



Wolfgang Francke  
Harald Friemann

# Schub und Torsion in geraden Stäben

3. Auflage

Grundlagen –  
Berechnungsbeispiele



Wolfgang Francke  
Harald Friemann

**Schub und Torsion  
in geraden Stäben**

**Aus dem Programm**  
**Bauwesen**

**Mathcad in der Tragswerkplanung**

von H. Werkle (Hrsg.) und R. Avak (Hrsg.)

**Finite Elemente in der Baustatik**

von H. Werkle

**Formeln und Tabellen Stahlbau**

von E. Piechatzek und E.-M. Kaufmann

**Schub und Torsion in geraden Stäben**

von W. Francke und H. Friemann

**Massivbau**

von P. Bindseil

**Dynamik der Baukonstruktionen**

von Chr. Petersen

**Statik und Stabilität der Baukonstruktionen**

von Chr. Petersen

**Holzbau**

von F. Colling

**Holzbau Beispiele**

von F. Colling

Wolfgang Francke  
Harald Friemann

# **Schub und Torsion in geraden Stäben**

**Grundlagen – Berechnungsbeispiele**

3., vollständig neubearbeitete Auflage



Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Die 1. und die 2. Auflage dieses Werkes erschien unter dem selben Titel im Werner Verlag bearbeitet von Harald Friemann.

3., vollständig neubearbeitete Auflage April 2005

Lektorat: Günter Schulz / Karina Danulat

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2005

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Technische Redaktion: Annette Prenzer

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN-13:978-3-528-03990-5 e-ISBN-13:978-3-322-83027-2  
DOI: 10.1007/978-3-322-83027-2

# Vorwort

## Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage

(August 1993)

Querkraftschub und Torsion sind zwei Teilgebiete der Elastizitätstheorie, mit denen der Bauingenieur während des Studiums und auch in der späteren Berufspraxis meist möglichst wenig zu tun haben will. Nachweise auf Querkraftschub oder Torsion sind selten erforderlich, so dass sich die Routine bei der Lösung dieser Probleme nur schwer einstellt. Hinzu kommt, dass sie von der Anschauung her schwer zu fassen sind und einen tieferen mechanischen Hintergrund erfordern, um zu einer klaren Lösung zu kommen.

Hier will dieses Buch einspringen und dem Ingenieur die zwei genannten Teilgebiete von der Theorie her und über zahlreiche Beispiele näher bringen. Durch die Beschränkung auf diese zwei Teilgebiete der Elastizitätstheorie kann die Darstellung in der notwendigen Ausführlichkeit erfolgen. Dabei wird das Hauptgewicht darauf gelegt, von den allgemeinen voraussetzbaren Grundkenntnissen aus das Gebäude „Schub und Torsion“ in systematischen und überschaubaren Schritten aufzubauen mit dem Ziel, allen üblichen Schub- und Torsionsproblemen sicher bearbeiten zu können.

## Vorwort zur dritten Auflage

Bei der Neubearbeitung des Buches wurde die Idee verfolgt, Bewährtes zu erhalten, aber dem Leser durch Ergänzungen weitere hilfreiche Informationen für die Anwendung in der Praxis zu bieten. Beispiele hierfür sind die Themen Gabellager und Wölbfeder. Die Umstellung der Normen auf das Teilsicherheitskonzept stellt einen weiteren Schwerpunkt dar.

Vollständig neu ist das Kapitel mit alternativen Lösungswegen von Torsionsaufgaben. Hier wird der Versuch unternommen, dem Leser mit Hilfe von Analogien mehr Verständnis für die Torsionsaufgaben zu ermöglichen und – Dank der heutigen IT-Produkte – in der täglichen Arbeit wirtschaftlich arbeiten zu können.

Das Buch richtet sich an praktisch tätige Ingenieure und Studierende, sowohl an Fachhochschulen als auch an Technischen Hochschulen und Universitäten. Es hat

zum Ziel, zu einem vertieften Verständnis von Schub und Torsion in geraden Stäben beizutragen und Hilfen für den Alltag zu geben.

Dieses Buch beruht auf einem früheren Vorlesungsskript „Schub und Torsion“ der Technischen Universität Darmstadt (TUD) und meinem Skriptum zur Vorlesung Stahlbau an der Fachhochschule Konstanz. Dank der hervorragenden und verständnisvollen Zusammenarbeit mit dem Vieweg Verlag konnte das Buch meinen Vorstellungen entsprechend verwirklicht werden.

Besonderen Dank schulde ich meinem Doktorvater und Kollegen Herrn Prof. Dr.-Ing. *Harald Friemann*. Er stimmte meinem Wunsch, diese dritte Auflage herauszugeben, gerne zu. Bei der Bearbeitung erhielt ich von Ihm zahlreiche wertvolle Anregungen, gleichzeitig stellte er sich als „Lektor“ zur Verfügung.

Dank auch meinem Kollegen Herrn Prof. *Franz A. Zahn*, PhD, für die zahlreichen Diskussionen und für die Durchsicht der Kapitel mit dem Werkstoff Stahlbeton.

Herrn Dipl.-Ing. *Georg Geldmacher* vom Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik an der TUD bin ich dankbar für die intensiven Gespräche und hilfreichen Anmerkungen zum Kapitel „Alternativen zur Lösung von ...“.

Für die tatkräftige Unterstützung bei den Zeichenarbeiten danke ich Frau *Angelika Appelt*. Mein Dank für die unermüdliche und verständnisvolle Unterstützung gilt meiner lieben Familie.

Angesichts der Vielzahl an Gleichungen, Beispielen etc. sind Fehler trotz aller Sorgfalt nicht auszuschließen. Ich bitte hierfür um Nachsicht und bin für jeden Hinweis sehr dankbar.

**Konstanz, im Januar 2005**

*Wolfgang Francke*

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V
<b>1 Grundlagen .....</b>	<b>1</b>
1.1 Einführung .....	1
1.2 Definition der Spannungen .....	1
1.3 Gleichgewichtsbedingungen für ein Volumenelement .....	3
1.3.1 Kräftegleichgewicht .....	4
1.3.2 Momentengleichgewicht .....	5
1.4 Werkstoffgesetz .....	7
1.4.1 Lineares Spannungs-Dehnungs-Gesetz ( <i>Hooke</i> ) .....	8
1.4.2 Gleitungen infolge Schub .....	9
1.4.3 Gleitmodul $G$ für einen isotropen Werkstoff .....	10
1.5 Geometrische Beziehungen am Volumenelement .....	12
1.6 Schnittgrößen der technischen Elastizitätstheorie für ein Stabelement .....	14
1.7 Anmerkungen zum Sicherheitskonzept .....	17
<b>2 Querkraftschubspannungen in dünnwandigen, offenen Profilen .....</b>	<b>19</b>
2.1 Allgemeiner Verlauf der Schubspannungen .....	19
2.1.1 Konstante Schubspannungsverteilung über die Profildicke $t$ – Schubfluss $T$ .....	19
2.1.2 Gleichheit der Schubflüsse in Längs- und Querschnitten .....	25
2.1.3 Summe der Schubflüsse an Querschnittsknoten .....	26
2.2 Ableitung der Dübelformel .....	28
2.3 Statische Momente $S$ .....	31
2.4 Beispiele einfach- oder doppelsymmetrischer Profile .....	34
2.4.1 Schmäler Rechteckquerschnitt .....	34
2.4.2 Doppelsymmetrischer I-Querschnitt .....	35
2.4.3 Offenes Quadratrohr .....	39
2.5 Dübelformel, bezogen auf die Hauptachsen .....	41

