Marianne Nolte (Hrsg.)

Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler

Festschrift aus Anlass des 80. Geburtstages
von
Prof. Dr. Karl Kießwetter

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

SCHRIFTEN ZUR
MATHEMATISCHEN BEGABUNGSFORSCHUNG
Herausgegeben von Friedhelm Käpnick

1

Marianne Nolte (Hrsg.)

WAS MACHT MATHEMATIK AUS?[1]
NACHHALTIGE PARADIGMATISCHE ANSÄTZE FÜR DIE FÖRDERUNG MATHEMATISCH BESONDERS BEGABTER SCHÜLERINNEN UND SCHÜLER

Festschrift aus Anlass des 80. Geburtstages
von
Prof. Dr. Karl Kießwetter

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

[1] (Kießwetter in 2006)

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

Bildnachweise:
Karl Kießwetter (S. 6): Eigentum des Verfassers
Bernard Bolzano (S. 7): Josef Kniehuber (1849), Lithographie nach einem Gemälde von Heinrich Hollpein aus dem Jahre 1839. Foto von Peter Geymayer nach einer Originallithographie der ÖNB (Wien)
Augustin-Louis Cauchy (S. 7): Gregoire et Deneux, Portrait of Augustin Louis *Cauchy*, ca. 1840. Current location: The Dibner Library of the History of Science and Technology.
Karl Weierstraß (S. 8): (c) UB der HU zu Berlin, Porträtsammlung: Karl Weierstraß (Fotograf: Milster, Größe 16x10). Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Porträtsammlung
Pavel S. Ureysohn (S. 12): https://www.geni.com/people/Pavel-Urysohn/6000000000319449146
Carl Menger (S. 12): https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Menger
Srinivasa Ramanujan (S. 40): http://ramanujan.sirinudi.org/

Überarbeitete und ergänzte Neuauflage
ISBN 978-3-95987-130-3

Vorwort

Dieses Buch ist Herrn Prof. Dr. Karl Kießwetter zu seinem 80. Geburtstag gewidmet, dessen besonderer Schwerpunkt in seinem Lebenswerk die Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler ist.

Bereits als Lehrer (von 1954 bis 1965 in NRW) war ihm die Anleitung der Schüler zu produktivem mathematischen Arbeiten wichtig. Nicht allein die Beschäftigung mit mathematischen Ideen, für die der Artikel von Jörn Bruhn ein Beispiel gibt (Kießwetter-Funktion und Kießwetter-Fraktal)[2], faszinierte ihn, sondern die Menschen und ihre Weise mathematisch tätig zu werden. Dabei beobachtete er kognitive Komponenten, aus denen er günstige Handlungsmuster für Problemlöseprozesse zusammenstellte (siehe z. B. Kießwetter 1985). Diese bilden eine entscheidende Grundlage für die Entwicklung von Fördermaterialien und Testaufgaben. Neben den kognitiven Anforderungen an Problemlösesituationen sind ihm auch die dabei ablaufenden emotionalen Prozesse wichtig. Ausdauer und Durchhaltevermögen, das Umgehen mit Misserfolgen, allgemein die Begrenzungen, die wir als Menschen erfahren, wirken auf allen Ebenen auch in mathematische Tätigkeiten ein. Wie unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen Gegenstand und Mensch Arbeitsumgebungen gestaltet werden können, die zu produktivem mathematischem Tätigsein herausfordern, wie Aufgaben gestaltet werden müssen, die Schülerinnen und Schüler anregen, welche Besonderheiten dabei auf den verschiedenen Entwicklungsstufen der Kinder und Jugendlichen zu beachten sind, ist seit vielen Jahren Schwerpunkt seiner Forschungen.

Diese Arbeit bestimmte seine Tätigkeit, der sich im Rahmen der Lehrerausbildung (ab 1965 in Münster, ab 1970 in Bielefeld, ab 1978 in Hamburg) und seit Beginn der 80er Jahre auch in der Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler widmete. Er gründete das „Hamburger Modell", das im Rahmen der William-Stern-Gesellschaft (WSG), deren langjähriger Vorsitzender er ist, mathematisch besonders begabte Schülerinnen und Schüler der Mittel- und Oberstufe fördert (Kießwetter 1988). Auch nach seiner Pensionierung widmet er sich dieser Tätigkeit und bietet alle zwei Wochen samstags Fördergruppen an. Immer wieder werden seine Teilnehmer von der Arbeit so fasziniert, dass sie sich selbst in der Förderung engagieren. Inzwischen ist auf seine Anregung hin die Förderung auch auf

[2] Die Beiträge in diesem Buch sind in alphabetischer Reihenfolge der Autorinnen und Autoren aufgelistet.

den Grundschulbereich ausgeweitet worden. Wichtige Grundlage der Arbeit ist die Entwicklung geeigneter Materialien.

