N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

THÉORIES SPECTRALES

Chapitres 1 et 2

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1967

ISBN-10 3-540-35330-5 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-35330-0 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

CHAPITRE I*

Algèbres normées

§ 1. — Généralités sur les algèbres

1. Algèbres unifères

Soit K un corps commutatif. On appelle *algèbre unifère* sur K un couple (A, e) où A est une algèbre sur K à élément unité et e l'élément unité de A. Comme e est déterminé de manière unique par A, il nous arrivera de dire, par abus de langage, que A est une algèbre unifère. Si (A, e) et (A', e') sont deux algèbres unifères, on appelle *morphisme unifère* de (A, e) dans (A', e') un morphisme φ de A dans A' tel que $\varphi(e) = e'$. Une sous-algèbre unifère de (A, e) est un couple (A', e), où A' est une sous-algèbre de A contenant e.

On notera souvent 1 l'élément unité.

Soit A une algèbre sur K. Rappelons (*Alg.*, chap. VIII, App., n° 1) qu'on définit sur l'espace vectoriel $\tilde{A} = K \times A$ une structure d'algèbre telle que :

$$(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab).$$

Soit $e = (1, 0)$. Alors $(\tilde{A}, e)$ est une algèbre unifère dite *déduite de* A *par adjonction d'un élément unité*. Si A' est une seconde algèbre sur K, $(\tilde{A}', e')$ l'algèbre unifère déduite de A' par adjonction d'un élément unité, et φ un morphisme de A dans A', il existe un morphisme unifère et un seul de $(\tilde{A}, e)$ dans $(\tilde{A}', e')$ qui prolonge φ.

---

* Les résultats des chap. I et II dépendent des Livres I à VI, et du fascicule de résultats du livre consacré aux *Variétés*.

2. *Spectre d'un élément dans une algèbre unifère*

DÉFINITION 1. — *Soient* A *une algèbre unifère sur* K, *et soit* e *son élément unité. Pour tout* $x \in$ A, *on appelle spectre de* x *relativement à* A *l'ensemble des* $\lambda \in$ K *tels que* $x - \lambda e$ *ne soit pas inversible.*

Ce spectre sera noté $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x$, ou $\mathrm{Sp}\, x$ si aucune confusion n'en résulte.

Remarques. — 1) Si $\mathrm{A} = \{0\}$, on a $\mathrm{Sp}(0) = \varnothing$.

2) Pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$, $\mathrm{Sp}(\lambda e) = \{\lambda\}$ (si $\mathrm{A} \neq \{0\}$).

3) Pour que $x \in \mathrm{A}$ soit inversible, il faut et il suffit que $0 \notin \mathrm{Sp}\, x$.

4) Soient $x \in \mathrm{A}$, et $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$. Si $\lambda \in \mathrm{K}$, il existe un $\mathrm{P}_1 \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(\lambda)e = (x - \lambda e)\mathrm{P}_1(x)$; donc, si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$, on a $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathrm{Sp}\, \mathrm{P}(x)$; autrement dit, $\mathrm{P}(\mathrm{Sp}\, x) \subset \mathrm{Sp}\, \mathrm{P}(x)$. Réciproquement, soit $\mu \in \mathrm{Sp}\, \mathrm{P}(x)$; supposons K *algébriquement clos* et $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$, et soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mu = \alpha(\mathrm{X} - \lambda_1) \ldots (\mathrm{X} - \lambda_n)$ la décomposition de $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mu$ en facteurs du premier degré; on a

$$\mathrm{P}(x) - \mu e = \alpha(x - \lambda_1 e) \ldots (x - \lambda_n e),$$

donc $\lambda_i \in \mathrm{Sp}\, x$ pour un certain i, donc $\mu = \mathrm{P}(\lambda_i) \in \mathrm{P}(\mathrm{Sp}\, x)$. On en conclut que

$$\mathrm{P}(\mathrm{Sp}\, x) = \mathrm{Sp}\, \mathrm{P}(x).$$

Cette égalité reste vraie lorsque P est une constante, à condition que $\mathrm{Sp}\, x \neq \varnothing$.

5) Si $x \in \mathrm{A}$ est nilpotent, on a $(\mathrm{Sp}\, x)^n \subset \{0\}$ pour un certain n d'après la *Remarque* 4, donc $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (si $\mathrm{A} \neq \{0\}$).

