Ehrhard Behrends

Fünf Minuten Mathematik

100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT

3. Auflage

SACHBUCH

Springer Spektrum

Fünf Minuten Mathematik

Ehrhard Behrends

Fünf Minuten Mathematik

100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT

Mit einem Geleitwort von Norbert Lossau

3., aktualisierte Auflage

Springer Spektrum

Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Freie Universität Berlin, Deutschland
behrends@math.fu-berlin.de

ISBN 978-3-658-00997-7 ISBN 978-3-658-00998-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00998-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

In den Jahren 2003 und 2004 erschien die erste und bisher einzige regelmäßige Kolumne zur Mathematik in einer überregionalen Zeitung. Die „Fünf Minuten Mathematik“ gab es jeweils am Montag in der „WELT“, die „Berliner Morgenpost“ veröffentlichte einen Nachdruck mit einer Zeitverzögerung von einigen Wochen.

Nach zwei Jahren waren 100 Beiträge zu den unterschiedlichsten Themen veröffentlicht worden. Wer wollte, konnte sich einen Überblick über viele Aspekte der Mathematik verschaffen: Kryptographie und Codierungstheorie, die Faszination der Primzahlen und der Unendlichkeit, Mathematik im CD-Player und in der Computertomographie, das Ziegenproblem und andere Mysterien der Wahrscheinlichkeitsrechnung usw.

Das vorliegende Buch enthält sämtliche Beiträge der Kolumne. Alle sind sorgfältig überarbeitet und durch erläuternde Texte, Bilder und Illustrationen ergänzt worden. Der Umfang hat sich dadurch mehr als verdoppelt.

Zur Lektüre eingeladen sind alle, die sich über diejenigen Aspekte der zeitgenössischen Mathematik informieren wollen, die man auch ohne Spezialkenntnisse verstehen kann. Der Autor hofft natürlich auch, Leserinnen und Leser mit einem Mathematik-Schultrauma davon zu überzeugen, dass das Fach eher faszinierend und spannend als staubtrocken und langweilig ist.

Ehrhard Behrends,
Berlin, Juli 2006

Vorwort zur zweiten Auflage

Das Interesse an den „Fünf Minuten Mathematik“ hat sich sehr erfreulich entwickelt. Inzwischen gibt es auch eine japanische und eine englische Übersetzung.

Mit dem Übersetzer der englischen Version, David Kramer, gab es eine besonders fruchtbare Korrespondenz. Er wies auf Tippfehler hin, die allen bisher entgangen waren, und an einigen Stellen des Buches führten seine Nachfragen zu Ergänzungen, um mathematisch nicht vorgebildeten Lesern das Verständnis zu erleichtern.

Diese Verbesserungen sind in die zweite Auflage ebenso eingearbeitet worden wie die zahlreichen Hinweise, die mich von Lesern erreichten.

Es sollte noch erwähnt werden, dass die Kolumne „Fünf Minuten Mathematik“ im „Jahr der Mathematik 2008“ in der WELT fortgesetzt wird. Diesmal schreiben 12 Autoren jeweils einen Monat, ich selbst bin nur der Koordinator.

Ehrhard Behrends,
Berlin, Mai 2008

Vorwort zur dritten Auflage

Für die vorliegende dritte Auflage ist eine Reihe von Ergänzungen vorbereitet worden. Besonders hinzuweisen ist auf kurze *Filme* zu den Themen Lotto, exponentielles Wachstum und Dimension, die man bei Youtube findet und die unter Verwendung des QR-Codes im Buch leicht abgerufen werden können.

Es hat mich auch sehr gefreut, dass der Erfolg des Buches nicht auf Deutschland beschränkt ist. Mittlerweile gibt es Übersetzungen ins Japanische (2006), ins Englische (2008) und ins Französische (2012), und die italienische, die russische und die türkische Version sind in Vorbereitung.

Überzeugen Sie sich, liebe Leserinnen und Leser, dass Mathematik viele interessante Facetten hat, einen wichtigen Teil unserer Kultur bildet und dass man sich davon auch ohne fachliche Spezialausbildung ein Bild machen kann.

Ehrhard Behrends

Berlin, Oktober 2012

„Fünf Minuten Mathematik“ in der WELT
Von Norbert Lossau

Mathematik ist bei den meisten Zeitgenossen nicht besonders beliebt. Schwierig, unverständlich, abstrakt und vor allem lebensfremd erscheint ihnen der Umgang mit Zahlen und Formeln. Und vielleicht braucht man ja wirklich eine gewisse Veranlagung – ähnlich der Musikalität – um sich leidenschaftlich für Mathematik zu interessieren.

Doch ich bin davon überzeugt, dass sich sehr viele gerne auf die Königin der Wissenschaften einlassen würden, wenn ihnen nur eine Brücke in das faszinierende Reich der Mathematik gebaut würde. Lehrer können solche Brücken bauen, indem sie den Schulstoff der Mathematik geschickt in spannende Geschichten „aus dem richtigen Leben“ verpacken. Wie wäre es etwa, wenn die abstrakte Kurvendiskussion dadurch motiviert wäre, dass man die optimalen Vertragsparameter für ein Hypothekendarlehen berechnet? Oder dass man Geometrie dazu nutzt, die genaue Quadratmeterzahl einer kompliziert geschnittenen Wohnung zu berechnen und die Zahl der Rauhfaserrollen, die zum Tapezieren eines Zimmers benötigt werden? Und wenn es um Primzahlen geht, würde eine Story über Geheimdienstcodes und das Dechiffrieren von Texten sicher manchen Schüler aufhorchen lassen.