Es gibt sehr viele elementarmathematische Inhalte, aus denen sich ein komplexes Problemfeld entwickeln lässt, in dem Kinder und Jugendliche mathematisch tätig sein können. Karl Kießwetter hat aus solchen Inhalten mit beeindruckender Kreativität Arbeitsmaterial für verschiedene Altersgruppen kreiert. Reiner Lauterbach und Jan Henrik Sylvester geben mit ihrem Artikel „Selbstbezügliche Sätze – Diskrete Dynamik nicht nur für Schüler“ ein Beispiel für ein Arbeitsmaterial, das in der Sekundarstufe I erprobt wurde. In der gleichen Altersgruppe setzte Philipp Sprüssel Fragen zur Graphentheorie „Die Welt in Farben – Graphentheorie für Schüler“ ein.

Aus der langjährigen Beobachtung von Schülerinnen und Schülern beim Problemlösen erwuchsen Ansätze, Materialien so aufzubereiten, dass sie sich in verschiedenen Alterststufen einsetzen lassen. Im Grundschulalter werden dabei Grundlagen gelegt, die in der Mittel- und Oberstufe zu ersten Theoriebildungsprozessen führen können. Marianne Nolte und Kirsten Pamperien gehen in ihrem Artikel auf Fragen zur Konzeption der Förderung im Grundschulalter ein. Siegbert Schmidt zeigt an einem Beispiel die Heranführung von Grundschulkindern an Theoriebildungsprozesse auf. Hartmut Rehlich regt mit seinem Beitrag dazu an, sich auf die Entwicklung einer „Mini-Theorie“ einzulassen. Hohe Motivation der Schülerinnen und Schüler und interessante Lösungsansätze werden anhand verschiedener Beispiele von Anna Lebsack und Joachim Reinhardt ausgeführt. Wie Freude am mathematischen Denken, am Problemlösen anhand eines Schulbuchs geweckt werden kann, greift Bernd Zimmermann auf. Er geht gleichzeitig darauf ein, wie die geschichtliche Entwicklung mathematischer Begriffe einen Zugang zu mathematischen Denkprozessen gewähren kann.

Auch nach vielen Jahren der Erprobung der Materialien entwickeln Kinder und Jugendliche Gedanken, die unerwartet sind. Offen sein für die darin liegende Kreativität, sich darum bemühen, diese Gedanken zu verstehen, ist ein Anliegen von Karl Kießwetter. Diesen Ansatz hat er auch in die Ausbildung der Studierenden sowie Lehrerinnen und Lehrer einfließen lassen. Dass auch etwas „Verbotenes“ mit Schülerinnen und Schülern zu untersuchen, wie die Addition von Bruchzahlen nach der Regel „Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner“, nicht zwingend falsch sein muss, greift Jochen Engel in seinem Artikel auf.

Im Leben von Karl Kießwetter steht immer die Sache im Mittelpunkt. Er forderte von sich einen großen Einsatz für Kinder und Jugendliche und arbeitet immer noch, 15 Jahre nach seiner Pensionierung, ehrenamtlich als

Leiter des Hamburger Modells an der Förderung von mathematisch besonders begabten Schülerinnen und Schülern mit.

Sein Engagement für Mathematik und mathematisches Lernen zeigt sich auch in seinen regelmäßigen Vorträgen für Eltern, Lehrkräfte und mathematisch Interessierte, die er gemeinsam mit der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, deren Ehrenmitglied er ist, anbietet.

Karl Kießwetters Arbeit hat die Förderung mathematisch besonders begabter Kinder und Jugendlicher weit über die Grenzen Hamburgs hinaus entscheidend geprägt.

Er betont immer wieder, wie wichtig jede einzelne Person für das Gelingen der gemeinsamen Arbeit ist. Motiviert durch sein Vorbild wurden viele Menschen dazu angeregt, selbst mathematisch tätig zu werden und die Freude an diesen Prozessen Schülerinnen und Schülern zu vermitteln. Viele seiner heutigen Tutorinnen und Tutoren wurden selbst von ihm gefördert.