2.6	Einheitsschubflüsse .....	43
2.6.1	Definition .....	43
2.6.2	Kontrollen der Schubflüsse .....	45
2.7	Weitere Aussagen zum allgemeinen Schubflussverlauf .....	46
2.8	Beispiele zum Schubflussverlauf in beliebigen Profilen .....	47
2.8.1	C-Profil .....	47
2.8.2	Ungleichschenkliges Winkelprofil – L-Profil .....	49
2.8.3	Beispiel für eine praktische Anwendung .....	56
2.8.4	Anmerkung zu den Zahlenbeispielen .....	59
3	<b>Schubmittelpunkt <math>M</math></b> .....	61
3.1	Definition .....	61
3.2	Berechnung der Schubmittelpunktskoordinaten .....	61
3.3	Beispiele zur Berechnung des Schubmittelpunktes .....	65
3.3.1	C-Profil .....	65
3.3.2	Z-Profil .....	66
3.3.3	Längsgeschlitztes Quadratrohr .....	68
3.3.4	Unsymmetrischer T-Querschnitt .....	70
3.3.5	Längsgeschlitztes Kreisrohr .....	76
3.4	Übersicht über die Lage des Schubmittelpunktes bei offenen Querschnitten .....	77
4	<b>Querkraftschubspannungen in dünnwandigen, geschlossenen Profilen</b> .....	81
4.1	Axialverschiebungen $u$ .....	81
4.2	Kreis Schubfluss $T^1$ beim einzelligen Hohlprofil .....	83
4.2.1	Schubfluss $T_z$ in einem einzelligen Kastenträger .....	84
4.2.2	Doppelsymmetrischer Kastenträger .....	85
4.3	Gemischt offene/geschlossene Profile .....	86
4.4	Mehrzellige geschlossene Profile .....	87
4.4.1	Allgemeiner Lösungsweg .....	87
4.4.2	Beispiel .....	89
4.5	Schubmittelpunkt bei geschlossenen, dünnwandigen Profilen .....	92
4.6	Schubfluss in einem geschlossenen Verbundquerschnitt .....	93

<b>5 Querkraftschubspannungen in dickwandigen und massiven Querschnitten</b> .....	99
5.1 Genauer Verlauf der Querkraftschubspannungen in Rechteckquerschnitten .....	99
5.2 Querkraftschub in massiven Stahlbetonquerschnitten .....	101
5.3 Querkraftschub im Flansch von Plattenbalken .....	105
<b>6 Torsion</b> .....	109
6.1 Einführung .....	109
6.2 Voraussetzungen .....	109
6.3 Grundlegende Beziehungen .....	110
<b>7 St. Venant'sche Torsion für Vollquerschnitte</b> .....	115
7.1 Ableitung der Differentialgleichung .....	115
7.2 Randbedingung für die Spannungsfunktion $\psi$ .....	117
7.3 Torsionswiderstand $I_T$ und elastostatische Grundgleichung der St. Venant'schen Torsion .....	118
7.4 Beispiele für Vollquerschnitte .....	121
7.5 Verwölbungen .....	123
7.6 Lagerungsbedingungen bei der St. Venant'schen Torsion .....	126
7.7 St. Venant'sche Torsion bei rechteckigen Stahlbetonquerschnitten .....	130
<b>8 St. Venant'sche Torsion dünnwandiger, offener Profile</b> .....	133
8.1 Das schmale Rechteckprofil .....	133
8.2 Beliebige dünnwandige, offene Querschnitte .....	135
8.3 Beispiel .....	137
8.4 Verwölbungen dünnwandiger, offener Querschnitte .....	138
8.4.1 Grund- und Hauptverwölbungen .....	138
8.4.2 Umrechnung der Verwölbungen für verschiedene Drehachsen .....	141
8.4.3 Bestimmung der Integrationskonstanten $\omega_0$ und der Schubmittelpunktskoordinaten $y_M$ und $z_M$ .....	141

8.5	<b>Beispiele</b> .....	145
8.5.1	Wölbflächen eines I-Querschnitts .....	145
8.5.2	Wölbfläche eines C-Profils .....	147
8.5.3	Wölbfläche eines Z-Profils für $D = M = S$ .....	147
8.5.4	Schubmittelpunkt eines längsgeschlitzten Rechteckrohres .....	148
8.5.5	Schubmittelpunkt bei einem Kammquerschnitt .....	150
8.6	<b>Verbundquerschnitt</b> .....	153
9	<b>St. Venant'sche Torsion dünnwandiger, geschlossener Profile</b> .....	155
9.1	<b>Einzelliger Hohlquerschnitt</b> .....	155
9.2	<b>Mehrzellige Hohlquerschnitte</b> .....	158
9.3	<b>Verwölbungen von Hohlquerschnitten</b> .....	159
9.4	<b>Beispiele einzelliger Hohlquerschnitte</b> .....	161
9.4.1	Rechteckkasten mit unterschiedlichen Wanddicken .....	161
9.4.2	Unsymmetrischer gemischt offen/geschlossener Kasten .....	164
9.5	<b>Verbundquerschnitt</b> .....	167
9.6	<b>Torsionsnachweis von Stahlbeton-Hohlprofilen</b> .....	168
10	<b>Wölbkrafttorsion für dünnwandige, offene Profile</b> .....	179
10.1	<b>Ableitung der Differentialgleichung</b> .....	179
10.1.1	Einführung .....	179
10.1.2	Wölbnormalspannungen $\sigma_w$ und Wölbschubfluss $T_w$ .....	180
10.1.3	Gesamt-torsionsmoment .....	182
10.2	<b>Wölbmoment <math>M_w</math></b> .....	184
10.3	<b>Lösung der Differentialgleichung und Randbedingungen</b> .....	186
10.3.1	Allgemeine Hinweise .....	186
10.3.2	Lösung der Differentialgleichung .....	186
10.3.3	Randbedingungen .....	187
10.3.4	Symmetrie- und Antimetriebedingungen .....	188
10.3.5	Anfangswerte-Lösung .....	189
10.4	<b>Beispiele</b> .....	192
10.4.1	Kragträger mit einem Einzeltorsionsmoment am freien Ende .....	192
10.4.2	Kragträger mit konstanter Torsionsbelastung .....	197
10.4.3	Längswandriegel einer Industriehalle .....	203
10.4.4	Gabelgelagerter Träger mit Kragarm .....	210