Die Schlüsselwissenschaft Mathematik wird überall in unserem Leben gebraucht: Von der Scannerkasse über die Zinseszinsrechnung, dem PIN-Code auf der Bankkarte bis zur Entwicklung von neuen Autos und Flugzeugen oder einem Röntgen-Computer-Tomographen in der Medzin. Mathematik lässt Raumsonden zu fernen Planeten fliegen und erweckt Roboter zum Leben. Sie ist der Schrittmacher des technischen Fortschritts und – wenn man sich wirklich auf sie einlässt – einfach unglaublich spannend.

Auch wenn die Brücke hin zur Mathematik nicht in der Schulzeit gebaut wurde, so gibt es auch für den Erwachsenen noch Möglichkeiten, sich diesem Fach anzunähern. In den Medien hat zwar der Stellenwert der Wissenschaftsberichterstattung in den vergangenen Jahren deutlich zugenommen. Doch leider gilt dies nicht für die Mathematik. Nur wenige Zeitungen und Sender berichten regelmäßig oder zumindest sporadisch über mathematische Themen – obwohl sie es sicher verdienen, stärker beachtet zu werden. Für viele Redakteure scheint die Mathematik geradezu tabu zu sein.

DIE WELT ist frei von diesen Berührungsängsten und scheut sich beispielsweise nicht, auch mal eine Doppelseite über die Eigenschaften der Kreiszahl Pi zu veröffentlichen (25. 2. 2006).

Mit der wöchentlichen Kolumne „Fünf Minuten Mathematik“ aus der Feder von Professor Ehrhard Behrends bot die Zeitung sogar über 100 Wochen hinweg mathematischen Themen einen festen redaktionellen Platz. Aus zahlreichen Zuschriften wissen wir, dass sich die Leser außerordentlich stark für diese Kolumne interessiert haben. Dort wurde Mathematik – in motivierende Geschichten verpackt – kurz und knapp, verständlich und kompetent vermittelt. Und siehe da, auf einmal schmeckt die sonst so gescholtene Mathematik offenbar doch recht vielen.

Die WELT-Kolumne „Fünf Minuten Mathematik“ hat es verdient, mehr Leser zu erreichen als nur die Abonnenten dieser Zeitung. Daher freuen wir uns, dass der Vieweg Verlag mit diesem Buch die 100 Folgen einem hoffentlich breiten Interessentenkreis zugänglich macht.

Professor Behrends ist ein Brückenbauer in die Welt der Mathematik. Er hat das Talent, mathematische Inhalte so geschickt zu verpacken, dass man gar nichts von einer trockenen Abstraktion spürt. Wenn der Stellenwert und das Ansehen der Mathematik langfristig wachsen sollen, dann brauchen wir noch mehr Autoren wie ihn – und natürlich mehr Medien, die diesen Autoren Raum geben.

Dr. Norbert Lossau
DIE WELT
Ressortleiter Wissenschaft und Autor der Kolumne „Fünf Minuten Physik“

Einleitung

Die Vorgeschichte der Entstehung dieses Buches beginnt am 25. 1. 2002. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) hatte nämlich beschlossen, an diesem Tag ein gemeinsames Essen des Vorstands mit Journalisten zu veranstalten. Dabei sollte über das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit geredet werden. Einer der Teilnehmer war Dr. Norbert Lossau von der Wissenschaftsredaktion der „WELT“, mit dem ich mich dann einige Monate später noch einmal traf. Bei diesem Gespräch kam die Idee einer regelmäßigen Mathematikkolumne auf.

Ich erstellte ein ausführliches Exposé, in dem ich etwa 150 Themen skizzierte, zu denen es Beiträge geben könnte. Mein Vorschlag „Fünf Minuten Mathematik“ für den Namen der Kolumne wurde akzeptiert, die Grafiker entwarfen ein Kolumnen-Logo, und im Mai 2003 war es dann so weit: Der erste Beitrag erschien in der Montagsausgabe der „WELT“ vom 12. 5. 2003. So ging es dann Woche für Woche, der Rhythmus wurde nur dann unterbrochen, wenn der Montag ein Feiertag war und deswegen keine „WELT“ erschien. Nach zwei Jahren und 100 Beiträgen wurden die „Fünf Minuten Mathematik“ dann von einer anderen Kolumne abgelöst.

Bei der Auswahl der Themen habe ich versucht, auch an die Leser zu denken, deren Schulzeit schon eine Weile zurückliegt, die nicht viele konkrete Erinnerungen an dieses Fach haben, aber trotzdem erfahren wollen, was es darüber zu berichten gibt. Nur die p-q-Formel und Kurvendiskussion? Ist denn alles schon bekannt, was man über Mathematik wissen kann? Wo findet man Mathematik im „wirklichen Leben“? ...

Im Lauf der zwei Jahre konnte ein breites Spektrum behandelt werden, die Themen finden sich im Inhaltsverzeichnis auf den folgenden Seiten. Es gibt Aktuelles und Klassisches, leichter und etwas schwerer Verdauliches, und man kann an vielen Stellen erfahren, wie Mathematik unser Leben durchdringt, etwa beim Lotto, in der Kryptographie, im Computertomographen und bei der Bewertung von Bankgeschäften.

