouwers dazu überliefert worden sind; jedoch kann man ruhig sagen, dass seine philosophischen Anschauungen es als fast unumgänglich erscheinen lassen, dass sein Intuitionismus ihm zu Wahlfolgen führen musste. Nebenbei sei bemerkt, dass Brouwer aus erster Hand über die Vorgänge im Bereich der rekursiven Funktionen informiert war, denn Church und später auch Kleene haben ihn in Amsterdam besucht.

Man findet in den Berliner Gastvorlesungen wie auch in Brouwers Wiener Vorträgen Spuren von der Idee eines *schöpfenden Subjekts* (*scheppende subject* (Holländisch), *creating subject*). Explizit tauchte dieser Begriff allerdings zum ersten Mal in [Brouwer 1948a] auf, aber mit der Erwähnung, dass er schon seit 1927 in Vorlesungen und Vorträgen davon gesprochen habe. Das schöpfende Subjekt, wie es ab 1948 in Brouwers Arbeiten auftritt, empfindet die Wahrheit oder Unwahrheit von Aussagen (auf Holländisch „*de waarheid blijkt hem*“, also „die Wahrheit zeigt sich ihm“), und seine mathematische Tätigkeit wird durch dieses „Empfinden“ (mit-)bestimmt. Nach der Auffassung Brouwers „gibt [es] keine nicht-empfundene Wahrheit“ [Brouwer 1948b] für Intuitionisten.

Schon in „Die Unzuverlässigkeit der logischen Prinzipien“ [Brouwer 1908] hatte Brouwer Gegenbeispiele für das *Principium tertii exclusi* gegeben. In späteren Arbeiten hat er dann ausgiebig *schwache Gegenbeispiele* benutzt, mittels denen er die Lösbarkeit einer bestimmten mathematischen Aufgabe auf die eines elementaren ungelösten Problems zurückführte. Typisch für solche elementaren Problemen sind z.B.: „Es gibt in der Dezimalbruchentwicklung von π eine Folge der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9“ oder „Es gibt einen letzten Primzahlzwilling“. Die Frage, ob es einen letzten Primzahlzwilling gibt oder stattdessen unendlich viele Primzahlzwillinge, entzieht sich unserem heutigen Wissen; daher spricht man in diesen Fällen oft von Allwissenheitsaussagen. Die schwachen Gegenbeispiele zeigen allerdings nur, dass man nicht annehmen darf, dass etwas eintritt, aber auch nicht, dass dies ausgeschlossen sei.

Als Brouwer dann einmal den Stetigkeitssatz bewiesen hatte, verfügte er aber auch über starke Gegenbeispiele oder, anders gesagt, er konnte klassische Theoreme widerlegen. Das einfachste Beispiel ist „Jede reelle Zahl ist entweder rational oder irrational“. Denn, wenn dies stimmen würde, könnte man eine stetige Funktion f definieren mit $f(x) = 0$, wenn x rational ist, und $f(x) = 1$ für irrational x. Diese Funktion kann aber nicht stetig sein, weil sie sonst zu einer Zerlegung des Kontinuums führen würde, was nach intuitionistischen Prinzipien unmöglich ist. Brouwer führte in den Berliner Gastvorlesungen nicht nur solche starken Gegenbeispiele ein, sondern er begann auch, diese Methode der Zurückführung auf unzulässige Aussagen zu systematisieren. Weil Brouwer die inhaltliche Bedeutung der klassischen Mathematik nicht anerkennen konnte, war für ihn das Verhalten der klassischen Mathematik gegenüber der intuitionistischen nicht besonders interessant. Es gibt z.B. keinerlei Indiz, dass er auf die Gödel-Gentzen'schen Einbettungssätze der klassischen Logik (Arithmetik) in die intuitionistische Logik reagiert habe.

Brouwers Auftritte 1927 in Berlin und ein Jahr später in Wien stellten einen letzten Höhepunkt in seiner Karriere dar. Bald danach verschärfte sich der Konflikt mit Hilbert, der über die Einmischung Brouwers in der Auseinandersetzung zwischen deutschen Mathematikern in Bezug auf die Teilnahme am bevorstehenden Internationalen Kongress in Bologna besonders aufgeregt war. Hilbert nahm zunächst nicht öffentlich Stellung dazu, aber bald danach setzte er Brouwers Entfernung aus der Redaktion der *Mathematischen Annalen* durch. Nach einem harten, aber aussichtlosen Kampf zog sich Brouwer weitgehend von der mathematischen Öffentlichkeit zurück. So gerieten zwar langsam seine ureigenen philosophischen Ideen in Vergessenheit, aber seine neuen Ansätze lebten noch weiter und festigten sich in Form der modernen intuitionistischen Logik.