---

10.5 Wölbfeder .....	215
10.5.1 Kopfplatte oder Steife .....	216
10.5.2 Trägerüberstand ( <i>Petersen, 1990</i> ) .....	217
10.5.3 Hohlsteife .....	217
10.5.4 Aufgeschweißte Bindebleche .....	218
<b>11 Analogien für die Lösung von Aufgaben zur Torsion .....</b>	<b>229</b>
11.1 Einführung .....	229
11.2 Membrananalogie .....	229
11.3 Zugstabanalogie .....	234
11.3.1 Einleitung .....	234
11.3.2 Analogie .....	234
11.3.3 Gegenüberstellung der Formeln .....	236
11.3.4 Zeitgemäße Anwendung der Zugstabanalogie .....	239
11.4 Beispiele .....	242
11.4.1 Kragträger mit konstanter Torsionsbelastung .....	243
11.4.2 Stütze eines Hinweisschildes .....	249
<b>Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen .....</b>	<b>263</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>265</b>
<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>271</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 Einführung

Lehrbücher zu den Grundlagen der Statik und Festigkeitslehre gibt es in größerer Zahl. Wenn hier dennoch eine weitere Arbeit hinzugefügt wird, so sollte dafür eine kurze Begründung gegeben werden.

In dieser Arbeit werden nur die zwei Teilgebiete der Festigkeitslehre herausgegriffen, die mit Schubbeanspruchungen eines Stabtragwerkes gekoppelt sind:

- Querkraftschub und
- Torsion.

Erfahrungsgemäß bereitet die Lösung dieser Aufgaben weitaus größere Schwierigkeiten als z. B. die Berechnung von Biegebeanspruchungen, da der theoretische Aufwand zur Beherrschung von Schubproblemen ungleich größer ist. Hinzu kommt, dass die Lösungen oft wenig anschaulich sind, so dass man auf abstrakte und schematische Rechenverfahren angewiesen ist, in die man sich jedes Mal wieder neu hineinarbeiten muss.

Die Beschränkung auf die genannten zwei Teilgebiete bietet hier die Möglichkeit, sie sehr viel ausführlicher zu behandeln, als dies im Rahmen eines Lehrbuches zur gesamten Elastizitätstheorie möglich ist. Eine solche Ausführlichkeit ist zum wirklichen Verständnis der Schubprobleme unerlässlich. Dabei wird angestrebt, aus der sicheren Kenntnis der Grundlagen heraus zu konkreten und verständlichen Lösungsverfahren für praktische Aufgaben zu gelangen, wobei die theoretischen Ableitungen auf ein Mindestmaß beschränkt werden. Besonderes Gewicht wird darauf gelegt, die Schubprobleme auch von der Anschauung her durchschaubar zu machen, soweit dies überhaupt möglich erscheint.

Die Beschränkung auf die Schubprobleme erfolgte nicht mit dem Ziel, auf diese Weise Raum für die Lösung komplizierter Sonderfälle zu gewinnen, die über die üblichen Anforderungen der Praxis hinausgehen. Zu allen schwierigeren Problemen wird der Leser auf die Literatur verwiesen. Diese Arbeit soll eine gutverständliche Hilfestellung zur Bewältigung aller normalen Schub und Torsionsaufgaben bieten.

## 1.2 Definition der Spannungen

Die Beanspruchung eines Volumenelementes, das Teil eines beliebig belasteten Körpers ist, wird durch innere Kräfte ausgedrückt, die zwischen dem betrachteten Ele-

ment und seinen Nachbarelementen auftreten. Denkt man sich das Element aus dem Körper herausgeschnitten, so können diese Kräfte als Schnittkräfte in den Elementflächen (Schnittflächen) sichtbar gemacht werden.

Ein solches Volumenelement mit den Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , siehe Bild 1-1, wird als infinitesimal klein vorausgesetzt. Die Lage jeder Schnittfläche wird durch die Richtung der Flächennormalen  $\vec{n}$  bestimmt, die jeweils parallel zu einer der Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  eines rechtsdrehenden Koordinatensystems verläuft. Außerdem werden die jeweils gegenüberliegenden Flächen des unendlich kleinen Würfels durch ihr Vorzeichen unterschieden:

Ist die Pfeilrichtung von  $\vec{n}$  identisch mit der zugehörigen Koordinatenrichtung, so wird die betreffende Fläche als positiv bezeichnet, im anderen Fall als negativ (DIN 1080).

Die in jeder Fläche des Elementes wirkende Schnittkraft wird durch drei Komponenten ausgedrückt, die – bezogen auf die jeweilige Schnittfläche – die drei Spannungskomponenten einer jeden Elementfläche ergeben, siehe Bild 1-1:

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \sigma_i \\ \sigma_{ij} &= \tau_{ij} \\ \sigma_{ik} &= \tau_{ik}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Der erste Index  $i$  gibt an, in welcher Koordinatenrichtung ( $x$ ,  $y$  oder  $z$ ) die Flächennormale verläuft. Der zweite Index  $i$ ,  $j$  oder  $k$  kennzeichnet die Wirkungsrichtung der Spannung. Die Normalspannung  $\sigma_{ii}$  (meist nur vereinfachend als  $\sigma_i$  geschrieben) steht rechtwinklig zur Schnittfläche und wird als Zugspannung positiv definiert. In der Schnittfläche liegen die zwei Schubspannungen  $\sigma_{ij}$  und  $\sigma_{ik}$  und erhalten hier die gebräuchlicheren Bezeichnungen  $\tau_{ij}$  und  $\tau_{ik}$ . Die positiven Schubspannungen in der positiven Schnittfläche eines Elementes, siehe Bild 1-1, wirken in Richtung der Koordinatenachsen  $j$  oder  $k$ , die der zweite Index angibt. In den negativen Schnittflächen wirken die Schubspannungen den Koordinatenrichtungen entgegen.

Die Vorzeichen der Spannungen haben eine sehr unterschiedliche Bedeutung im Hinblick auf die Beanspruchung des Werkstoffes. Das Vorzeichen der Normalspannungen  $\sigma$  ist unabhängig von der Definition positiver Koordinatenrichtungen. Dagegen kann es für die Widerstandsfähigkeit eines Werkstoffes sehr erheblich sein, ob er auf Druck oder Zug beansprucht wird.

Dagegen hängt das Vorzeichen der Schubspannungen von der Definition der positiven Koordinatenrichtungen ab, es ist jedoch für die Beanspruchung eines isotropen Werkstoffes unerheblich. Eine Vorzeichenumkehr in den Schubbeanspruchungen eines Elementes hat nur Einfluss darauf, in welchen allgemeinen Schnittflächen die Hauptspannungen (maximale Druck- und Zugspannungen) auftreten, ohne aber deren absolute Größe zu verändern.