Noch vor dem Ende der Kolumne wurde mir vom Vieweg Verlag vorgeschlagen, doch alle Beiträge dort als Buch zu veröffentlichen. Es gab mehrere gute Gründe, sofort darauf einzugehen. Erstens hatten schon zahlreiche regelmäßige Leser von sich aus nach so einer Publikation gefragt. Zweitens ist eine „Kolumne“ dadurch definiert, dass die Beiträge stets in etwa den gleichen Umfang haben müssen[1)]. Das war bei manchen Themen nur mit schlechtem Gewissen möglich, und deswegen freute ich mich auf die Möglichkeit, bei der Buchform auf diese Einschränkungen

[1)] Das ist jedenfalls die Vorgabe an den Autor. Hin und wieder kam es auch vor, dass die Kolumne beim Seitenlayout aufgrund nicht ausreichenden Platzes noch einige Federn lassen musste.

keine Rücksicht nehmen zu müssen. Und drittens hat man – anders als in einer Kolumne mit einem vorgegebenem Platzvolumen – in einem Buch die Möglichkeit, dem Auge mehr zu bieten als nur Worte: Fotos, Zeichnungen, Funktionsskizzen, Tabellen, ...

Ich habe versucht, die neuen Möglichkeiten zu nutzen. Der Umfang ist dadurch im Vergleich zur „Roh-Kolumne“ auf das Zweieinhalbfache angewachsen. Manche Beiträge sind sehr stark erweitert worden. Zum Beispiel der zum Ziegenproblem (Beitrag 14): Da wollte ich mir die Chance nicht entgehen lassen, den mathematischen Hintergrund endlich einmal in angemessener Ausführlichkeit zu schildern. Andere sind im Wesentlichen so geblieben wie vorher, etwa der zu „mathematics go cinema“ (Beitrag 87). Es wäre zwar sehr verführerisch gewesen, ihn durch viele Bilder aus aktuellen Filmen zu illustrieren, doch wären die Nachdruck-Rechte ein zu ungewisser Kostenfaktor für die Kalkulation gewesen.

Es gibt *drei Aspekte*, die mir beim Schreiben der Kolumne wichtig waren:

Mathematik ist nützlich. Es sollte klar werden, warum unsere gegenwärtige technisch-wissenschaftliche Welt ohne Mathematik nicht funktionieren würde. Das Gütesiegel `mathematics inside` könnte auf immer mehr Produkten stehen.

Mathematik ist faszinierend. Neben der Nützlichkeit bietet die Mathematik auch eine ganz besondere intellektuelle Faszination. Der unstillbare Drang, ein vorgelegtes Problem lösen zu wollen, kann ungeahnte Energien frei setzen.

Ohne Mathematik kann die Welt nicht verstanden werden. Nach Galilei ist „Das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben“. Zu seiner Zeit war es nicht viel mehr als eine Vision. Heute weiß man, dass Mathematik die Brücke ist, die uns in Bereiche führt, die weit jenseits der menschlichen Vorstellungskraft liegen. Ohne Mathematik hat heute niemand mehr die Möglichkeit, „zu erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält“.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Lossau für die Möglichkeit danken, den WELT-Lesern zwei Jahre lang mathematische Themen präsentieren zu können. Unsere Zusammenarbeit habe ich in bester Erinnerung.

Mein Dank geht auch an Elke Behrends für viele Fotos, ganz besonders aber für die Fotomontagen zu den Beiträgen 6, 10 und 15. Ich freue mich auch darüber, dass die Kollegen Vagn Hansen (Kopenhagen) und Robin Wilson (Oxford) Bilder zur Verfügung gestellt haben (Beiträge 53 und 89). Schließlich wollte ich mich auch bei Tina Scherer und Albrecht Weis bedanken, die beim Korrekturlesen all die Tippfehler gefunden haben, über die Sie, liebe Leserinnen und Leser, sich nun nicht mehr zu ärgern brauchen.

Ehrhard Behrends

Inhalt

1. Der Zufall lässt sich nicht überlisten

Mal angenommen, Sie wohnen in einer Großstadt wie Berlin oder Hamburg. Sie sitzen gerade im Bus, jemand steigt aus und vergisst seinen Schirm. Den nehmen Sie an sich. Sie haben folgenden Plan: Sie wollen am Abend sieben zufällige Ziffern in Ihr Telefon eingeben und hoffen, auf diese Weise den Schirmbesitzer zu erreichen.

Die Geschichte ist natürlich erfunden, so ein Verhalten würde als extrem naiv belächelt werden. Doch sollte man nicht zu früh mitlächeln, denn Millionen Bundesbürger hoffen an jedem Sonnabend, sechs Richtige im Lotto zu haben. Und dafür ist die Chance für einen Gewinn 1 zu $13\,983\,816$: Das ist noch deutlich schlechter als in dem Schirm-Beispiel, denn da gibt es „nur“ $10\,000\,000$ Möglichkeiten.