Wir danken Herrn Kießwetter für seinen unermüdlichen Einsatz. Insbesondere danken wir ihm für das große Vertrauen, das er durch das Gewähren von Freiräumen gibt. Sein Ansatz der Selbstorganisation sozialer Prozesse bei gleichermaßen kritischer und unterstützender Haltung vermittelt seinen teilweise schon langjährigen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern Sicherheit und Anerkennung.

Marianne Nolte und Kirsten Pamperien

Wir danken auch allen beteiligten Autoren für ihre Beiträge und stellvertretend für unsere Mitarbeiter Pakize Camkiran für ihre Unterstützung bei der Erstellung dieses Buches.

Literatur

Kießwetter, K. (1985). "Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem." Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht **38. Jg., Heft 5**: 300-306.

Kießwetter, K. (1988). "Das Hamburger Modell. Zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern." Berichte aus der Forschung. Universität Hamburg, Fachbereich Erziehungswissenschaften **Heft 2**.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren - und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? - Ein Buch aus der Praxis für die Praxis - H. Bauersfeld und K. Kießwetter. Offenburg, Mildenberger Verlag: 128-153.

Inhalt

Seite

Jörn Bruhn

Kießwetter-Funktionen und Kießwetter-Fraktale

Mathematik ist eine Kunstform, sie ist wunderschön.
David Lynch

Die Kießwetter-Funktion

1966 gab KARL KIEßWETTER *„ein einfaches Beispiel für eine Funktion, welche überall stetig und nicht differenzierbar ist*“.

Er betrachtet zuerst nur x-Werte zwischen 0 und 1: $x \in [0;1]$ und wählt für x eine Darstellung in einem Vierersystem:

$$\mathbf{x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{4^\nu} \quad mit\ x_\nu = \{0, 1, 2, 3\}}$$

Die zugeordneten Funktionswerte sind

$$\mathbf{k(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N_\nu} \cdot U(x_\nu)}{2^\nu}}$$

mit

$$U(x_\nu) = \begin{cases} x_\nu - 2 & \text{für } x_\nu \succ 2 \\ 0 & \text{für } x_\nu = 0 \end{cases}$$

Abb. 1: Karl Kießwetter

N_ν = Anzahl der x_k mit $x_k = 0$ und $k < \nu$.

Erweitert wird dann der Definitionsbereich der Funktion auf alle reellen Zahlen, indem das ausgewählte Intervall immer wieder stetig rechts und links ergänzt wird:

$$K(x) = [x] + k(x - [x]) .$$

Eine Bemerkung von H. BEHNKE, dass es schade sei, dass man das bekannte Weierstraß-Beispiel für eine überall stetige aber nicht differenzierbare Funktion nicht schon am Anfang der Vorlesung bei der Einführung der beiden zentralen Begriffe einbringen könne, veranlasste K. KIEßWETTER, die nach ihm benannte Funktion zu entwickeln. Es war also ursprünglich ein **hochschuldidaktisches** Anliegen. Denn bei dieser Funktion kann man relativ einfach zeigen, dass sie an jeder Stelle stetig, aber nicht differenzierbar ist [1].

Die Kießwetter-Funktion steht einerseits in der mathematischen Tradition der Klärung der Beziehungen zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit und zeigt andererseits, wie sich mathematische Begriffe weiterentwickeln. Das **Weiterdenken mathematischer Fragestellungen,** beispielsweise durch Modifikationen und Variationen des ursprünglichen Problems, gehört wesentlich zu den Ansätzen zur Förderung mathematisch hochbegabter Schülerinnen und Schüler, wie von K. Kießwetter aufgezeigt wurde [2].

Einige Bemerkungen zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Stetigkeit. Der Begriff der Stetigkeit durchzieht die Geschichte der Mathematik. Während in der Scholastik Stetigkeit als „*Nichtunterscheidbarkeit von Grenzstellen verbunden mit der Möglichkeit abzugrenzen*" (zitiert nach Cantor, M. (1892). S. 67) angesehen wurde, erkannte ROGER BACON (1214 – 1294), dass stetige Größen nicht aus diskreten Punkten hergestellt werden könnten. NICOLAUS CUSANUS (1401 – 1464) sieht Linien, Oberflächen und Körper als „*Arten des Seins für das Stetige*", d.h. Stetigkeit und Geometrie gehören also für ihn eng zusammen. Bei CHRISTOPH CLAVIUS (1537 – 1612) findet man erste Ansätze zu einer Grenzwert-betrachtung im Zusammenhang mit der Stetigkeit. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY und BERNARD BOLZANO gaben dann Anfang des 19. Jahrhunderts unabhängig voneinander der Stetigkeit von Funktionen eine exakte Definition: Eine Funktion ist stetig an einer Stelle x, wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments x nur beliebig kleine Änderungen des Funktionswerts nach sich ziehen. Das ε-δ-Kriterium wurde dann von KARL WEIERSTRAß am Ende des 19. Jahrhunderts formuliert und gilt heute noch: *In order that f be continuous at* $x_0 \in E$*, a necessary and sufficient condition is that, for every* $\varepsilon > 0$*, there exist a* $\vartheta > 0$ *such that the relation* $d(x_0,x) < \vartheta$ *emplies* $d'(f(x_0),f(x)) < \varepsilon$ (Dieudonné 1961, S. 43).