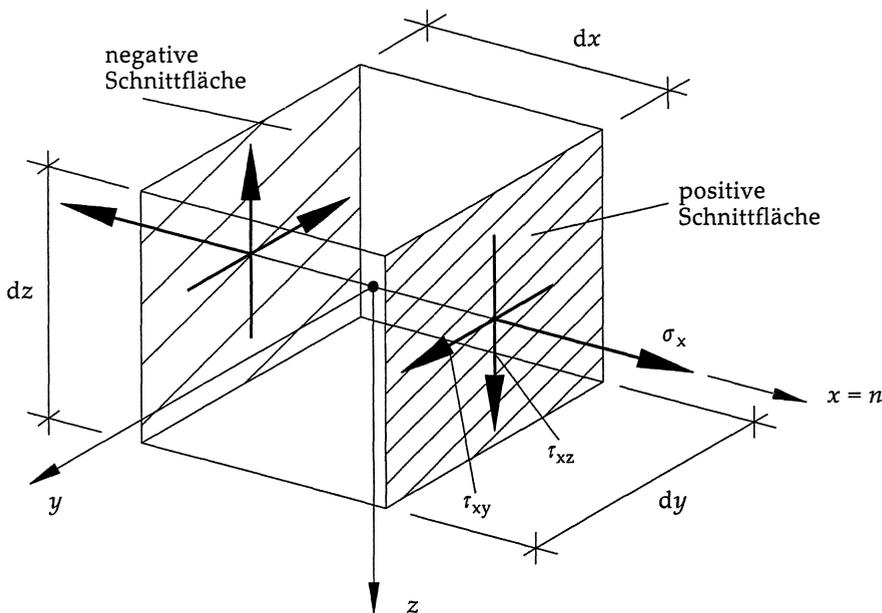


Bild 1-1 Volumenelement mit den Spannungskomponenten der Schnittfläche  $\vec{n}$

### 1.3 Gleichgewichtsbedingungen für ein Volumenelement

Die nachfolgenden Kapitel bringen in einer Kurzfassung die Grundlagen der linearen mathematischen Elastizitätstheorie; zum vertieften Studium dieser Grundlagen, insbesondere im geometrisch und werkstofflich nichtlinearen Bereich, sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen (z. B. *Timoshenko/Goodier* 1951).

Diese Grundlagen werden hier zum Teil benötigt, um die späteren Differentialgleichungen, insbesondere für die Torsion, herleiten zu können. Darüber hinaus sollen sie einige grundlegende Erkenntnisse über Größe und Richtung aller Schubspannungen in einem Volumenelement vermitteln, so dass die spätere Ermittlung von Schubspannungsdiagrammen in einem Trägerquerschnitt infolge Querkraft oder Torsion leichter verständlich wird.

Die Gleichgewichtsbedingungen der mathematischen Elastizitätstheorie werden am Volumenelement formuliert. In der linearen Elastizitätstheorie wird dabei vorausgesetzt, dass die Verzerrungen (siehe Kap. 1.4) des Elementes infolge seiner Beanspruchung so klein bleiben, dass sie keinen Einfluss auf die Gleichgewichtsaussagen haben, d. h., dass die Gleichgewichtsbedingungen am ursprünglichen unverformten Volumenelement aufgestellt werden können.

Volumenkräfte im Innern des Elementes, z. B. infolge einer Beschleunigung des Körpers, bleiben hier außer Betracht.

### 1.3.1 Kräftegleichgewicht

Alle in einer negativen Schnittfläche des Elementes wirkenden Spannungen ändern sich mit dem Übergang zur zugehörigen positiven Schnittfläche um differentielle Beträge, siehe Bild 1-2. Es ist hier ausreichend, das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung zu formulieren. Alle in  $x$  Richtung wirkenden Spannungen wurden in Bild 1-2 durch Einrahmungen hervorgehoben. Die Spannungen selbst heben sich heraus, in der Gleichgewichtsaussage verbleiben nur die differentielle Zuwächse der drei in  $x$  Richtung wirkenden Spannungen.

$$\underbrace{d\sigma_x}_{\text{Spannungszuwachs}} \cdot \underbrace{dy \cdot dz}_{\text{Schnittfläche}} + \underbrace{d\tau_{zx}}_{\text{Spannungszuwachs}} \cdot \underbrace{dx \cdot dy}_{\text{Schnittfläche}} + \underbrace{d\tau_{yx}}_{\text{Spannungszuwachs}} \cdot \underbrace{dx \cdot dz}_{\text{Schnittfläche}} = 0 \quad (1.2)$$

Die Division durch das Produkt  $dx \cdot dy \cdot dz$  führt unmittelbar auf die partielle Differentialgleichung für die Spannungszuwächse, wobei man die übrigen zwei Gleichungen durch zyklische Vertauschung der Indizes  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  erhält.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

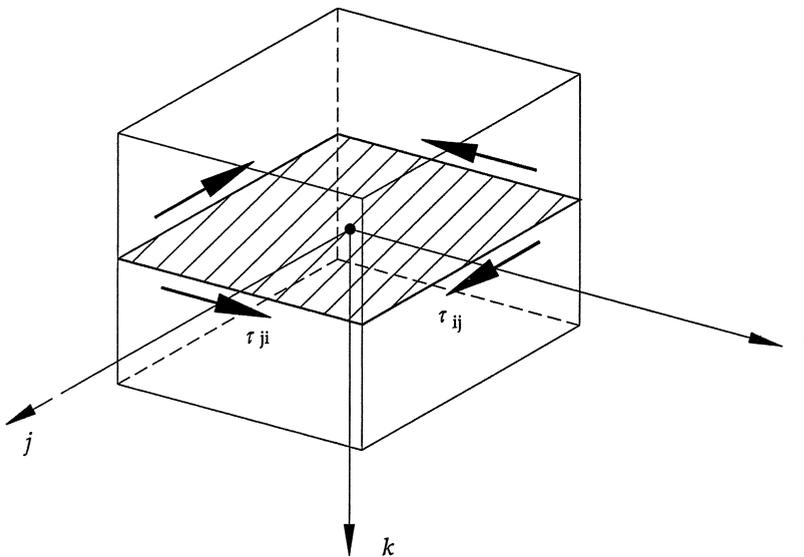
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$



$$\begin{aligned}
 \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} &= \tau_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Beachtet man die Definition der Indizes nach Bild 1-1, so lassen sich folgende anschauliche Deutungen der Gleichgewichtsaussagen nach Gleichung 1.7 geben, die für das Verständnis der späteren Herleitungen äußerst wichtig sind.

1. Die jeweils vier gleichen Schubspannungen  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  verlaufen in der Ebene, die durch die Achsen  $ij$  aufgespannt wird, und bilden einen so genannten „Schubspannungsring“, siehe Bild 1-3.



**Bild 1-3** Schubspannungsring  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

2. In benachbarten Flächen des Elementes laufen die Schubspannungen des Ringes entweder beide auf die gemeinsame Kante zu oder von dieser Kante fort.
3. In einem allgemein beanspruchten Element ergeben sich drei unabhängige Schubspannungsringe, die jeweils rechtwinklig zueinander verlaufen, siehe Bild 1-4.