Manche Lottospieler glauben, den Zufall dadurch überlisten zu können, dass sie Zahlen ankreuzen, die in der Vergangenheit eher selten gezogen wurden. Das ist leider völlig nutzlos, denn der Zufall ist gedächtnislos. Auch wenn, zum Beispiel, die „13“ lange nicht dran war, so wird sie heute haargenau die gleichen Chancen haben wie alle anderen Zahlen auch. Andere schwören auf ausgeklügelte Spielsysteme, um ihre Chancen zu verbessern. Auch diese Mühe ist vergeudet, schon vor vielen Jahrzehnten wurde mathematisch exakt bewiesen, dass man den Zufall durch kein System austricksen kann.

Am Ende noch ein Ratschlag, etwas Positives lässt sich doch sagen: Er besteht darin, eine Zahlenkombination anzukreuzen, die von nur wenigen anderen ebenfalls gewählt wurde, denn dann muss man im Fall eines Gewinns nicht auch noch mit vielen anderen teilen. Das ist allerdings leichter gesagt als getan. So gab es etwa vor einiger Zeit viele lange Gesichter, als sich herausstellte, dass das „richtige“ kreuzförmige Muster auf überraschend vielen abgegebenen Scheinen zu finden war.

Mathematik hin oder her: Es gibt keine Formeln für das schöne Gefühl der Erwartung, was man mit dem Gewinn denn nun alles anstellen könnte. Ich drücke Ihnen die Daumen.

E. Behrends, *Fünf Minuten Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-658-00998-4_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Warum ausgerechnet 13 983 816 ?

Wie kommen Mathematiker eigentlich auf die 13 983 816 Möglichkeiten beim Lotto? Man denke sich zwei Zahlen, nennen wir sie n und k; die Zahl n soll dabei die größere sein. Wie viele k-elementige Teilmengen kann man aus einer n-elementigen Menge auswählen?

Das scheint eine sehr abstrakte Fragestellung zu sein, die Antwort ist aber im hier besprochenen Zusammenhang von Interesse. Ein Lottotipp ist ja nichts weiter als die Festlegung von 6 Zahlen aus den 49 möglichen, in diesem Fall geht es also um die konkreten Zahlen $n = 49$ und $k = 6$.

Weitere Beispiele „aus dem Leben“ sind schnell gefunden:

- Ist $n = 32$ und $k = 10$, so fragt man nach der Anzahl der möglichen Skatblätter.
- Verabschieden sich nach einem Fest 14 Leute voneinander und möchte man wissen, wie oft es zu einem Händedruck kommt, so wird man auf $n = 14$ und $k = 2$ geführt.

Zurück zum allgemeinen Problem, hier ist die gesuchte Formel: Die Anzahl ist ein Quotient, bei dem im Zähler die Zahl $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ und im Nenner die Zahl $1 \cdot 2 \cdots k$ steht. Der Zähler sieht ein bisschen Furcht erregend aus. Es sind aber einfach die ab n jeweils um 1 fallenden Zahlen, und zwar so viele, bis man k Faktoren hat.
(Wer genauer wissen möchte, wie man zu dieser Formel kommt, findet die Herleitung in Beitrag 29.)

Für unsere Beispiele ergibt sich:

- Beim Lotto-Problem muss man $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ teilen. *So* kommt die im Beitrag angegebene Zahl 13 983 816 zustande.
- Für das Skatproblem ist der Quotient aus $32 \cdot 31 \cdots 23$ und $1 \cdot 2 \cdots 10$ zu berechnen. Es kommt 64 512 240 heraus, so viele verschiedene Skatblätter könnte ein Skatspieler ausgeteilt bekommen. (Die Anzahl der möglichen Ausgangssituationen für Skatspiele ist noch wesentlich größer, da es ja auch auf die Karten der anderen Mitspieler, den Skat und die Position des Spielers ankommt.)
- Das Händedrücken-Problem kann man sogar im Kopf lösen: $14 \cdot 13$ geteilt durch $1 \cdot 2$ ist gleich 91.

Ein 4.37 Kilometer langer Skatstapel

Die hier vorgeschlagene Möglichkeit, sich durch das Telefonbeispiel eine Vorstellung von der Winzigkeit der Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige zu verschaffen, ist nicht die einzige. Es folgt ein weiterer Vorschlag[2)].

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass ein Skatspiel etwa einen Zentimeter dick ist. Eine einfache Dreisatzrechnung ergibt, dass man etwa 437 000 Skatspiele braucht, um sich einen Vorrat von 13 983 816 Karten zu verschaffen und dass diese Skatstapel, senkrecht stehend aneinander gelegt, 4.37 Kilometer lang wären. Nun zur Lottowahrscheinlichkeit. Eine von diesen Skatkarten bekommt ein Kreuzchen, und wenn man die beim ersten zufälligen Ziehen aus dem 4.37 Kilometer langen Stapel zieht, hätte man mit gleicher Wahrscheinlichkeit auch einen Sechser im Lotto erzielen können. Das gleiche Beispiel für den Supergewinn benötigt einen Stapel von 43.7 Kilometer Länge.

Lotto in Italien

Lotto wird in fast allen Ländern gespielt, die Regeln sind allerdings sehr unterschiedlich. Als Beispiel sei auf *Lotto in Italien* hingewiesen. Da gibt es sogar zwei Varianten. Beim „gewöhnlichen" Lotto kreuzt man 2, 3, 4 oder 5 Zahlen auf einem Feld mit 90 Zahlen an. Es werden 5 Zahlen ausgespielt, und der Gewinn richtet sich danach, wie viele man richtig angekreuzt hat. Hat man sich etwa für die Variante mit 5 Kreuzen entschieden, ist die Analyse ähnlich wie im deutschen Lotto, nur dass es diesmal um „5 aus 90" geht. Es gibt $90 \cdot 89 \cdots 86/1 \cdot 2 \cdots 5 = 43949268$ Tippmöglichkeiten, die Wahrscheinlichkeit für fünf Richtige ist damit $1/43949268$ und folglich noch wesentlich geringer als bei uns.

