N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Chapitres 1 à 5

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1981

ISBN-10 3-540-34497-7 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-34497-1 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

Mode d'emploi de ce traité

NOUVELLE ÉDITION

1. Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université.

2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'au cours de chapitres ultérieurs, à moins qu'il ne possède déjà des connaissances assez étendues.

3. Le traité est divisé en Livres et chaque Livre en chapitres. Les Livres actuellement publiés, en totalité ou en partie, sont les suivants :

Théorie des Ensembles	désigné par	E
Algèbre	—	A
Topologie générale	—	TG
Fonctions d'une variable réelle	—	FVR
Espaces vectoriels topologiques	—	EVT
Intégration	—	INT
Algèbre commutative	—	AC
Variétés différentielles et analytiques	—	VAR
Groupes et algèbres de Lie	—	LIE
Théories spectrales	—	TS

Dans les *six premiers* Livres (pour l'ordre indiqué ci-dessus), chaque énoncé ne fait appel qu'aux définitions et résultats exposés précédemment dans le chapitre en cours ou dans les chapitres *antérieurs dans l'ordre suivant* : E ; A, chapitres I à III ; TG, chapitres I à III ; A, chapitres IV et suivants ; TG, chapitres IV et suivants ; FVR ; EVT ; INT. A partir du septième Livre, le lecteur trouvera éventuellement, au début de chaque Livre ou chapitre, l'indication précise des autres Livres ou chapitres utilisés (les six premiers Livres étant toujours supposés connus).

4. Cependant, quelques passages font exception aux règles précédentes. Ils sont placés entre deux astérisques : $*$ ... $_*$. Dans certains cas, il s'agit seulement de faciliter la compréhension du texte par des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs. Parfois aussi, on utilise, non seulement les résultats supposés connus dans tout le chapitre en cours, mais des résultats démontrés ailleurs dans le traité. Ces passages seront employés librement dans les parties qui supposent connus les chapitres où ces passages sont insérés et les chapitres auxquels ces passages font appel. Le lecteur pourra, nous l'espérons, vérifier l'absence de tout cercle vicieux.

5. A certains Livres (soit publiés, soit en préparation) sont annexés des *fascicules de résultats*. Ces fascicules contiennent l'essentiel des définitions et des résultats du Livre, mais aucune démonstration.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre ; c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques », etc. ; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

Pour éviter des répétitions fastidieuses, on convient parfois d'introduire certaines notations ou certaines abréviations qui ne sont valables qu'à l'intérieur d'un seul chapitre ou d'un seul paragraphe (par exemple, dans un chapitre où tous les anneaux considérés sont commutatifs, on peut convenir que le mot « anneau » signifie toujours « anneau commutatif »). De telles conventions sont explicitement mentionnées à la tête du chapitre ou du paragraphe dans lequel elles s'appliquent.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe Z (« tournant dangereux »).

8. Les exercices sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte ; d'autre part à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte ; les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.*

10. On a cherché à utiliser, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage ou de notation*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage.

11. Le texte étant consacré à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques ; celles-ci sont groupées dans des *Notes historiques*. La bibliographie qui suit chacune de ces Notes ne comporte le plus souvent que les livres et mémoires originaux qui ont eu le plus d'importance dans l'évolution de la théorie considérée ; elle ne vise nullement à être complète.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile en général d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Dans la nouvelle édition, les renvois à des théorèmes, axiomes, définitions, remarques, etc. sont donnés en principe en indiquant successivement le Livre (par l'abréviation qui lui correspond dans la liste donnée au n° 3), le chapitre et la page où ils se trouvent. A l'intérieur d'un même Livre la mention de ce Livre est supprimée ; par exemple, dans le Livre d'Algèbre,

E, III, p. 32, cor. 3

renvoie au corollaire 3 se trouvant au Livre de Théorie des Ensembles, chapitre III, page 32 de ce chapitre ;

II, p. 24, prop. 17

renvoie à la proposition 17 du Livre d'Algèbre, chapitre II, page 24 de ce chapitre.

Les fascicules de résultats sont désignés par la lettre R ; par exemple : EVT, R signifie « fascicule de résultats du Livre sur les Espaces vectoriels topologiques ».