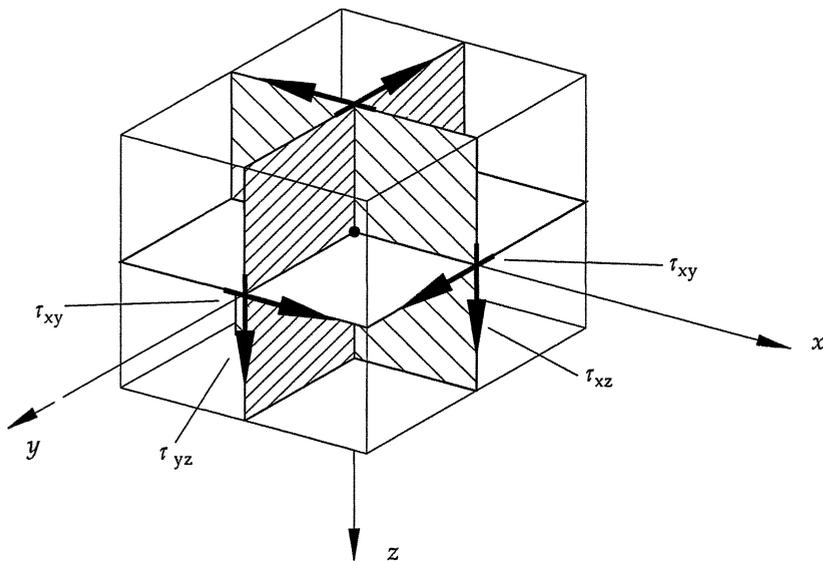


Bild 1-4 Schubspannungsringe eines Volumenelementes

4. Aus Gleichgewichtsgründen muss ein Schubspannungsring immer vollständig sein! Ist eine der vier Schubspannungen nach Bild 1-3 nicht vorhanden, z. B. aufgrund äußerer Randbedingungen, so muss der gesamte Ring Null sein!

## 1.4 Werkstoffgesetz

Das Werkstoffgesetz gibt an, wie sich das Volumenelement unter den vorgegebenen Spannungen verformt. Dabei wird zwischen solchen Verformungen, bei denen sich die Kantenlängen des Volumenelementes verändern, der rechte Winkel zwischen den Schnittflächen aber erhalten bleibt, und zwischen reinen Winkeländerungen des Elementes unterschieden. Erstere werden als Dehnungen  $\varepsilon$  bezeichnet und sind positiv im Falle einer Verlängerung, negativ im Falle einer Stauchung der Kanten definiert. Die reine Winkeländerung der ursprünglich rechtwinklig zueinander stehenden Elementflächen wird als Gleitung  $\gamma$  definiert. Alle Elementverformungen werden unter dem Oberbegriff Verzerrungen zusammengefasst.

Hier wird ein unbeschränkt linear elastischer Werkstoff vorausgesetzt, der als Hooke'scher Werkstoff definiert ist.

### 1.4.1 Lineares Spannungs-Dehnungs-Gesetz (Hooke)

Nach dem *Hooke'schen* Gesetz gilt folgender Zusammenhang zwischen den Dehnungen  $\varepsilon$  und der Normalspannung  $\sigma_x$ , siehe Bild 1-5:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \varepsilon_x \cdot E \Leftrightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\mu \cdot \varepsilon_x = -\frac{\mu}{E} \cdot \sigma_x\end{aligned}\quad (1.8)$$

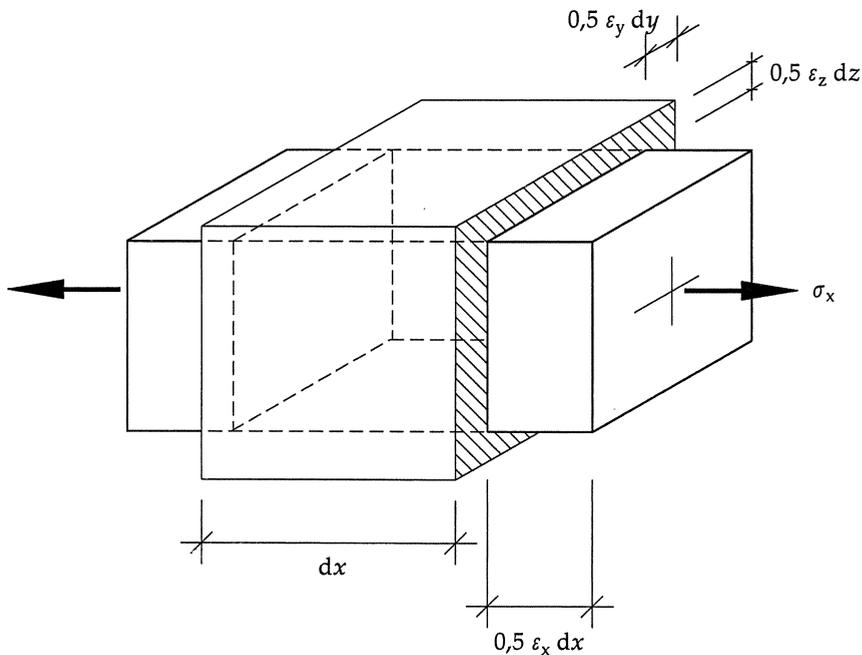
Darin sind  $E$  und  $\mu$  werkstoffabhängige Größen:

$E$  Elastizitätsmodul

$\mu$  Querdehnungszahl

Für Stahl gilt:  $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$

$\mu = 0,3$  für Stahl



**Bild 1-5** Dehnungen und Stauchungen eines Volumenelementes unter einachsiger Zug

Durch zyklische Vertauschung der Indizes und bei anschließender Überlagerung der Beanspruchungen erhält man die vollständigen *Hooke'schen* Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned}\tag{1.9}$$

Für reale Werkstoffe ist die Gültigkeit dieses Gesetzes sehr unterschiedlich. Beim Stahl ist der Elastizitätsmodul  $E$  bis zum Beginn des Plastizierens nahezu konstant. Beim Beton ändert der Elastizitätsmodul  $E_c$ <sup>1</sup> sich jedoch mit zunehmender Beanspruchung. Man kann trotzdem näherungsweise mit diesem Gesetz arbeiten, indem man den nichtlinearen Verlauf durch einen Polygonzug ersetzt und den veränderlichen Elastizitätsmodul abschnittsweise konstant setzt.