Und dann gibt es noch das SuperEnaLotto, das ist einfach die Variante „6 aus 90". Es gibt $622.614.630$ Millionen Tippmöglichkeiten, entsprechend winzig ist die Wahrscheinlichkeit für einen Supergewinn.

Bemerkenswert ist noch, dass es – anders als in Deutschland – keine Regel gibt, nach der nicht ausgespielte Hauptgewinne irgendwann auf die niedrigeren Gewinnklassen umgelegt werden müssen. Deswegen kann es vorkommen, dass sich einiges ansammelt und man für 6 Richtige aberwitzig hohe Auszahlungen (über 100 Millionen Euro) bekommt. Dann gibt es ganze Buskarawanen aus den Nachbarländern zu den italienischen Annahmestellen ...

[2)] Eine weitere Variante zur Veranschaulichung dieser kleinen Wahrscheinlichkeit wird in Beitrag 83 auf Seite 198 beschrieben.

Ein Film zum Thema

Einen Film, in dem die (erfundene) Geschichte mit dem Regenschirm illustriert wird, findet man in Youtube unter

`<http://www.youtube.com/watch?v=KA-gN1h15Ko>`

oder direkt mit Hilfe des nachstehenden QR-Codes. (Für eine weitere Veranschaulichung siehe Beitrag 87.)

2. Bezaubernde Mathematik: Zahlen

Ich möchte Ihnen ein kleines Gewinnspiel vorstellen. Suchen Sie sich irgendeine dreistellige Zahl aus und schreiben Sie die zweimal hintereinander auf. Wenn also etwa 761 die Zahl Ihrer Wahl war, so sollte jetzt $761\,761$ auf dem Zettel stehen. Das Spiel beginnt: Sie sollen Ihre sechsstellige Zahl durch Sieben teilen, der Rest, der beim Teilen übrig bleibt, ist Ihre Glückszahl. Das wird eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sein, nur die können als Rest herauskommen. Und nun schreiben Sie noch Ihre Zahl und den Rest auf eine Postkarte. Die schicken Sie an die Redaktion der „WELT“, Sie erhalten postwendend so viele 100-Euro-Scheine zugeschickt, wie Ihre Glückszahl angibt.

$$
\begin{array}{l}
761761 : 7 \\
\underline{7} \\
06 \\
\ \underline{0} \\
\ \ 61 \\
\ \ \underline{56} \\
\ \ \ \ 57 \\
\ \ \ \ \underline{56} \\
\ \ \ \ \ \ 16 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{14} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 21 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{21} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Haben Sie zufällig Null als Glückszahl herausbekommen, ging es beim Teilen also auf? Dann sind Sie in guter Gesellschaft, das wird allen Mitspielern so gegangen sein (und andernfalls hätte die Redaktion dem Abdruck dieses Artikel sicher auch nicht zugestimmt).

Die Begründung für dieses Phänomen liegt in einer gut versteckten zahlentheoretischen Eigenschaft. Das zweimalige Hintereinanderschreiben einer dreistelligen Zahl ist nämlich gleichwertig zur Multiplikation dieser Zahl mit 1001, und da 1001 durch sieben teilbar ist, wird es auch die sechsstellige Zahl sein.

Diese Idee kann man natürlich auch als kleinen Zaubertrick für den Privatgebrauch verpacken, als Variante kann man das Versprechen, 100-Euro-Scheine zu verschenken, durch eine Voraussage des Rests ersetzen.

Es ist übrigens gar nicht so selten, dass eine mathematische Tatsache ihren Weg in die Zauberei findet. Man muss nur Ergebnisse finden, die der allgemeinen Erwartung zuwiderlaufen und für die eine Begründung in den Tiefen irgendwelcher Theorien verborgen ist.

Noch ein Ratschlag: Mit der Zauberei ist es wie mit Parfüm, die Verpackung ist mindestens genau so wichtig wie der Inhalt. Niemand sollte also bei der Vorführung sagen, dass die gewählte dreistellige Zahl mit 1001 malzunehmen ist; das ist zwar gleichwertig zum Nebeneinanderschreiben, aber die Pointe würde mit Sicherheit verpuffen. Wer eine Variante zum Teilen durch 7 sucht, kann auf 11 oder 13 ausweichen, denn 1001 hat auch diese Zahlen als Faktoren. Das wird beim Ausrechnen des Rests dann allerdings schon etwas anstrengender.

Die Fortgeschrittenen-Variante: 10001, 100001, ...

Warum sollten gerade *drei* Ziffern aufgeschrieben werden? Klappt es auch mit zwei- oder vierstelligen Zahlen?