6) Supposons K algébriquement clos. Soient $x \in \mathrm{A}$, et $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q} \in \mathrm{K}(\mathrm{X})$, où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Supposons $\mathrm{Q}(x)$ inversible, donc $0 \notin \mathrm{Q}(\mathrm{Sp}\, x)$. Alors, on peut former $\mathrm{R}(x) = \mathrm{P}(x) . \mathrm{Q}(x)^{-1} = \mathrm{Q}(x)^{-1} . \mathrm{P}(x)$. Si R n'est pas une constante, on a

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{R}(x)) = \mathrm{R}(\mathrm{Sp}\, x).$$

En effet, en remplaçant R par $\mathrm{R} - \mu$ (où $\mu \in \mathrm{K}$), il suffit de prouver que

$$\mathrm{R}(x) \text{ inversible} \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{R}(\mathrm{Sp}\, x),$$

c'est-à-dire que

$$\mathrm{P}(x) \text{ inversible} \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{P}(\mathrm{Sp}\, x).$$

Or ceci résulte de la *Remarque* 4 si P n'est pas une constante, et est évident si P est une constante λ, car $\lambda \neq 0$ d'après l'hypothèse faite sur R.

7) Soient A et B deux algèbres unifères sur K, $\varphi : A \to B$ un morphisme unifère, et $x \in A$. Il est clair que $\mathrm{Sp}_B\, \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}_A\, x$.

8) Soient A une algèbre unifère, $\mathfrak{R}$ son radical (*Alg.*, chap. VIII, § 5), φ le morphisme canonique de A sur $B = A/\mathfrak{R}$. Si $x \in A$, on a $\mathrm{Sp}_B \varphi(x) = \mathrm{Sp}_A\, x$. En effet, il suffit de prouver que si $\varphi(x)$ est inversible dans B, x est inversible dans A. Or, si $y \in A$ est tel que $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(e)$, on a $xy \in e + \mathfrak{R}$, $yx \in e + \mathfrak{R}$, donc xy et yx sont inversibles, et par suite x est inversible. En particulier, si $x \in \mathfrak{R}$, on a $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (si $A \neq \{0\}$).

9) Soit (B_i) une famille d'algèbres unifères, avec $B_i = (A_i, e_i)$. Posons $A = \prod_i A_i$, $e = (e_i)$. Alors (A, e) est une algèbre unifère appelée produit des B_i. Si $x = (x_i) \in A$, on a $\mathrm{Sp}_A\, x = \bigcup_i \mathrm{Sp}_{A_i}\, x_i$.

Exemples. — 1) Soit A l'algèbre des fonctions continues complexes sur un espace topologique. Le spectre d'un élément f de A est l'*ensemble des valeurs* de f.

2) Soit A une algèbre unifère de rang fini sur **C**. Pour que $x \in A$ soit inversible, il faut et il suffit que l'application linéaire $y \mapsto xy$ dans A soit de déterminant non nul. Il en résulte que le spectre de x est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique de x. Si A est l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur **C**, le spectre de x est donc l'ensemble des *valeurs propres* de x. Il n'en est pas ainsi quand dim V est infini (exerc. 2).

DÉFINITION 2. — *Soient* A *une algèbre unifère sur* K, *et* $x \in A$. *On pose, pour tout* $\lambda \in K - \mathrm{Sp}\, x$,

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

et la fonction $\lambda \mapsto R(x, \lambda) \in A$ *s'appelle la résolvante de* x.

Pour x fixé, les valeurs de $R(x, \lambda)$ sont deux à deux permutables. Si $\lambda, \mu \in K$, on a :

$$(\lambda e - x) - (\mu e - x) = (\lambda - \mu)e$$

donc, si $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}\, x$,

$$(1) \qquad (\lambda - \mu)\, R(x, \lambda)\, R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Si $x, y \in \mathrm{A}$ et $\lambda \in \mathrm{K}$, on a:

$$(\lambda e - x) - (\lambda e - y) = y - x$$

donc, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, x \cup \mathrm{Sp}\, y$,

$$\mathrm{R}(y, \lambda)(y - x)\mathrm{R}(x, \lambda) = \mathrm{R}(y, \lambda) - \mathrm{R}(x, \lambda). \tag{2}$$

3. Spectre d'un élément dans une algèbre

Soient A une algèbre sur K, et $x \in \mathrm{A}$. On appelle spectre de x relativement à A le spectre de x relativement à l'algèbre unifère $\tilde{\mathrm{A}}$ déduite de A par adjonction d'un élément unité.

Ce spectre sera noté $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$, ou $\mathrm{Sp}'\, x$ si aucune confusion n'en résulte. On a $0 \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$ quel que soit $x \in \mathrm{A}$.

Si φ est un morphisme de A dans une algèbre B, on a $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{B}}\, \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$.

Remarques. — 1) Soit A une algèbre unifère. On peut considérer l'algèbre sous-jacente à A, qu'on notera encore A. Si $x \in \mathrm{A}$, on a:

$$\mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x = \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x \cup \{0\}.$$

En effet, soient ε l'élément unité de A, et e celui de $\tilde{\mathrm{A}}$. On vérifie tout de suite que $(e - \varepsilon) . \mathrm{A} = \mathrm{A} . (e - \varepsilon) = 0$, donc que $\tilde{\mathrm{A}}$ est l'algèbre unifère produit de A et de $\mathrm{K}(e - \varepsilon)$. Notre assertion résulte donc du n° 1, *Remarque* 9.