Abb. 2: Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Differenzierbarkeit. Die Aufgabenstellung der Differentialrechnung war als Tangentenproblem seit der Antike bekannt. Ein Lösungsansatz war die Approximation der Tangente als Sekante über einem endlichen, aber beliebig kleinen Intervall. Ende des 17. Jahrhunderts gelang es ISAAC NEWTON und GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ unabhängig voneinander, eine systematische Differentialrechnung zu entwickeln. Anfang des 19. Jahrhunderts definierte AUGUSTIN LOUIS CAUCHY die Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen. Die heute allgemein benutzte Formulierung wurde wie die der Stetigkeit von KARL WEIERSTRAß am Ende des 19. Jahrhunderts eingeführt.

Beispiel für eine Funktion, die stetig aber an *einer* Stelle nicht differenzierbar ist. Intuitiv wurde lange Zeit angenommen, dass eine stetige Funktion an jeder Stelle eine Ableitung haben muss. Bei all den Kurven, mit denen man sich schon im Altertum beschäftigte, ist es tatsächlich so. Aber es ist nicht bei jeder Kurve der Fall. Die Funktion

$$y = x \sin(1/x) \text{ mit } f(0) = 0.$$

ist stetig an der Stelle x = 0. Aber das Beispiel zeigt, „*dass der bloße Begriff der Stetigkeit noch allerlei merkwürdige und der naiven Anschauung fremdartige Möglichkeiten offen lässt*“ (Courant, R. 1930 S. 41).

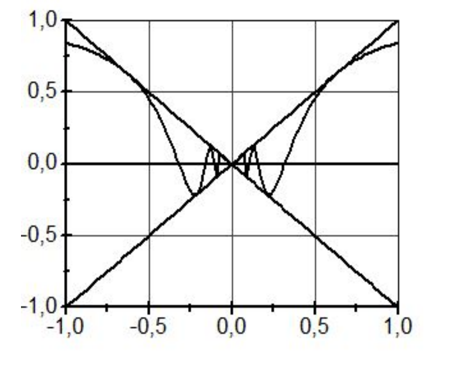


Abb. 3: f(x) = x*sin (1/x)

Um die Steigung dieser Kurve im Punkt P=(0;0) zu ermitteln, lassen wir einen zweiten Punkt P’ auf der Kurve gegen den Punkt P heranrücken. Dabei schwankt die mittlere Steigung unablässig zwischen 1 und -1 hin und her. Sie nähert sich also nicht unbeschränkt einem bestimmten Grenzwert. Es gibt daher in diesem Punkt keine Ableitung.

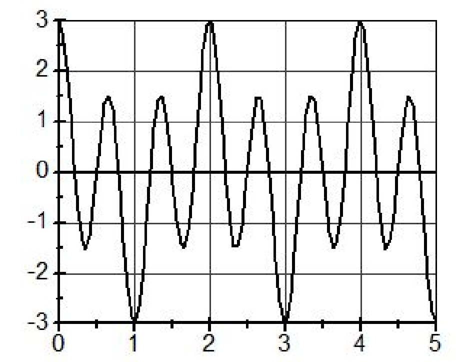
„Monsterfunktionen“, die in *allen* Punkten stetig, aber nicht differenzierbar sind

Es war ein Meilenstein in der Mathematik, als entdeckt wurde, dass es Kurven gibt, die in *allen* Punkten stetig sind, aber in *keinem* Punkte eine Tangente besitzen.