Betrachten wir etwa eine zweistellige Zahl n, die als xy geschrieben ist. Schreibt man sie noch einmal daneben, geht also von xy zu $xyxy$ über, so ist das gleichwertig zur Multiplikation von n mit 101. Die Zahl 101 ist aber eine Primzahl, und deswegen

E. Behrends, *Fünf Minuten Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-658-00998-4_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

sind die Teiler von $xyxy$ die Teiler von xy und 101. Da man bei diesem Zaubertrick über xy nichts weiß, kann man nur voraussagen, dass beim Teilen durch 101 kein Rest bleiben wird. Dann ist der Trick aber leicht zu durchschauen, außerdem könnte das Teilen durch 101 die Mitspieler überfordern. Kurz: Zweistellige Zahlen sind als Ausgangpunkt nicht besonders geeignet.

Bei vierstelligen Zahlen kommt die Multiplikation mit 10001 ins Spiel. Das ist zwar keine Primzahl, es ist $10001 = 73 \cdot 137$, wobei 73 und 137 Primzahlen sind. Wenn man also eine vierstellige Zahl durch Nebeneinanderschreiben zu einer achtstelligen macht, so sind garantiert die Zahlen 73 und 137 Teiler. Doch wer teilt schon gern durch 73?

Da die Zahl $100\,001$ nur die fürs Rechnen unbequemen Primteiler 11 und 9091 hat, sind auch fünfstellige Zahlen als Ausgangspunkt nicht optimal. So geht das immer weiter, kleine Teiler gibt es erst wieder bei $1\,000\,000\,001$ (diese Zahl ist durch 7 teilbar). Doch wollen Sie wirklich Ihre kleine Zaubervorführung mit den Worten beginnen: „Suchen Sie sich eine beliebige neunstellige Zahl und schreiben Sie die zweimal nebeneinander“? Meine Empfehlung: Bleiben Sie beim Originaltrick!

Hier ist eine vollständige Tabelle der Primzahlfaktoren für die ersten Zahlen der Form $10\cdots01$:

Zahl	Primfaktorzerlegung
101	101
1001	$7 \cdot 11 \cdot 13$
10001	$73 \cdot 137$
100001	$11 \cdot 9091$
1000001	$101 \cdot 9901$
10000001	$11 \cdot 909091$
100000001	$17 \cdot 5882353$
1000000001	$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579$
100000000001	$101 \cdot 3541 \cdot 27961$
100000000001	$11 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 8779 \cdot 4093$
1000000000001	$73 \cdot 137 \cdot 99990001$

Wer sich genauer über den Zusammenhang von Mathematik und Zaubern informieren möchte, sollte sich das zu diesem Thema sehr empfehlenswerte Buch „Mathematische Zaubereien“ von Martin Gardner besorgen (Dumont Literatur und Kunst Verlag, September 2004). Weitere Zaubertricks mit mathematischer Grundlage werden in den Beiträgen 24 und 86 vorgestellt werden.

3. Wie alt ist der Kapitän?

Mathematik gilt – sicher zu Recht – als besonders exakte Wissenschaft. Der strenge logische Aufbau hatte Vorbildfunktion für viele andere Bereiche in den Natur- und Geisteswissenschaften. Ein berühmtes Beispiel dafür ist Newtons Hauptwerk, die Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Es beginnt mit grundlegenden Begriffen und Annahmen über die Welt (Was ist Kraft, was ist Masse, wie lauten die Newtonschen Grundgesetze der Mechanik?), und dann wird daraus streng deduktiv ein Modell der Welt hergeleitet, das die Wissenschaft revolutioniert hat.

Nach Newton gab es eine Fortschrittsgläubigkeit, die uns heute etwas naiv vorkommt: Alles sollte auf möglichst einfache mechanische Modelle zurückgeführt werden. Geblieben ist bei vielen Mitbürgern die Tendenz, Aussagen dann für besonders fundiert zu halten, wenn mathematische Termini verwendet werden und alles vielleicht sogar noch mit einer Formel dekoriert ist. Skepsis ist da in vielen Fällen angebracht, denn verwertbare Ergebnisse sind nur dann zu erwarten, wenn mit klaren Begriffen gearbeitet wird. So kann man sich sicher auf eine Definition von „Geschwindigkeit" einigen, die alle akzeptieren, eine „gefühlte Temperatur" dagegen ist eine sehr subjektive Angelegenheit. Und deswegen bleibt die Windchill-Formel eine Spielerei, die man ganz nach Geschmack unterhaltsam oder ärgerlich finden kann.

In diesem Zusammenhang ist auch an die natürlichen Grenzen der Mathematik zu erinnern. Mit noch so viel Intelligenz können keine Ergebnisse gefunden werden, wenn die Informationen unzureichend sind. Manchmal wird diese „Erkenntnis" in die – scherzhaft gemeinte – Aufgabe verpackt: „Das Schiff ist 45 Meter lang und 3 Meter breit. Wie alt ist der Kapitän?"

In dieser Verkleidung fällt allen auf, dass derartige Fragen Unsinn sind. Trotzdem gibt es immer einmal wieder Anfragen des Typs „Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Deutschland Weltmeister?". Und wie soll man sinnvoll etwas zu den Chancen bei einem Gewinnspiel einer Bierbrauerei sagen, wenn keiner weiß, wie viele Preise vergeben werden und wie viele Teilnehmer es geben wird?

Windchill und Verwandtes

Windchill

$$\mathbf{T_{WC} = (0.478 + 0.237\sqrt{v} - 0.0124v)(T - 33).}$$

Dabei sind T_{WC} bzw. T die „gefühlte" bzw. die wahre Temperatur (in Fahrenheit), und v bezeichnet die Windgeschwindigkeit.