### 1.4.2 Gleitungen infolge Schub

Unter einem Schubspannungsring gemäß Bild 1-3 wird das rechtwinklige Volumenelement in ein schiefwinkliges Parallelogramm verzerrt, die Gleitung  $\gamma$  gibt die Größe dieser Winkeländerung an, siehe Bild 1-6, und hängt über den Gleitmodul  $G$  von der Schubspannung ab:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx}\end{aligned}\tag{1.10}$$

---

<sup>1</sup> Der Index c steht für Beton (concrete)

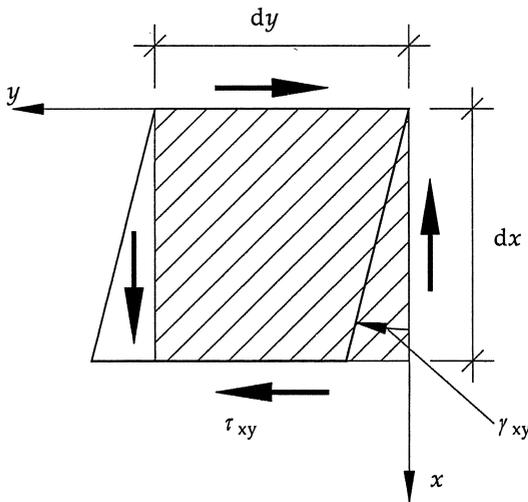


Bild 1-6 Gleitungen  $\gamma$  infolge Schubspannung  $\tau_{ij}$

Wird ein Element nur von einem Schubspannungsring  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  beansprucht, so tritt die einzige Winkeländerung  $\gamma_{ij}$  zwischen den Schnittflächen auf, die durch die Flächennormalen  $i$  und  $j$  bestimmt sind.

Die Winkeländerung  $\gamma$  ist eine absolute Größe, durch die die Lage des verzernten Elementes im Koordinatensystem noch nicht festgelegt ist. Im  $x, y$ -Koordinatensystem kann der Winkel  $\gamma_{xy}$  allgemein durch zwei Teilwinkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ausgedrückt werden, die von den Verschiebungen  $u, v$  abhängen, siehe Bild 1-9.

### 1.4.3 Gleitmodul $G$ für einen isotropen Werkstoff

Vom *Mohr'schen* Kreis her ist bekannt, dass ein reiner Schubspannungszustand nach Bild 1-6 durch eine Drehung der Schnittflächen des Elementes um  $45^\circ$  gegen die  $x, y$ -Achsen in einen Hauptspannungszustand mit

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = |\tau_{xy}| \quad (1.11)$$

übergeht, siehe Bild 1-7. Aus den Dehnungen der Hauptachsen 1 und 2 kann man sich die Gleitung  $\gamma_{xy}$  rein geometrisch ermitteln. Der Gleitmodul  $G$  kann daher keine unabhängige Werkstoffgröße sein, er lässt sich für einen isotropen Werkstoff aus den zwei Größen  $E$  und  $\mu$  berechnen.

Das in Bild 1-7 schraffierte Dreieck  $OAB$  wird zum Dreieck  $OA'B'$  verzernt, der neue Winkel  $\alpha$  enthält die gesuchte Gleitung  $\gamma = \gamma_{xy}$ . Da diese als sehr klein vorausgesetzt wird, kann man die Geometrie linearisieren

$$\tan(\gamma) = \gamma \quad (1.12)$$

und mit Hilfe der Summenformel erhält man:

$$\tan(\alpha) = \tan\left(45^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cong \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} \quad (1.13)$$

Außerdem kann man den Winkel  $\alpha$  über die Verlängerung  $\varepsilon_1$  der Diagonalen  $OA$  und über die Verkürzung  $\varepsilon_2$  der Diagonalen  $OB$  ermitteln:

$$\tan(\alpha) = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \quad (1.14)$$

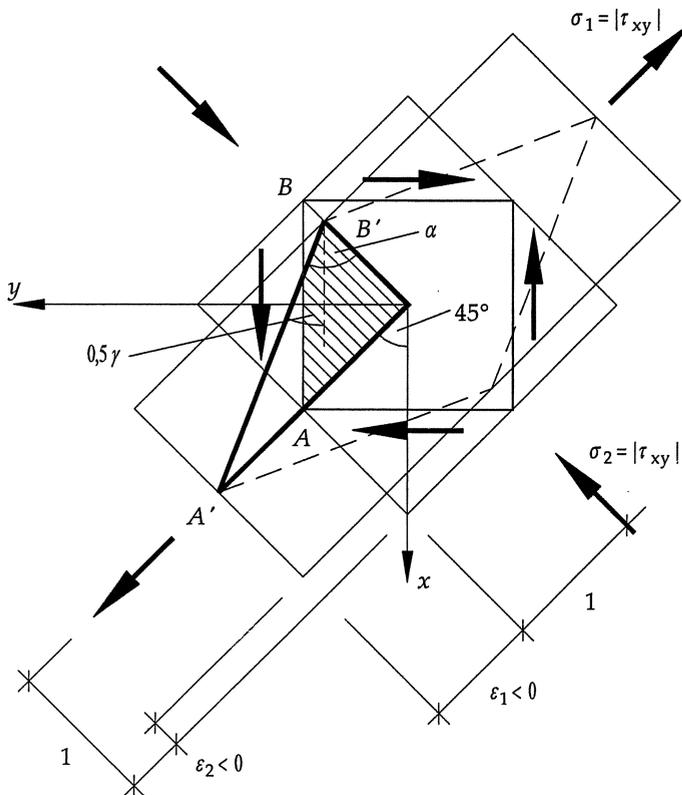


Bild 1-7 Zusammenhang zwischen Dehnungen und Gleitung eines Volumenelementes

Setzt man die rechten Seiten beider Ausdrücke (Gln. (1.13), (1.14)) gleich und vernachlässigt bei der Ausmultiplikation die Produkte  $\varepsilon \cdot \gamma$  als sehr kleine Größen, so erhält man für die Gleitung:

$$\gamma = \gamma_{xy} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (1.15)$$

Mit den Hauptdehnungen

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2) = + \frac{1}{E} \cdot \tau_{xy} \cdot (1 + \mu) \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \mu \cdot \sigma_1) = - \frac{1}{E} \cdot \tau_{xy} \cdot (1 + \mu)$$

erhält man für den Schubmodul:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (1.17)$$

## 1.5 Geometrische Beziehungen am Volumenelement

Als geometrische Beziehungen werden die Zusammenhänge zwischen den Verzerrungen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  und den Verschiebungen  $u, v, w$  in Richtung der Koordinatenachsen  $x, y, z$  bezeichnet. Die in Kap. 1.3 genannte Voraussetzung, dass die Verzerrungen als kleine Größen aufzufassen sind, ist auch auf die Verschiebungen zu übertragen. Alle Produkte oder Quadrate von Verformungsgrößen allgemein sind als vernachlässigbare Ausdrücke anzusehen, so dass sich alle geometrischen Beziehungen linearisieren lassen.