Abb. 4: Karl Weierstraß (1815-1897)

Weierstraß-Funktion. Eine der ersten „Monsterfunktionen“ [3] dieser Art wurde von Karl Weierstraß in einer Arbeit publiziert, die am 18. Juli 1872 bei der Königlichen Akademie der Wissenschaften eingereicht und von P. du Bois-Reymond 1875 in „*Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente*“ veröffentlicht wurde. In Weierstraß’ Originalarbeit [4] wurde die Funktion definiert durch: $\mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos \llbracket (b^\wedge n\, \pi\, x)\ \ mit\ 0 < a < b\ \ und\ b \in \mathbb{N}\ und\ a\, b > 1 + 3/2\, \pi \rrbracket$$



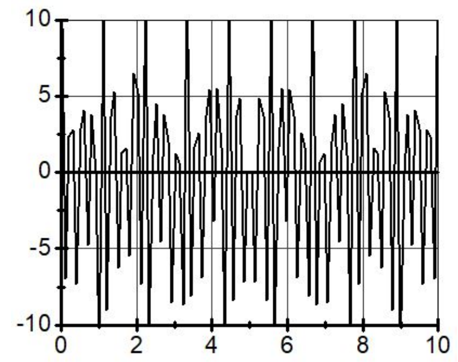


Abb. 5: Weierstraß-Funktion mit a=2 und b=3, 1. Iteration und 3. Iteration

Im Internet findet man bei den Wolfram Demonstrations Projects die aufeinander folgenden Iterationen sehr schön veranschaulicht.

Bolzano-Funktion. BERNARD BOLZANO gab schon in den 1830er Jahren eine „Monsterfunktion“ [5] an, die in seinem Buch „Functionenlehre“ steht, das aber erst 1930 von K. RYCHLIK (s. Bolzano 1969ff) veröffentlicht wurde.

Diese Funktion kann folgendermaßen konstruiert werden (Jarnik, V. (1981)):

Ausgangspunkt ist die Strecke mit

$$f_0(x) = x \quad \text{im Intervall } [0; 1].$$

Nun wird folgende Iteration durchgeführt: Mit jedem Schritt wird der Graph in Drittel geteilt. Die Graphen der beiden äußeren Drittel sind gleich dem Graphen von f_{i-1} horizontal verkürzt auf 1/3 und vertikal verkürzt auf 2/3 und der Graph f_i des mittleren Sektors gleich dem Graphen f_{i-1} horizontal verkürzt auf 1/3 und vertikal gespiegelt [5].

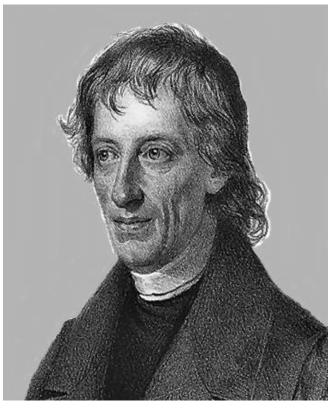
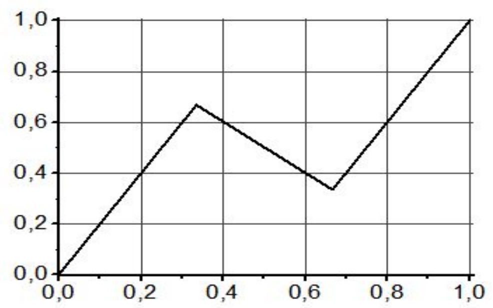


Abb. 6: Bernard Bolzano (1781-1848)



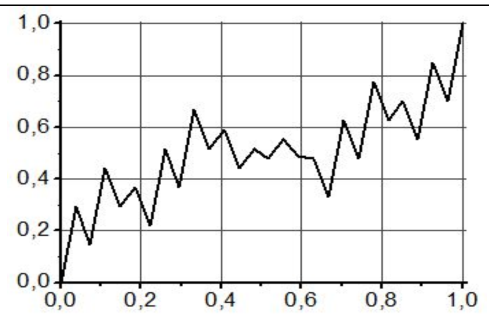


Abb. 7: Bolzano-Funktion. 1. und 3. Iteration

Einige Bemerkungen zu klassischen Kurven, zu Fraktalen und zur Hausdorff-Dimension

Kurven. Die Beschreibung einer Kurve in Euklids „Elemente der Mathematik“ als „breitenlose Länge“ oder als „Ende einer Fläche“ ist als Definition nicht brauchbar, da sie Begriffe enthält, die vorher definiert werden müssten. RENÉ DESCARTES (1596-1650) gab im Rahmen der analytischen Geometrie eine erste exakte Definition, die wir heute etwa in der Form „Eine Kurve ist die Menge aller Punkte, deren Koordinaten eine Gleichung der Form f(x,y) = 0 erfüllen“, angeben können. Mit dieser Definition können wir beispielsweise nicht nur Geraden, sondern auch die Kegelschnitte, also Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel sowie zahlreiche andere Kurven erfassen.