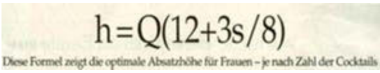
Die Windchill-Formel ist ein schönes Beispiel für falsch verstandene Exaktheit. Niemand zweifelt natürlich daran, dass es sich noch kälter anfühlt, als es ohnehin schon ist, wenn ein starker Wind weht. Doch dürfte es schon schwierig sein, zwei Personen zu finden, für die die „gefühlte Temperatur" bei minus fünf Grad Celsius

E. Behrends, *Fünf Minuten Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-658-00998-4_3, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

und einer für beide gleichen Windstärke übereinstimmt. Es wird von der Konstitution, der Kleidung und anderen Faktoren abhängen, welcher Wert „gefühlt“ wird.

Die Windchill-Rechner wissen es jedoch ganz genau, sie präsentieren sogar eine Formel, in der die relevanten Parameter irgendwie zusammengestoppelt sind, trotzdem aber auf drei gültige Stellen angegeben werden. Natürlich hat man auf eine gewisse Monotonie geachtet: Wenn der Wind stärker wird, fühlt es sich noch kälter an. Alles in allem wäre aber eine sehr grobe Tabelle vorzuziehen, denn durch die Formel gewinnt das Ganze ungerechtfertigter Weise die Weihen einer exakten Wissenschaft.

Mittlerweile hat es eine Reihe von „Nachahmungstätern“ gegeben. Es wurde zum Beispiel von Formeln für die Höhe von Stöckelabsätzen und die durch einen Kriminalroman erzielbare Spannung berichtet. Derartige Versuche schaffen es als Meldung auch oft auf die Seite „Vermischtes“ der Zeitungen. Und dann kann man sich am Frühstückstisch darüber wundern, zu welchem Unsinn die Mathematik angeblich ernst zu nehmende Beiträge leistet.



$$h=Q(12+3s/8)$$

Diese Formel zeigt die optimale Absatzhöhe für Frauen – je nach Zahl der Cocktails

Abbildung 1: Eine Fundstelle zur Absatzhöhe vom Sommer 2004

4. Schwindelerregend große Primzahlen

Die einfachsten Zahlen sind sicher die so genannten natürlichen Zahlen, also die, die alle zum Zählen brauchen: $1, 2, 3, \ldots$ Einige sind etwas Besonderes, man kann sie nicht als Produkt kleinerer Zahlen schreiben. Das ist zum Beispiel für 2, 3 und 5 der Fall, aber auch für 101 und $1\,234\,271$. Man spricht dann von *Primzahlen*, sie haben schon in den frühesten Anfängen der Mathematik eine große Faszination ausgeübt.

Wie groß können denn Primzahlen sein? Schon vor über 2000 Jahren gab Euklid einen berühmten Beweis dafür, dass es beliebig viele Primzahlen gibt und dass deswegen auch beliebig große darunter sein müssen[3)]. Die Idee ist die folgende: Euklid gibt eine Art Maschine an, in die man irgendwelche Primzahlen eingeben kann; die Maschine produziert dann eine Primzahl, die von allen eingegebenen verschieden ist. Folglich ist es nicht möglich, dass es nur einen begrenzten Vorrat gibt.

Die Konsequenzen dieses Ergebnisses sind bemerkenswert, manchen wird ein bisschen schwindelig dabei. Euklids Ergebnis garantiert zum Beispiel, dass eine Primzahl existiert, für deren Ausdruck man mehr als die gesamte jemals produzierte Druckerschwärze verbrauchen würde; wir werden so ein Ungetüm deswegen niemals konkret zu Gesicht bekommen. Die größte zurzeit wirklich identifizierte Primzahl hat immerhin an die vier Millionen Stellen, dieser Rekord ist erst ein gutes Jahr alt. (Um eine Vorstellung von der Größe zu bekommen: Würde man den Rekordhalter in einem Buch veröffentlichen, so müsste das schon ein Wälzer von 800 Seiten sein.) Große Primzahlen sind auch für die Kryptographie interessant, da reichen allerdings „Winzlinge“ von einigen hundert Stellen.

Für Zahlentheoretiker ist es weiterhin eine große Herausforderung, immer neue Geheimnisse der Primzahlen aufzudecken, schon Gauß nannte das Gebiet die „Königin der Mathematik“.

Die Primzahl-Maschine

Hier eine Funktionsbeschreibung von Euklids „Primzahl-Maschine“. Gegeben seien n Primzahlen, wir nennen sie $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Wenn Ihnen das zu abstrakt ist, denken Sie an die vier Primzahlen $7, 11, 13, 29$; für Sie ist also $n = 4$ und $p_1 = 7, p_2 = 11, p_3 = 13, p_4 = 29$.

Nun wird das Produkt dieser Primzahlen gebildet und 1 addiert. Das Ergebnis soll m heißen, also

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1;$$

in unserem speziellen Beispiel ist $m = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 + 1 = 29\,030$.

Jede Zahl, also auch m, hat einen Teiler, der Primzahl ist, nennen wir ihn p. Bemerkenswerterweise muss p von allen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschieden sein, denn wenn man m durch p_1 oder p_2 oder $\ldots$ p_n teilt, bleibt der Rest 1. (In unserem Beispiel

[3)] Wie man heute „sehr große“ Primzahlen findet, wird in Beitrag 54 beschrieben.