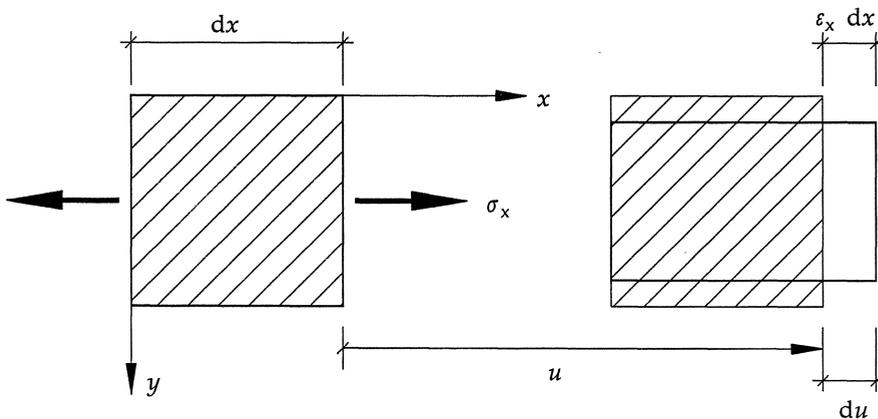


Bild 1-8 Zusammenhang zwischen Dehnung und Verschiebung eines Volumenelementes

Infolge der Normalspannung  $\sigma_x$  verlängert sich ein Volumenelement um  $\varepsilon \cdot dx$ , siehe Bild 1-5. Wird das ganze Element um die Strecke  $u$  in positiver  $x$ -Richtung verschoben, so wirkt sich die gleichzeitig auftretende Verlängerung so aus, dass die positive Schnittfläche in Bild 1-8 insgesamt um  $u + du$  verschoben wird. Die Verlängerung ist identisch mit dem Zuwachs der Verschiebung:

$$du = \varepsilon_x \cdot dx \quad (1.18)$$

Die Dehnung  $\varepsilon_x$  kann somit über die partielle Ableitung von der Verschiebung  $u$  ausgedrückt werden. Für die Dehnungen in Richtung der zwei anderen Koordinatenachsen erhält man die entsprechenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.19)$$

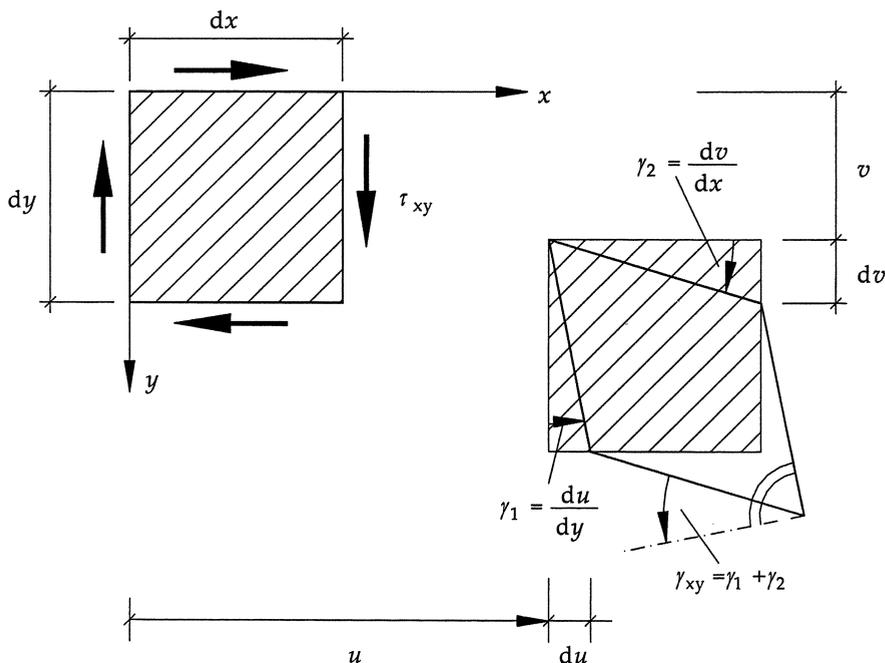


Bild 1-9 Zusammenhang zwischen Gleitung und Verschiebung eines Volumenelementes

Die Verschiebung  $u$  (und entsprechend auch die Verschiebungen  $v$  und  $w$ ) ist im Allgemeinen eine Funktion aller drei Koordinaten:

$$u = u(x, y, z) \quad (1.20)$$

Bei einem Volumenelement ändert sich die Verschiebung  $u$  daher nicht nur in  $x$ -Richtung, sondern auch von der negativen zur positiven Schnittfläche in  $y$ -Richtung (bzw.  $z$ -Richtung) um  $du$ . Dadurch verändert sich der rechte Winkel des Elementes um Gleitung  $\gamma_1$ , siehe Bild 1-9. Entsprechend kann sich die Verschiebung  $v$  mit zunehmendem  $x$  ändern und eine zweite Winkeländerung  $\gamma_2$  des Elementes hervorrufen. Beide Winkeländerungen zusammen ergeben die Gleitung  $\gamma_{xy}$  des Elementes in der  $x,y$ -Ebene; die Gleitungen in den zwei anderen Koordinatenebenen erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.21)$$

## 1.6 Schnittgrößen der technischen Elastizitätstheorie für ein Stabelement

Legt man einen vollständigen Schnitt durch einen belasteten Körper, so erhält man aus den Einzelspannungen aller geschnittenen Volumenelemente die Normal- und Schubspannungsdiagramme in der gesamten Schnittfläche. Der im Allgemeinen beliebige Verlauf dieser Spannungsdiagramme hängt von vielen Parametern ab (Art und Größe der Einwirkung, Eigenspannungen, Werkstoffgesetz u. a.) und ist mit den Mitteln der Elastizitäts- oder Plastizitätstheorie zu berechnen.

Für einen Stab als Tragelement können über den Verlauf dieser Spannungsdiagramme einige Annahmen getroffen werden, die den Rechenablauf wesentlich vereinfachen, ohne dass die Ergebnisse nennenswert von der Wirklichkeit abweichen.

Unter den Voraussetzungen, dass

1. die Abmessungen des Stabes in Höhe und Breite relativ klein im Verhältnis zu seiner Länge sind, dass
  2. der Querschnitt des Stabes im belasteten Zustand seine Form nicht verändert und dass
  3. ein linear elastisches Werkstoffgesetz vorherrscht,
- können folgende Annahmen getroffen werden:

1. Die Schubspannungen im Stab bleiben so klein, dass die damit verbundenen Gleitungen nach Kap. 1.4.2 vernachlässigt werden können. Eine Ausnahme bilden nur die Gleitungen aus den Torsionsschubspannungen, siehe Kap. 7.
2. Ein Querschnitt durch den Stab bleibt auch im belasteten und verformten Zustand eine ebene Schnittfläche.