2) Il résulte de la *Remarque* 1 que, si B est une algèbre sur K et si $x \in \mathrm{B}$, on a:

$$\mathrm{Sp}'_{\mathrm{B}}\, x = \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{B}}}\, x = \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{B}}}\, x \cup \{0\} = \mathrm{Sp}'_{\tilde{\mathrm{B}}}\, x.$$

3) Si x appartient au radical de A, on a $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x = \{0\}$. Ceci résulte du n° 1, *Remarque* 8.

PROPOSITION 1. — *Soient* A *une algèbre, et* $x, y \in \mathrm{A}$. *On a*:

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx).$$

En passant à $\tilde{\mathrm{A}}$, on se ramène au cas où A possède un élément unité e. Il suffit alors de prouver que, si $\lambda \neq 0$ est tel que $xy - \lambda e$ admette un inverse u, $yx - \lambda e$ est inversible. Or:

$$\begin{aligned}(yx - \lambda e)(yux - e) &= y(xyu)x - yx - \lambda yux + \lambda e \\ &= y(\lambda u + e)x - yx - \lambda yux + \lambda e = \lambda e\end{aligned}$$

et de même $(yux - e)(yx - \lambda e) = \lambda e$. Comme $\lambda \neq 0$, on voit que $yx - \lambda e$ est inversible.

Si A est une algèbre unifère et si $x, y \in A$, on peut avoir $\mathrm{Sp}(xy) \neq \mathrm{Sp}(yx)$ (exerc. 3).

4. *Sous-algèbres pleines*

DÉFINITION 3. — *Soit* A *une algèbre unifère. On appelle sous-algèbre pleine de* A *une sous-algèbre unifère* B *telle que tout élément de* B *inversible dans* A *soit inversible dans* B.

Alors, pour tout $x \in B$, on a $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$.

L'intersection d'une famille de sous-algèbres pleines de A est une sous-algèbre pleine de A. Si $M \subset A$, l'intersection B des sous-algèbres pleines de A contenant M est donc la plus petite sous-algèbre pleine de A contenant M; on l'appelle la sous-algèbre pleine de A *engendrée par* M. Le commutant M' de M dans A est une sous-algèbre pleine de A (car, si x est inversible dans A et permutable à M, x^{-1} est permutable à M). Donc le bicommutant M'' de M contient B. Si les éléments de M sont deux à deux permutables, l'algèbre M'' est commutative, donc B est commutative.

Une sous-algèbre commutative maximale de A est une sous-algèbre pleine, car elle est égale à son commutant.

Soient $x \in A$, et B la sous-algèbre pleine de A engendrée par x. Alors B est égale à l'ensemble B_1 des éléments de la forme $P(x)Q(x)^{-1}$, où $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$, $Q(x)$ inversible dans A. En effet, B_1 est une sous-algèbre de A contenant e; si $P(x)Q(x)^{-1}$ est inversible dans A, $P(x)$ est inversible dans A, et l'inverse $P(x)^{-1}Q(x)$ de $P(x)Q(x)^{-1}$ appartient à B_1; donc B_1 est une sous-algèbre pleine, de sorte que $B \subset B_1$. D'autre part, si $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ et si $Q(x)$ est inversible dans A, on a $P(x) \in B$, $Q(x) \in B$, donc $Q(x)^{-1} \in B$ et $P(x)Q(x)^{-1} \in B$; donc $B_1 \subset B$.

5. *Caractères d'une algèbre unifère commutative*

DÉFINITION 4. — *Soit* A *une algèbre unifère commutative. On appelle caractère de* A *un morphisme unifère de* A *dans* K.

L'ensemble des caractères de A sera noté X(A).

Soient A et B deux algèbres unifères commutatives, h un morphisme unifère de A dans B. L'application $\chi \mapsto \chi \circ h$ de X(B) dans X(A) se note X(h). Si k est un morphisme de B dans une algèbre unifère commutative, on a $X(k \circ h) = X(h) \circ X(k)$. Si 1_A désigne l'application identique de A, $X(1_A)$ est l'application identique de X(A).

Si h est surjectif, X(h) est une bijection de X(B) sur l'ensemble des caractères de A qui s'annulent sur le noyau de h.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres unifères commutatives, et A l'algèbre unifère $A_1 \times \ldots \times A_n$. Soit π_i l'application canonique de A sur A_i. Alors $X(\pi_i)$ est une bijection de $X(A_i)$ sur une partie X_i de X(A), à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur $\prod_{j \neq i} A_j$. Il est clair que les X_i sont deux à deux disjoints. D'autre part, soit $\chi \in X(A)$; soit i un indice tel que $\chi(x) \neq 0$ pour un $x \in A_i$; pour tout $j \neq i$ et tout $y \in A_j$, on a

$$\chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = \chi(0) = 0;$$

donc $\chi(A_j) = 0$; ainsi χ s'annule sur $\prod_{j \neq i} A_j$, de sorte que X(A) est réunion des X_i.