E. Behrends, *Fünf Minuten Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-658-00998-4_4, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

könnten wir $p = 5$ wählen, das ist ein Primteiler von $29\,030$; die Zahl 5 kommt wirklich unter den Zahlen $7, 11, 13, 29$ nicht vor.)

Zusammen: Bei beliebigen vorgegebenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ wird eine neue produziert, die in der „Eingabe“ nicht vorkam. Dann kann es natürlich nicht sein, dass der Vorrat der Primzahlen endlich ist, denn die Maschine liefert ja immer neue Kandidaten.

Es folgen weitere Beispiele, da sind in der Ausgabe *alle* Primteiler der Zahl $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ aufgeführt. Man beachte insbesondere das zweite und dritte: Die Primzahlen, die eingegeben werden, müssen nicht einmal verschieden sein.

$$3,\ 7 \longrightarrow \boxed{3 \cdot 7 + 1 = 22} \longrightarrow 2,\ 11$$

$$2,\ 2,\ 5 \longrightarrow \boxed{2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 = 21} \longrightarrow 3,\ 7$$

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \longrightarrow \boxed{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 = 33} \longrightarrow 3,\ 11$$

$$7,\ 11,\ 13,\ 29 \longrightarrow \boxed{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 + 1 = 29030} \longrightarrow 2,\ 5,\ 2903$$

Abbildung 2: Euklids Primzahlmaschine in Aktion

Erzeugt Euklids Maschine *alle* Primzahlen? Das soll folgendes bedeuten. Wir nehmen einmal an, dass wir nur wissen, dass 2 eine Primzahl ist. Die geben wir in die Maschine ein und erzeugen die Primzahl 3. Nun können wir die Maschine schon mit 2 und 3 füttern. Sie liefert uns die 7, und danach können wir mit 2, 3 und 7 arbeiten. Diese Primzahlen sind also mögliche Eingaben, wobei nicht alle drei Zahlen auftreten müssen und manche mehrfach verwendet werden dürfen. Entsteht dann *jede* Primzahl irgendwann einmal als Ausgabe aus Euklids Maschine?

Die Antwort ist „ja“, denn für jede Primzahl p ist $p-1$ das Produkt aus gewissen (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Damit würde bei Eingabe von $p_1, \ldots, p_r$ die Primzahl p entstehen, denn $p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1 = p$. Dieses Argument kann man dazu verwenden, um die Aussage „Alle Primzahlen, die kleiner als die Zahl n sind, entstehen mit Euklids Maschine“ durch Induktion nach n streng zu beweisen.

5. Verlust plus Verlust gleich Gewinn: das paradoxe Glücksspiel des Physikers Juan Parrondo

Die Mathematik, besonders die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist reich an überraschenden Phänomenen. Wenn ein Ergebnis in besonders krassem Widerspruch zur allgemeinen Erwartung steht, nennt man so etwas eine Paradoxie. Vor einiger Zeit hat ein Spanier, der Physiker Juan Parrondo, den Zoo solcher Paradoxien um ein neues Exemplar bereichert.

Ausgangspunkt sind zwei Glücksspiele gegen die Spielbank, bei denen der Spieler im Mittel einen leichten Verlust machen wird. Beim ersten zahlt man eine Spielgebühr und gewinnt oder verliert dann mit Wahrscheinlichkeit 0.5 einen Euro. Beim zweiten hängen die Chancen vom bisherigen Spielverlauf ab, es gibt für den Spieler günstige und weniger günstige Spielrunden, die Chancen gleichen sich im Mittel aber aus.

Und nun die Überraschung: Wenn man vor jeder Spielrunde eine Münze wirft, um zu entscheiden, ob die nächste Spielrunde mit dem einen oder anderen Spiel gespielt werden soll, so ergibt sich für den Spieler ein Gewinnspiel. Wenn die Bank mitmacht und man nur lange genug durchhält, kann man beliebig reich werden. Nach Parrondos Entdeckung konnte man an verschiedenen Stellen lesen, dass nun eine mathematische Theorie für sämtliche Situationen zur Verfügung stünde, bei denen aus einem scheinbaren Verlust am Ende ein Gewinn wird. Erfahrungen aus dem Leben hat jeder: Man kann zum Beispiel beim Schach fast alles opfern und am Ende doch noch gewinnen.

So eine Theorie liegt damit natürlich nicht vor. Interessant ist aber, dass es zu mathematischen Ergebnissen, die ihren Weg aus dem Elfenbeinturm bis in die Zeitungen finden, fast immer weitreichende Erwartungen gibt, die sie beim besten Willen nicht erfüllen können. Es war – einige werden sich erinnern – bei den Fraktalen und der Chaostheorie ganz genau so. Trotzdem: Mittlerweile gibt es eine Reihe von interessanten Anwendungen von Parrondos Paradoxie. Bei geeigneter Übersetzung erklärt es zum Beispiel, wie es Mikroorganismen durch Wechseln zwischen chemischen Reaktionen fertig bringen, gegen den Strom zu schwimmen.

Die genauen Spielregeln für Spiel 2

Die Spielregeln für das erste Parrondospiel sind schon beschrieben worden, für das zweite sind sie etwas komplizierter:

E. Behrends, *Fünf Minuten Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-658-00998-4_5, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013