CAMILLE JORDAN (1838-1922) gab dann die lange Zeit allgemein akzeptierte umfassendere Definition „Eine Kurve ist die Menge aller Punkte, deren Koordinaten stetige Funktionen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ eines Parameters t mit $0 \leq t \leq 1$ sind“. Hinter dieser Definition steht die anschauliche Vorstellung, dass Kurven diejenigen geometrischen Gebilde sind, die durch Bewegung eines Punktes erzeugt werden können.

Die Bedingungen der Kurvendefinition nach DESCARTES oder JORDAN erfüllen viele der klassischen Kurven. Das Beispiel von Abb. 8 hat eine besondere Beziehung zu einer sehr frühen mathematischen Arbeit von K. KIEßWETTER: Für die Winkeldreiteilung, die nicht für alle Winkel elementar mit Zirkel und Lineal lösbar ist, wurden zahlreiche spezielle Zirkel entwickelt. K. KIEßWETTER hat nach der Schule (1948), aber vor dem Studienbeginn WS 49/50 – als Flüchtling in einem Dorf und daher ohne Hilfsmittel wie Bücher – einen Spezialzirkel (Abb. 9) nacherfunden. Die Begründung für diesen Zirkel ergibt sich unmittelbar aus der Fußpunkt-Definition der Trisektrix.

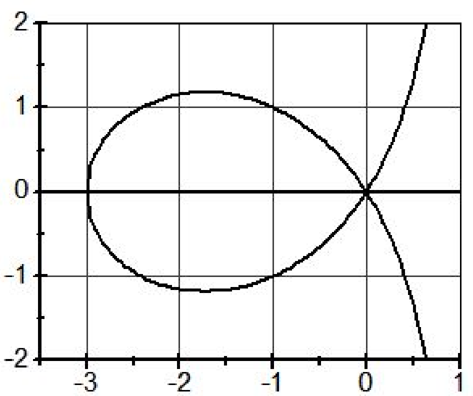


Abb. 8: Trisektrix von MacLaurin (1742)

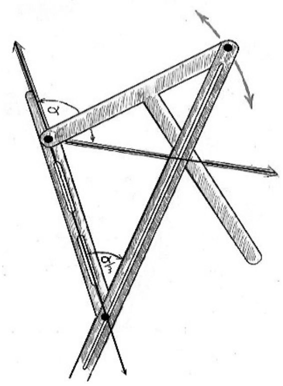


Abb. 9: Kießwetter-Zirkel zur Winkeldreiteilung

Die Kurvendefinition nach JORDAN ist aber einerseits zu eng, denn sie enthält nicht alle Kurven, die man zu den Kurven zählen möchte, und andererseits zu umfassend. Daher bemühte man sich seit den 20er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts, Kurven über den Dimensionsbegriff zu definieren.

Nach P. URYSOHN und K. MENGER gilt: Eine Kurve ist ein eindimensionales Kontinuum, d.h. ein Kontinuum dessen Punkte vollständig in beliebig kleinen Umgebungen liegen, deren Rand kein Kontinuum besitzt, das aus mehr als einem Punkt besteht (Parchomenko, A.S. 1957, S. 82). Diese Definition enthält nur Begriffe, die in der Mathematik genau festgelegt sind, und alle geometrischen Figuren, die man üblicherweise als klassische Kurven bezeichnet, sind es auch nach dieser Definition.

Abb. 10: Pawel S. Urysohn (1898-1924)

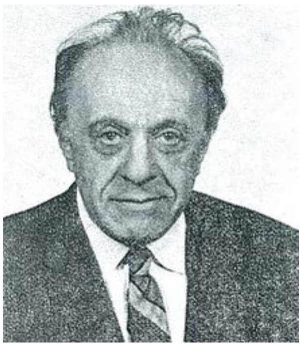
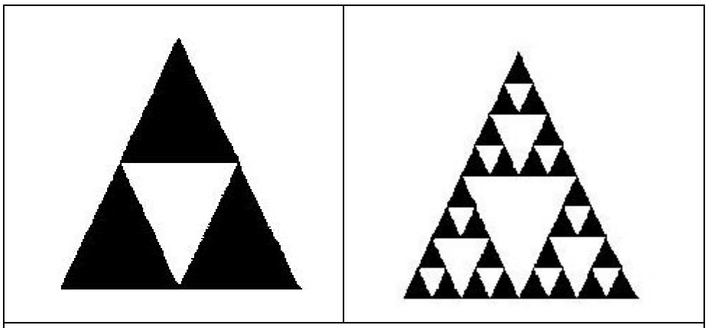


Abb. 11: Karl Menger (1902-1985)



Ab.12: Sierpiński-Dreieck, 1. und 2. Iteration

Fraktale. Dieser Begriff, von BENOIT MANDELBROT (1924-2010) um 1973 eingeführt, erfasst Muster, die einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit aufweisen, d.h. dass das entstehende Muster aus ständig verkleinerten Kopien seiner selbst besteht. Abb. 12 zeigt ein um 1915 konstruiertes Beispiel von WACLAV SIERPIŃSKI (1882-1969).