Unter diesen Voraussetzungen und Annahmen wird die Form aller Spannungsdiagramme in einem Stabquerschnitt zu einer querschnittsabhängigen Systemgröße, lediglich die absolute Größe der Spannungen wird durch die Größe der Einwirkung und durch das statische System der Konstruktion bestimmt. Dadurch wird es möglich, jedes Spannungsdiagramm in einem Stab zu einer resultierenden Schnittgröße (Längskraft, Biegemoment, Torsionsmoment, Querkraft) zusammenzufassen und Berechnungsverfahren für Stabtragwerke zu entwickeln, die allein auf der Ermittlung dieser Schnittgrößen beruhen. Denn es ist jederzeit möglich, umgekehrt für eine ermittelte Schnittgröße über die so genannten Querschnittsgrößen (Fläche, Trägheitsmoment<sup>2</sup>, Widerstandsmoment, statisches Moment<sup>3</sup> u. a.) auf die zugehörigen Spannungsdiagramme zurück zu schließen. Alle Berechnungsverfahren dieser Art zählen zur Technischen Elastizitätstheorie (Technische Biegelehre; Stabstatik).

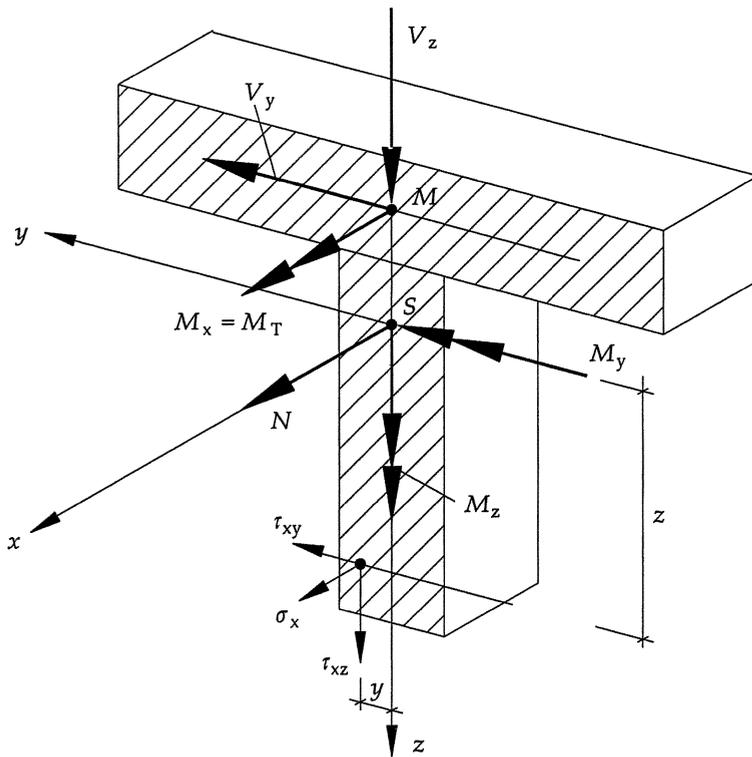
Bei anderen Tragelementen, die z. B. von ihren Abmessungsverhältnissen her nicht als Stab anzusprechen sind (Beispiel: eine Scheibe als ein ebenes Flächentragwerk), lassen sich zwar auch die Spannungsdiagramme zu Resultierenden aufintegrieren; aber der umgekehrte Vorgang, die unmittelbare Herleitung des Spannungsdiagrammes aus einer berechneten Schnittgröße, ist nicht mehr möglich. Tragwerke dieser Art werden mit den Mitteln der Mathematischen Elastizitätstheorie berechnet.

In einem Stab können sechs Schnittgrößen auftreten, die nach Vorzeichen und Wirkungsrichtung in Bild 1-10 definiert sind. Dabei ist zu beachten, dass die Schnittkräfte in verschiedenen Querschnittspunkten angreifen: die Längskraft  $N$  im Schwerpunkt  $S$ , die zwei Querkraften  $V$  im Schubmittelpunkt  $M$ , siehe Kap. 3.

---

<sup>2</sup> Nach DIN 1080, Teil 1 lautet die korrekte Bezeichnung Flächenmoment 2. Grades

<sup>3</sup> Nach DIN 1080, Teil 1 lautet die korrekte Bezeichnung Flächenmoment 1. Grades



**Bild 1-10** Definition positiver Schnittgrößen eines Stabquerschnittes

Die Schnittgrößen erhält man durch die Summierung der entsprechenden Spannungen:

$$M_x = M_T = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \cdot dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$$

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA$$

(1.22 a)

$$V_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA \quad (1.22 \text{ b})$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$$

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit besteht darin, für die Rückrechnung der Spannungsdiagramme aus den Schnittgrößen eines Stabes alle erforderlichen Kenntnisse und Fertigkeiten zu vermitteln. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Berechnung der Schnittgrößen selbst bereits abgeschlossen wurde, statische Berechnungen größerer Tragwerke werden hier nicht gebracht. Nur in die Theorie der Wölbkrafttorsion werden auch Beispiele zur Berechnung von Schnittgrößen einbezogen, da die zugehörigen Berechnungsverfahren nicht als allgemein bekannt anzusehen sind.

Eine weitere Einschränkung dieser Arbeit bezieht sich auf die Art der Schnittgrößen: Längskräfte und Biegemomente einschließlich ihrer zugehörigen Spannungsdiagramme werden nicht behandelt und als bekannt vorausgesetzt. Das Schwergewicht liegt somit auf den Schnittgrößen Querkraft und Torsionsmoment.

Die zu Beginn dieses Kapitels genannten Voraussetzungen und die darauf aufbauenden Annahmen sind normalerweise nur für Stahlprofile gültig, so dass alle nachfolgenden Ableitungen schwerpunktmäßig auf Stahlquerschnitte ausgerichtet sind. Für Stahlbetonquerschnitte, die weder dünnwandig sind noch einem linear elastischen Werkstoffgesetz gehorchen, können hier nur die in der Praxis angewandten Näherungslösungen angedeutet werden, siehe Kap. 5.2, ohne jedoch vertieft auf alle dabei auftretenden Probleme einzugehen. Diese Probleme beruhen auf dem Werkstoff Beton, der nur relativ kleine Zugbeanspruchungen aufnehmen kann. Unter einer größeren Zugbeanspruchung reißt der Beton, so dass der ursprüngliche Querschnitt für die Lastabtragung nicht mehr zur Verfügung steht. In der Praxis hilft man sich mit Modellvorstellungen, um die Abtragung der Querkräfte nachzuweisen, ohne jedoch den genauen Verlauf der Schubspannungen zu ermitteln.

## 1.7 Anmerkungen zum Sicherheitskonzept

Es ist bekannt, dass bei der Bearbeitung von konkreten Aufgaben sich irgendwann die Frage nach den Zulässigkeiten der erarbeiteten Aussagen bzw. nach der Sicherheit stellt. Damit verbunden ergeben sich Fragen in Richtung der DIN 1055, Teil 100 – Sicherheitskonzept, mit seinen Forderungen an die charakteristischen Einwirkungen (Lastfallkombinationen) und an die Beanspruchbarkeiten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit, und damit auch ein Beitrag zur Verständlichkeit, wird bei allen nachfolgenden Aussagen auf die Indizes  $d$  bzw.  $k$  verzichtet. Ausnahmen werden nur an den