Soit B l'algèbre unifère $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. Alors

$$\chi \mapsto (\chi | A_1, \ldots, \chi | A_n)$$

est une application de X(B) dans $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$, et

$$(\chi_1, \ldots, \chi_n) \mapsto \chi_1 \otimes \ldots \otimes \chi_n$$

est une application de $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$ dans X(B). On vérifie aussitôt que les composées de ces applications sont les applications identiques de X(B) et de

$$X(A_1) \times \ldots \times X(A_n).$$

On peut donc identifier X(B) à $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$.

Soit A une algèbre unifère commutative. Soit Y l'ensemble des idéaux de codimension 1 de A. Pour tout $\chi \in X(A)$, on a $\operatorname{Ker} \chi \in Y$. L'application $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ est une bijection de X(A) sur Y. En effet, si $\mathfrak{I} \in Y$, il existe un unique isomorphisme de la K-algèbre unifère $A/\mathfrak{I}$ sur K, et le morphisme composé

$$A \to A/\mathfrak{I} \to K$$

est l'unique caractère de A de noyau $\mathfrak{I}$.

Si $x \in A$ et si $\chi \in X(A)$, on a $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$; en effet, comme $\chi(x - \chi(x)e) = 0$, $x - \chi(x)e$ est non inversible.

Pour tout $x \in \mathrm{A}$, on note $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$, ou simplement $\mathscr{G}x$, la fonction $\chi \mapsto \chi(x)$ sur $\mathrm{X(A)}$ et on l'appelle la *transformée de Gelfand* de x. L'application $\mathscr{G}$ est un morphisme unifère de A dans l'algèbre unifère A_1 des fonctions sur $\mathrm{X(A)}$ à valeurs dans K ; on l'appelle la *transformation de Gelfand*. Soient B une algèbre unifère commutative sur K, B_1 l'algèbre unifère des fonctions sur $\mathrm{X(B)}$ à valeurs dans K, h un morphisme unifère de A dans B; alors, $\mathrm{X}(h) : \mathrm{X(B)} \to \mathrm{X(A)}$ définit un morphisme unifère $h_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{B}_1$, et le diagramme:

(3)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{\mathscr{G}_{\mathrm{A}}} & \mathrm{A}_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ \mathrm{B} & \xrightarrow[\mathscr{G}_{\mathrm{B}}]{} & \mathrm{B}_1 \end{array}$$

est commutatif; en effet, pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout $\chi \in \mathrm{X(B)}$, on a:

(4)
$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{\mathrm{B}}(h(x))(\chi) = \chi(h(x)) = (\mathrm{X}(h)(\chi))(x) &= \mathscr{G}_{\mathrm{A}}(x)(\mathrm{X}(h)(\chi)) \\ &= h_1(\mathscr{G}_{\mathrm{A}}(x))(\chi). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que K soit un corps topologique. On munit alors $\mathrm{X(A)}$ de la topologie de la convergence simple sur A, et l'espace topologique $\mathrm{X(A)}$ s'appelle *l'espace des caractères* de A. La topologie de $\mathrm{X(A)}$ est donc la moins fine pour laquelle les fonctions $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$ pour $x \in \mathrm{A}$ soient continues. Si h est un morphisme unifère de A dans B, $\mathrm{X}(h) : \mathrm{X(B)} \to \mathrm{X(A)}$ est continu. Si h est surjectif, l'image de $\mathrm{X}(h)$, à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur le noyau de h, est fermé dans $\mathrm{X(A)}$; d'autre part, la topologie sur $\mathrm{X}(h)(\mathrm{X(B)})$ déduite de celle de $\mathrm{X(B)}$ par la bijection $\mathrm{X}(h)$ est la topologie de la convergence simple dans A, c'est-à-dire la topologie induite par celle de $\mathrm{X(A)}$; autrement dit, $\mathrm{X}(h)$ est un *homéomorphisme* de $\mathrm{X(B)}$ sur une partie fermée de $\mathrm{X(A)}$. On déduit de là et de ce qu'on a vu plus haut que l'espace $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n)$ s'identifie à l'espace topologique somme de $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1), \ldots, \mathrm{X}(\mathrm{A}_n)$. De même, $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{A}_n)$ s'identifie à l'espace topologique produit $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(\mathrm{A}_n)$.

6. Cas des algèbres sans élément unité

DÉFINITION 5. — *Soit* A *une algèbre commutative. On appelle caractère de* A *un morphisme de* A *dans* K.

L'ensemble des caractères de A sera noté $\mathsf{X}'(\mathrm{A})$. On posera $\mathsf{X}(\mathrm{A}) = \mathsf{X}'(\mathrm{A}) - \{0\}$. Si A possède un élément unité e, $\mathsf{X}(\mathrm{A})$ est l'ensemble des caractères de l'algèbre unifère (A, e). En effet, pour qu'un $\chi \in \mathsf{X}'(\mathrm{A})$ soit non nul, il faut et il suffit que $\chi(e) = 1$.