Hausdorff-Dimension. Geometrische Objekte dieser Art unterscheiden sich in wesentlichen Aspekten von gewöhnlichen glatten Figuren; sie haben in der Regel eine filigrane Struktur. Die Hausdorff-Dimension, eingeführt von FELIX HAUSDORFF (1868-1942) in seinem Aufsatz „*Dimension und äußeres Maß*“ in den Mathematischen Annalen 79 (1919), ist eine Erweiterung des üblichen Dimensionsbegriffs, die auch für Fraktale geeignet ist. Sie lässt auch nichtganzzahlige Dimensionen zu. Für einfache geometrische Gebilde, wie Kurven und Flächen, ist ihr Wert genau so groß wie die übliche Dimension, also 1 für Kurven, 2 für Flächen und 3 für Körper.

Um die Hausdorff-Dimension zu bestimmen, betrachtet man die Anzahl der Kreise oder Kugeln, die man benötigt, um eine vorgegebene Punktmenge zu überdecken. Je kleiner der Radius r ist, desto größer ist die Zahl n der Kreise bzw. Kugeln. Die Hausdorff-Dimension wird dann definiert durch:

$$D = -\lim_{r \to 0} \frac{\log n}{\log r}$$

Die Hausdorff-Dimension des Sierpinski-Dreiecks beträgt

$$\log 3 / \log 2 = 1{,}585\ldots..$$

Fraktale Gebilde besitzen meist eine nichtganzzahlige Dimension. Jede Menge mit nichtganzzahliger Dimension ist ein Fraktal. Die Umkehrung gilt aber nicht: Fraktale können auch ganzzahlige Dimension besitzen [6].

Kießwetter-Fraktal und Verallgemeinerungen

Kießwetter-Funktion. Da in der Welt der Fraktale fast nur iterierte Funktionensysteme verwendet werden, gilt aus dieser Sichtweise: „*Kiess-wetter's function is intriguing in the way it is defined*“ (Li, D. & Miao, J. 2014-2015, S. 142). Wir benutzen daher im Folgenden nach Edgar (1989) aufgrund einer Idee von Barnsley (1988) eine äquivalente Formulierung mit vier affinen Abbildungen:

$$f_1: \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2: \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$f_3: \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_4: \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Wir wenden die vier affinen Abbildungen auf die Funktion f(x) = x des Intervalls [0, 1] an (siehe Abb. 13).

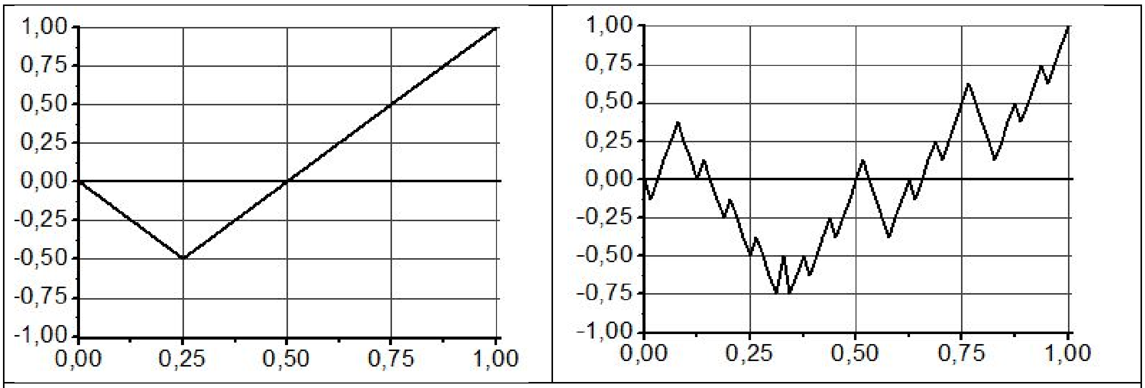


Abb. 13: Kießwetter-Funktion, 1. und 3. Iteration

Der Grenzwert der Iterationen ergibt die Kießwetter-Funktion. Eine genauere Analyse ergibt: Der Graph der Kießwetter-Funktion ist ein Fraktal mit der Hausdorff-Dimension 2 – log 2/log 4 = 1,5, also eine „flächige Kurve“ (Edgar 1989). Im Internet findet man bei den Wolfram Demonstrations Projects die Iterationen nacheinander veranschaulicht.