Teil I

Berliner Gastvorlesungen

Kapitel I.1

Historische Stellung des Intuitionismus

Der Intuitionismus hat seine historische Stellung im Rahmen der Geschichte der Anschauung *erstens* über den Ursprung der mathematischen Exaktheit; *zweitens* über die Umgrenzung der als sinnvoll zu betrachtenden Mathematik [1]. In dieser Geschichte sind hauptsächlich drei Perioden zu unterscheiden:

Erste Periode: Bis weit in das 19. Jahrhundert hinein hat man an die Existenz einer aussersprachlichen, und ausserlogischen, Mathematik der Zeit und (unabhängig davon) des Raumes geglaubt, deren Exaktheit man aber jedenfalls in einem *grösseren* wissenschaftlichen Lehrgebäude nur so aufrechterhalten könnte, dass man einige einfache oder mit der erreichten Approximation als reell empfundene Wahrheiten sprachlich registrierte und in dieser Weise exakt festlegte und sich dann, in von anschauender Empfindung gelenkten Überlegungen, mittels der vier aristotelischen Spezies zu einer Theorie, d.h. zu einem System von komplizierten Wahrheiten erhob. Wir nennen diesen Standpunkt kurz den *kantischen* Standpunkt, den wir je nachdem die betreffende Theorie die Eigenschaften der Zeit und des Raumes angeblich genau beschreibt oder auf Grund eines kategorischen Imperativs zur Exaktheit idealisiert, als den *deskriptiven* bezw. den *korrektiven* kantischen Standpunkt bezeichnen.

Die kantische Periode hat sich damit aufgelöst, dass infolge der von der Nichteuklidischen Geometrie bis zur Relativitätstheorie sich erstreckenden Entdeckungen, mit dem in erster Linie die Namen Lobatchefsky, Bolyai, Riemann, Cayley, Klein, Hilbert und Einstein verbunden sind, die selbständige Existenz der kantischen Raumlehre oder Geometrie zusammenbrach, die Mathematik sich auf die Zahlenlehre zusammenzog, und die alte Geometrie in eine Teildisziplin dieser (exakten) Zahlenlehre und in eine Teildisziplin der (nie exakten) beschreibenden Naturwissenschaften zerlegt wurde.

D. van Dalen und D. E. Rowe, *L. E. J. Brouwer: Intuitionismus*, Mathematik im Kontext, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61389-4_2

Zweite Periode: Die bei diesem Prozess der „Arithmetisierung der Geometrie" erzielten Erfolge[1] des *sprachlichen Verfahrens*, d.h. des jeden aussersprachlichen Sinn ausser Acht lassenden Studiums der sprachlichen Wirkung der vier aristotelischen logischen Spezies bei den Verkettung mathematischer Aussagen, haben die *altformalistische Schule* (Dedekind, Peano, Russell, Couturat, Hilbert, Zermelo) dazu ermutigt, den kantische Standpunkt vollständig aufzugeben, und bis auf einen (aussersprachlichen) Zweckmässigkeitsanlass, alles aussersprachliche und ausserlogische aus der Mathematik auszuschalten. Die Hoffnung, für die alt-formalistische Mathematik den Schlussstein in der Form eines Widerspruchfreiheitsbeweises zu finden, ist übrigens nie in Erfüllung gegangen [2].

Ganz anders orientiert war die *prae-intuitionistische Schule* (Kronecker, Poincaré, Borel, Lebesgue), welche für die Konstruktion der natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Zahleninduktion den deskriptiven kantischen Standpunkt beibehalten hat, der eine von Sprache und Logik unabhängige Exaktheit postuliert, also der Widerspruchsfreiheit ohne logischen Beweis a priori sicher ist. Für die Einführung des Kontinuums hat sie den Mut dazu nicht gehabt; „das gegebene" mathematische Kontinuum entsprach nicht einer aussersprachlichen, mithin ausserlogischen intuitiven Konstruktion, sondern wurde auf Kosten der ausserlogischen Existenzsicherheit eingeführt entweder mittels (mit der Spezies der rationalen Zahlen vorgenommen logische Operation, z.B. der Erschaffung der Spezies aller konvergenten Fundamentalreihen rationaler Zahlen, oder der „Potenzspezies" der Spezies der rationalen Zahlen[2], oder mittels unmittelbare Evidenz mehr oder weniger entbehrender Axiome unter denen besonders das Vollständigkeitsaxiom durch Mangel an Anschaulichkeit hervortritt.[3]

Weil diese prae-intuitionistischen Überlegungen teilweise nicht auf anschauliche Empfindung beruhen, genügen sie weder der korrektiv-kantischen noch der deskriptiv-kantischen Forderung.

Auch bei den auf die Einführung folgenden mathematischen Herleitungen (sowohl im Bereiche der natürlichen Zahlenreihe, wie im Kontinuum) wird vom Prae-Intuitionismus fortwährend die Logik (inklusive des principium tertii exclusi) vertrauensvoll angewandt, obgleich seit der Entdeckung logischer Antinomien auf verwandte Gebieten, diese Herleitungen als ungeschützt gegen Widersprüche betrachtet werden müssen [4].

[1] Diese Erfolge waren der Reihe nach: 1. Aufhebung des aprioristischen Charakters für den euklidischen dreidimensionalen Raum. 2. Realisierung von verschiedenen logisch konstruierten axiomatischen Räumen als verallgemeinerte Zahlenräume und Ausbleiben anderweitigen Realisierungen derselben. 3. Herleitung der *Notwendigkeit* des arithmetischen Charakters der eingeführten axiomatischen Räume.

[2] Derartige Spezies erhalten nur durch die Gewalt der Logik (welche implizite andere als mathematische Erzeugungsmethoden zulässt) mehr als abzählbar-unfertigviele fertige (wie sie ausschliesslich in der betreffenden Schule anerkannt werden) Elemente [3].

[3] Inwiefern bei irgend einer dieser axiomatischen Grundlagen gewisse massgebende Axiome sich letzten Endes auf das principium tertii exclusi zurückführen lassen, bleibe hier dahingestellt.