Si $h : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'algèbres commutatives, on définit comme plus haut une application $\mathsf{X}'(h) : \mathsf{X}'(\mathrm{B}) \to \mathsf{X}'(\mathrm{A})$, qui transforme 0 en 0. On a $\mathsf{X}'(k \circ h) = \mathsf{X}'(h) \circ \mathsf{X}'(k)$. Si h est surjectif, $\mathsf{X}'(h)$ est une bijection de $\mathsf{X}'(\mathrm{B})$ sur l'ensemble des caractères de A nuls sur le noyau de h. Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des algèbres commutatives, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$, et $\pi_i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_i$ le morphisme canonique; alors $\mathsf{X}'(\pi_i)$ est une bijection de $\mathsf{X}'(\mathrm{A}_i)$ sur une partie X'_i de $\mathsf{X}'(\mathrm{A})$, à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur $\prod_{j \neq i} \mathrm{A}_j$; on voit comme au n° 5 que $\mathsf{X}'(\mathrm{A})$ est réunion des X'_i; d'autre part, $\mathsf{X}'_i \cap \mathsf{X}'_j = \{0\}$ pour $i \neq j$; en particulier les $\mathsf{X}'_i - \{0\}$ forment une partition de $\mathsf{X}'(\mathrm{A}) - \{0\} = \mathsf{X}(\mathrm{A})$.

Pour tout $x \in \mathrm{A}$, soit $\mathscr{G}'_{\mathrm{A}}x$, ou simplement $\mathscr{G}'x$, la fonction $\chi \mapsto \chi(x)$ sur $\mathsf{X}'(\mathrm{A})$. L'application $\mathscr{G}'$ est un morphisme de A dans l'algèbre A_1 des fonctions $\mathsf{X}'(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}$ nulles en 0. Soient B une algèbre commutative, B_1 l'algèbre des fonctions $\mathsf{X}'(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}$ nulles en 0, h un morphisme de A dans B; alors $\mathsf{X}'(h)$ définit un morphisme $h_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{B}_1$, et l'on a $h_1 \circ \mathscr{G}'_{\mathrm{A}} = \mathscr{G}'_{\mathrm{B}} \circ h$. On note $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$, ou simplement $\mathscr{G}x$, la restriction de $\mathscr{G}'_{\mathrm{A}}x$ à $\mathsf{X}(\mathrm{A})$, et on l'appelle transformée de Gelfand de x.

Soit $\tilde{\mathrm{A}}$ l'algèbre unifère déduite de A par adjonction d'un élément unité. Tout caractère de $\tilde{\mathrm{A}}$ définit par restriction à A un caractère de A; tout caractère de A se prolonge de manière unique en un caractère de $\tilde{\mathrm{A}}$. D'où une bijection canonique de $\mathsf{X}'(\mathrm{A})$ sur $\mathsf{X}(\tilde{\mathrm{A}})$, par laquelle on identifie ces deux ensembles. Le caractère 0 de A s'identifie ainsi à l'unique caractère de $\tilde{\mathrm{A}}$ de noyau A.

L'application $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ est une bijection de $\mathsf{X}(\mathrm{A})$ sur l'ensemble des idéaux réguliers de codimension 1 de A (*Alg.*, Chap. VIII, App., n° 1); en effet, d'une part $\mathsf{X}(\mathrm{A})$ s'identifie à l'ensemble des caractères de $\tilde{\mathrm{A}}$ non nuls sur A; d'autre part, $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap \mathrm{A}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de $\tilde{\mathrm{A}}$ distincts de A sur l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de A (*Alg.*, Chap. VIII, App., prop. 4); il suffit alors d'appliquer ce qu'on a vu au n° 5.

Si $x \in \mathrm{A}$ et $\chi \in \mathsf{X}'(\mathrm{A})$, on a $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{A}}}\, x$, donc $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$.

Supposons maintenant que K soit un corps topologique. On munit alors $X'(A)$ de la topologie de la convergence simple sur A; la notation $X'(A)$ désignera désormais l'espace topologique ainsi obtenu. Si h est un morphisme de A dans B, $X'(h) : X'(B) \to X'(A)$ est continu. Si h est surjectif, $X'(h)$ est un homéomorphisme de $X'(B)$ sur son image, et cette image est fermée dans $X'(A)$. Soit $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ et employons les mêmes notations que plus haut; $X'(\pi_i)$ est un homéomorphisme de $X'(A_i)$ sur X'_i, X'_i est fermé dans $X'(A)$, donc $X'_i - \{0\}$ est ouvert dans $X'(A)$; les $X'(\pi_i)$ définissent une application continue de l'espace somme S des $X'(A_i)$ sur $X'(A)$, et on vérifie facilement qu'une réunion de voisinages des points $0 \in X'(A_1), \ldots, 0 \in X'(A_n)$ a pour image un voisinage de $0 \in X'(A)$; de tout ceci résulte que $X'(A)$ s'identifie canoniquement à un espace quotient de S. En particulier, l'espace $X(A)$ s'identifie à l'espace somme des $X(A_i)$.