Modifikationen der Kießwetter-Funktion. Das Bildungsgesetz der vier affinen Abbildungen

$$f_i : \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & (-1)^{k_i} b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{i-1}(1) \\ y_{i-1}(1) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } x_0 = 0 \,,\, y = 0 \quad \text{und } \sum_{\nu=1}^{4} (-1)^{k_\nu} b = 1$$

liefert für $k_1 = 1$ und $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ die “klassische“ Kießwetter-Funktion.

Der Wert -1 für k_i kann aber auch nach k_2 oder nach k_3 oder nach k_4 verschoben werden. So ergeben sich drei Modifikationen der Kießwetter-Funktion (Abb. 14). Diese unterscheiden sich in der Graphik von der klassischen Kießwetter-Funktion dadurch, dass der typische „Knick nach unten“ von dem ersten Iterationsschritt zum 2. bzw. zum 3. oder 4. Iterationsschritt verschoben wird.

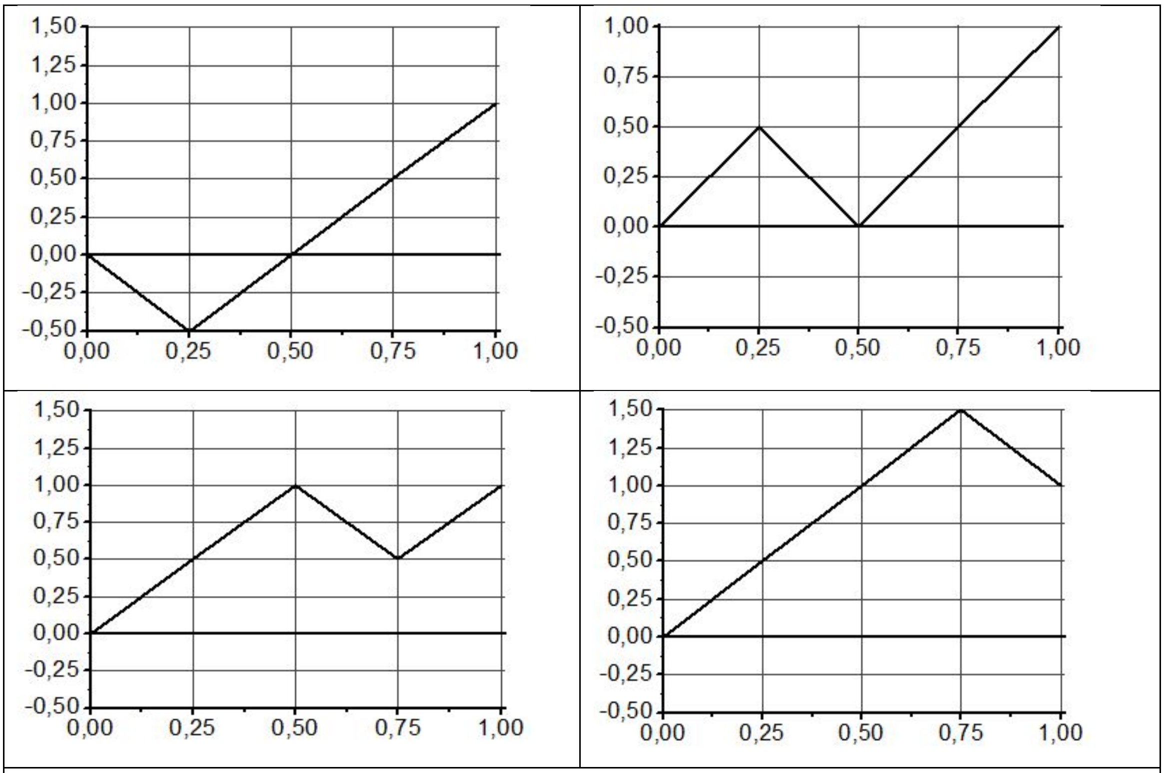


Abb. 14: Kießwetter-Funktion und verschiedene Modifikationen. Dargestellt wird jeweils die erste Iteration als „Graph des Generators“.