Si $x \in A$, la fonction $\mathscr{G}'_A x$ sur $X'(A)$ est continue.

La bijection canonique de $X'(A)$ sur $X(\tilde{A})$ est un homéomorphisme. Soient B une algèbre unifère sur K, B' l'algèbre sous-jacente; alors l'espace $X(B)$ s'identifie au sous-espace $X(B')$ de $X'(B')$.

7. *Idéaux primitifs*

Soient A une algèbre sur K, E un espace vectoriel sur K. On appelle *représentation* de A dans E un morphisme de A dans $\mathscr{L}(E)$. Deux représentations π_1 et π_2 de A dans des espaces E_1, E_2 sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme de E_1 sur E_2 transformant π_1 en π_2. Une représentation π de A dans E est dite *irréductible* si $E \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables pour $\pi(A)$ sont $\{0\}$ et E. Supposons π irréductible non nulle. Si ξ est un élément non nul de E, $\pi(A)\xi$ est stable pour $\pi(A)$, et non nul (sinon $K\xi = E$, et $\pi(A) = \{0\}$), donc $\pi(A)\xi = E$. Donc l'annulateur $\mathfrak{N}$ de ξ dans A est un idéal à gauche régulier (*Alg.*, Chap. VIII, App., n° 2), et π est équivalente à la représentation définie par le A-pseudo-module $A/\mathfrak{N}$; comme π est irréductible, $\mathfrak{N}$ est un idéal à gauche maximal régulier. Réciproquement, si $\mathfrak{N}'$ est un idéal à gauche maximal régulier de A, la représentation de A définie par le A-pseudo-module $A/\mathfrak{N}'$ est irréductible non nulle.

DÉFINITION 6. — *Soit* A *une algèbre sur* K. *On appelle idéal primitif de* A *le noyau d'une représentation irréductible non nulle de* A.

Si A est commutative, les idéaux primitifs de A sont les idéaux maximaux réguliers de A. En effet, les représentations irréductibles non nulles de A sont, à une équivalence près, les représentations $\pi_{\mathfrak{N}}$ définies par les A-pseudo-modules $A/\mathfrak{N}$ (où $\mathfrak{N}$ est un idéal maximal régulier de A); et, d'après la commutativité de A, le noyau de $\pi_{\mathfrak{N}}$ est $\mathfrak{N}$.

Lemme 1. — *Soit* π *une représentation irréductible de* A *dans un espace vectoriel* E *sur* K.

(i) *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal bilatère de* A. *Si* $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$, $\pi|\mathfrak{J}$ *est irréductible.*

(ii) *Soient* $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ *deux idéaux bilatères de* A *tels que* $\pi(\mathfrak{J}_1) \neq 0$, $\pi(\mathfrak{J}_2) \neq 0$. *Alors* $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.

L'ensemble des éléments de E annulés par $\pi(\mathfrak{J})$ est stable pour $\pi(A)$ et distinct de E, donc égal à 0. Donc, si ξ est un élément non nul de E, on a $\pi(\mathfrak{J})\xi \neq 0$; comme $\pi(\mathfrak{J})\xi$ est stable pour $\pi(A)$, on a $\pi(\mathfrak{J})\xi = E$, ce qui prouve (i). D'autre part, ce qui précède prouve que $\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$, $\pi(\mathfrak{J}_1)\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$, donc $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.

Lemme 2. — *Soient* $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ *deux idéaux bilatères de* A, $\mathfrak{J}$ *un idéal primitif de* A. *Si* $\mathfrak{J}$ *contient* $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ (*en particulier, si* $\mathfrak{J}$ *contient* $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$), $\mathfrak{J}$ *contient* $\mathfrak{J}_1$ *ou* $\mathfrak{J}_2$.

Soit π une représentation irréductible de noyau $\mathfrak{J}$. Si $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_2$, le lemme 1 (ii) prouve que $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$, d'où $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$.

Lemme 3. — *Supposons que* A *admette un élément unité. Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal bilatère maximal de* A. *Alors* $\mathfrak{J}$ *est un idéal primitif.*

Il existe un idéal à gauche maximal $\mathfrak{M}$ de A contenant $\mathfrak{J}$. Soit π la représentation canonique de A dans $A/\mathfrak{M}$, qui est irréductible non nulle. Comme $\mathfrak{J}A \subset \mathfrak{M}$, le noyau $\mathfrak{J}'$ de π contient $\mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}$ est primitif.

Soit J(A) l'ensemble des idéaux primitifs de A. Pour toute partie M de A, nous noterons V(M) l'ensemble des idéaux primitifs de A contenant M; il est clair que, si $\mathfrak{J}$ est l'idéal bilatère de A engendré par M, on a $V(M) = V(\mathfrak{J})$; si M est réduit à un seul élément x, on écrira $V(x)$ au lieu de $V(\{x\})$. L'application

$M \mapsto V(M)$ est décroissante pour les relations d'inclusion. On a :

(5) $$V(0) = J(A) \qquad V(1) = \varnothing$$

(6) $$V\Big(\bigcup_{i\in I} M_i\Big) = V\Big(\sum_{i\in I} M_i\Big) = \bigcap_{i\in I} V(M_i)$$

pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de parties de A. D'autre part, d'après le lemme 2,

(7) $$V(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) = V(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2) = V(\mathfrak{I}_1) \cup V(\mathfrak{I}_2)$$

pour tout couple d'idéaux bilatères $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ de A. Les formules (5) à (7) montrent que les parties V(M) de J(A) sont les parties fermées pour une certaine topologie sur J(A). Cette topologie s'appelle la *topologie de Jacobson* sur J(A).

Soient T une partie de J(A), et $\mathfrak{k}(T)$ l'intersection des éléments de T, de sorte que $\mathfrak{k}(T)$ est un idéal bilatère de A. Alors l'adhérence de T dans J(A) est la plus petite partie fermée de J(A) contenant T, c'est-à-dire $V(\mathfrak{k}(T))$.

PROPOSITION 2. — *Soient* $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ *deux points distincts de* J(A). *Alors l'un de ces deux points est non adhérent à l'autre.*

En effet, on a par exemple $\mathfrak{I}_1 \not\subset \mathfrak{I}_2$. L'ensemble des $\mathfrak{I} \in J(A)$ tels que $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}$ est une partie fermée T de J(A) telle que $\mathfrak{I}_1 \in T$, $\mathfrak{I}_2 \notin T$.

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathfrak{I} \in J(A)$. *Pour que* $\{\mathfrak{I}\}$ *soit fermé dans* J(A), *il faut et il suffit que* $\mathfrak{I}$ *soit un idéal primitif maximal.*

En effet, l'adhérence de $\{\mathfrak{I}\}$ se compose des idéaux primitifs de A contenant $\mathfrak{I}$.

Soit $\hat{A}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles non nulles de $\hat{A}$. Si, à toute $\pi \in \hat{A}$, on fait correspondre son noyau, on obtient une application surjective $\hat{A} \to J(A)$. On munit $\hat{A}$ de la topologie image réciproque de celle de J(A) pour l'application $\hat{A} \to J(A)$.

PROPOSITION 4. — *Si* A *possède un élément unité*, J(A) *et* $\hat{A}$ *sont quasi-compacts.*

Il suffit de faire la démonstration pour J(A). Soit (T_j) une famille de parties fermées de J(A), d'intersection vide. Si $\sum_j \mathfrak{k}(T_j) \neq A$,

$\sum_j \mathfrak{k}(T_j)$ est contenu dans un idéal bilatère maximal $\mathfrak{I}$, et $\mathfrak{I}$ est primitif (lemme 3); or $\mathfrak{I} \in T_j$ pour tout j puisque T_j est fermée, d'où absurdité. Donc $\sum_j \mathfrak{k}(T_j) = A$. Donc $1 = x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_1 \in \mathfrak{k}(T_{j_1}), \ldots, x_n \in \mathfrak{k}(T_{j_n})$. Ceci entraîne $\mathfrak{k}(T_{j_1}) + \ldots + \mathfrak{k}(T_{j_n}) = A$, d'où $T_{j_1} \cap \ldots \cap T_{j_n} = \varnothing$.

Supposons A *commutative* unifère. La topologie de Jacobson sur J(A) est la topologie induite sur J(A) par la topologie de Zariski du spectre premier de A (*Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, déf. 4).

Supposons A commutative et K topologique. L'isomorphisme canonique de K sur $\mathscr{L}$(K) permet d'identifier un élément de X(A) à une représentation de A dans l'espace vectoriel K. D'où une application de X(A) dans Â, qui est évidemment injective. On peut donc identifier X(A) à une partie de Â.

PROPOSITION 5. — *La topologie induite sur* X(A) *par celle de* Â *est moins fine que celle de* X(A).

En effet, soit T une partie fermée de Â. Alors T est l'ensemble des $\pi \in \hat{A}$ dont le noyau contient une partie M de A. Donc $T \cap X(A)$ est l'ensemble des $\chi \in X(A)$ qui s'annulent sur M, c'est-à-dire une partie fermée de X(A). D'où la proposition.

En général, X(A) n'est pas un sous-espace de Â (cf. § 7, exerc. 6c).

§ 2. — Algèbres normées

1. Généralités

DÉFINITION 1. — *On appelle algèbre normée complexe une algèbre* A *sur* **C** *munie d'une norme* $x \mapsto \|x\|$ *telle que :*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\| \tag{1}$$

quels que soient $x, y \in A$. *Si* A *est complète, on dit que* A *est une algèbre de Banach.*

Cette définition diffère légèrement de celle de *Top. gén.*, chap. IX, 2ᵉ éd., § 3, n° 7, où l'on exigeait seulement que la norme vérifie la condition $\|xy\| \leqslant a\|x\|\,\|y\|$ (a étant une constante

$\geqslant 0$). Toutefois, on a vu (*loc. cit.*) qu'il existe alors une norme équivalente vérifiant (1). Dans tout ce chapitre, nous nous conformerons à la déf. 1. Nous sous-entendrons le mot complexe, le corps de base étant désormais toujours $\mathbf{C}$ sauf mention du contraire.

Soit A une algèbre normée. Toute sous-algèbre de A, munie de la norme induite, est une algèbre normée. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal bilatère fermé de A, l'algèbre $A/\mathfrak{m}$, munie de la norme:

$$\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| \qquad (\dot{x} \in A/\mathfrak{m})$$

est une algèbre normée. L'algèbre opposée à A, munie de la même norme, est une algèbre normée. L'algèbre complétée de A est une algèbre normée. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des algèbres normées, l'algèbre $A_1 \times \ldots \times A_n$, munie de la norme:

$$\|(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$$

est une algèbre normée.

Soit (y_λ) un famille d'éléments de A; la plus petite sous-algèbre fermée B de A contenant les y_λ s'appelle la sous-algèbre fermée de A engendrée par les y_λ; si $B = A$, on dit que les y_λ *engendrent topologiquement* l'algèbre normée A, ou que (y_λ) est un *système générateur topologique* de l'algèbre normée A.

Soit A une algèbre normée. Sur $\tilde{A}$, définissons une norme en posant $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$. On a

$$\begin{aligned} \|(\lambda, x)(\mu, y)\| &= |\lambda\mu| + \|xy + \mu x + \lambda y\| \\ &\leqslant |\lambda| \,.\, |\mu| + \|x\| \,.\, \|y\| + |\mu| \,.\, \|x\| + |\lambda| \,.\, \|y\| \\ &= \|(\lambda, x)\| \,.\, \|(\mu, y)\|. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{A}$ devient une algèbre normée, appelée *algèbre unifère normée déduite de* A *par adjonction d'un élément unité.*

Soit A une algèbre normée. Pour $x \in A$, soient L_x, R_x les applications $y \mapsto xy$, $y \mapsto yx$ de A dans A. Alors $x \mapsto L_x$ (resp. $x \mapsto R_x$) est un morphisme de A (resp. de l'algèbre opposée) dans $\mathscr{L}(A)$ tel que:

$$\|L_x\| \leqslant \|x\| \qquad \|R_x\| \leqslant \|x\|. \tag{2}$$

Si A possède un élément unité e, on a $x = L_x e = R_x e$, donc:

$$\|x\| \leqslant \|L_x\| \,.\, \|e\| \qquad \|x\| \leqslant \|R_x\| \,.\, \|e\|. \tag{3}$$

Alors, $x \mapsto \|L_x\|$ et $x \mapsto \|R_x\|$ sont des normes équivalentes à $x \mapsto \|x\|$, qui vérifient encore (1). Si en outre $A \neq \{0\}$ (autrement dit, $e \neq 0$), (2) et (3) prouvent que $\|e\| \geqslant 1$; on a évidemment $\|L_e\| = \|R_e\| = 1$.

2. *Exemples*

1) Soient Ω un espace localement compact, A l'algèbre des fonctions complexes continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini, munie de la norme

$$\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Alors A est une algèbre de Banach commutative.

2) Soit A l'algèbre des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbf{C}$ admettant des dérivées continues dans $[0, 1]$ justqu'à l'ordre n, munie de la norme

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(k)}(t)|.$$

Si $f, g \in A$, on a :

$$\|fg\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup |(fg)^{(k)}(t)| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup \left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f^{(s)}(t) g^{(k-s)}(t) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(k-s)!} (\sup |f^{(s)}(t)|) . (\sup |g^{(k-s)}(t)|) = \|f\| \, \|g\|,$$

donc A est une algèbre de Banach unifère commutative.

3) Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar. Alors $L^1(G)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, n° 5, prop. 12). Si G est commutatif, cette algèbre de Banach est commutative.

4) Prenons $G = \mathbf{Z}$ dans l'exemple 3. Alors $L^1(G)$ est l'algèbre de Banach des suites $(c_n)_{-\infty < n < \infty}$ telles que $\sum_n |c_n| < +\infty$, pour le produit $(c_n) * (c'_n) = (d_n)$, où $d_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p c'_{n-p}$, et la norme $\|(c_n)\| = \sum |c_n|$. Cette algèbre admet pour élément unité la suite (e_n) telle que $e_n = 0$ pour $n \neq 0$ et $e_0 = 1$. Si $x = (c_n)$, soit $\varphi(x)$ la fonction continue sur $\mathbf{U}$ dont la valeur en e^{it} est $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$. On vérifie facilement que φ est un morphisme de $L^1(G)$ sur une