Comme certains Livres doivent seulement être publiés plus tard dans la nouvelle édition, les renvois à ces Livres se font en indiquant successivement le Livre, le chapitre, le paragraphe et le numéro où se trouve le résultat en question ; par exemple :

AC, III, § 4, n° 5, cor. de la prop. 6.

Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué

§ 1. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

1. Définition d'un espace vectoriel topologique

DÉFINITION 1. — *Étant donné un corps topologique* K (TG, III, p. 54), *on appelle espace vectoriel topologique à gauche sur* K *un ensemble* E, *muni* :

1° *d'une structure d'espace vectoriel à gauche sur* K ;

2° *d'une topologie compatible avec la structure de groupe additif de* E (TG, III, p. 1), *et satisfaisant en outre à l'axiome suivant* :

(EVT) *l'application* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *de* K $\times$ E *dans* E *est continue.*

Il revient au même de dire que E est un K-*module topologique à gauche* (TG, III, p. 52).

Une structure d'espace vectoriel à gauche par rapport à K et une topologie étant données sur un ensemble E, on dira qu'elles sont *compatibles* si la topologie et la structure de groupe additif de E sont compatibles, et si en outre l'axiome (EVT) est vérifié. Il revient au même de dire que les deux applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de E $\times$ E et de K $\times$ E respectivement dans E sont continues, car cela entraîne la continuité de l'application $x \mapsto -x = (-1)x$, donc le fait que la topologie de E est compatible avec sa structure de groupe additif.

Si E est un espace vectoriel topologique à gauche sur K, on dit que E, muni seulement de sa structure d'espace vectoriel, est *sous-jacent* à l'espace vectoriel topologique E.

Exemples. — 1) Si E est un espace vectoriel à gauche sur un corps topologique *discret* K, la topologie *discrète* sur E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E (il n'en est pas de même si K est non discret et E non réduit à 0).

2) Soit A un anneau topologique (TG, III, p. 48) et soit K un sous-anneau de A qui est un corps, et tel que la topologie induite sur K par celle de A soit compatible avec la structure de corps de K ; alors la topologie de A est compatible avec sa structure d'espace vectoriel à gauche sur K.

3) Soient K un corps topologique quelconque, I un ensemble quelconque. Sur l'espace vectoriel produit K_s^I (A, II, p. 10), la topologie produit est compatible avec la structure d'espace vectoriel (TG, III, p. 53). On peut encore dire que l'espace K_s^I des applications de I dans K, muni de la topologie de la *convergence simple*, est un espace vectoriel topologique sur K (TG, X, p. 4).

4) Soit X un espace topologique ; sur l'ensemble $E = \mathscr{C}(X ; \mathbf{R})$ des fonctions numériques finies *continues* dans X, la topologie de la *convergence compacte* (TG, X, p. 4) est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E sur **R**. En effet, soient u_0 un point de E, H une partie compacte de X, ε un nombre > 0 arbitraire. La fonction numérique u_0 est bornée dans H ; soit $a = \sup_{t \in H} |u_0(t)|$; si u est un point quelconque de E, on peut écrire, pour tout $t \in H$,

$$|\lambda u(t) - \lambda_0 u_0(t)| \leqslant |\lambda| . |u(t) - u_0(t)| + a\,|\lambda - \lambda_0| .$$

Par suite, si $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$ et si $|u(t) - u_0(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in H$, on aura, pour $t \in H$, $|\lambda u(t) - \lambda_0 u_0(t)| \leqslant \varepsilon(\varepsilon + |\lambda_0| + a)$, ce qui montre que l'axiome (EVT) est vérifié ; on vérifie de même que la topologie de la convergence compacte est compatible avec la structure de groupe additif de E.

Par contre, si X n'est pas compact, la topologie de la *convergence uniforme* (dans X) n'est pas nécessairement compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; par exemple si $X = \mathbf{R}$, et si u_0 est une fonction continue non bornée dans **R**, l'application $\lambda \mapsto \lambda u_0$ de **R** dans E n'est pas continue quand on munit E de la topologie de la convergence uniforme.

5) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps topologique K ; il existe donc un isomorphisme $u : K_s^n \to E$ de K-espaces vectoriels, et en outre, si v est un second isomorphisme de K_s^n sur E, on peut écrire $v = u \circ f$, où f est un automorphisme du K-espace vectoriel K_s^n. Considérons alors sur K_s^n la topologie *produit*, qui est compatible avec sa structure d'espace vectoriel (*Exemple* 3) ; comme toute application linéaire de K_s^n dans lui-même est continue pour cette topologie, tout automorphisme de l'espace vectoriel K_s^n est *bicontinu*. Par suite, si l'on *transporte* à E la topologie produit de K_s^n au moyen d'un isomorphisme quelconque de K_s^n sur E, la topologie obtenue sur E est *indépendante* de l'isomorphisme considéré ; on dit que c'est la *topologie canonique* sur E ; nous la caractériserons autrement (I, p. 14) lorsque K est un corps valué complet non discret. Toute application linéaire de E dans un espace vectoriel topologique sur K est *continue* pour la topologie canonique sur E.

De la même manière que dans la déf. 1, on définit un espace vectoriel topologique *à droite* sur un corps topologique K ; mais tout espace vectoriel à droite sur K peut être considéré comme espace vectoriel à gauche sur le corps opposé K^0 de K (A, II, p. 2), et la topologie de K est compatible avec la structure de corps de K^0. Pour cette raison, nous ne considérerons en principe que des espaces vectoriels topologiques à gauche ; quand nous parlerons d'« espace vectoriel topologique » sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit d'un espace vectoriel à gauche.

Si K' est un sous-corps de K, et E un espace vectoriel topologique sur K, il est clair que la topologie de E est encore compatible avec la structure d'espace vectoriel de E par rapport à K', obtenue par restriction à K' du corps des scalaires ; on dit que l'espace vectoriel topologique sur K' ainsi obtenu est *sous-jacent* à l'espace vectoriel topologique E sur K.

Pour qu'un espace vectoriel topologique E soit *séparé*, il faut et il suffit que, pour tout point $x \neq 0$ de E, il existe un voisinage de 0 ne contenant pas x (TG, III, p. 5).

Considérons, sur un espace vectoriel E par rapport à un corps topologique K, une topologie compatible avec la structure de groupe additif de E. En vertu de l'identité

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)\, x_0 + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)\,(x - x_0)$$

l'axiome (EVT) est équivalent au système des trois axiomes suivants :

(EVT$'_{\mathrm{I}}$) *Quel que soit* $x_0 \in \mathrm{E}$, *l'application* $\lambda \mapsto \lambda x_0$ *est continue au point* $\lambda = 0$.

(EVT$'_{\mathrm{II}}$) *Quel que soit* $\lambda_0 \in \mathrm{K}$, *l'application* $x \mapsto \lambda_0 x$ *est continue au point* $x = 0$.

(EVT$'_{\mathrm{III}}$) *L'application* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *est continue au point* $(0, 0)$.

En particulier :

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{K}$ *et tout point* $b \in \mathrm{E}$, *l'application* $x \mapsto \alpha x + b$ *de* E *dans lui-même est continue. En outre, si* $\alpha \neq 0$, *cette application est un homéomorphisme de* E *sur lui-même.*

La seconde partie de la proposition résulte du fait que, si $\alpha \neq 0$, $x \mapsto \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}b$ est l'application réciproque de $x \mapsto \alpha x + b$.

COROLLAIRE. — *Si* A *est un ensemble ouvert* (resp. *fermé*) *dans* E, αA *est ouvert* (resp. *fermé*) *dans* E *pour tout* $\alpha \neq 0$ *dans* K.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur un même corps topologique K. Pour qu'une application bijective f de E sur F soit un *isomorphisme* de l'espace vectoriel topologique E sur l'espace vectoriel topologique F, il faut et il suffit que f soit *linéaire* et *bicontinue*. En particulier, si $\gamma \neq 0$ appartient au *centre* de K, l'homothétie $x \mapsto \gamma x$ est un *automorphisme* de la structure d'espace vectoriel topologique de E.

2. Espaces normés sur un corps valué

Rappelons (TG, IX, p. 28) qu'une *valeur absolue* sur un corps K est une application $\xi \mapsto |\xi|$ de K dans $\mathbf{R}_+$, telle que $|\xi| = 0$ soit équivalent à $\xi = 0$, et qu'on ait $|\xi\eta| = |\xi| . |\eta|$, et $|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$; une valeur absolue définit sur K une distance $|\xi - \eta|$, et par suite une topologie séparée, compatible avec la structure de corps de K. Si $|\xi| = 1$ pour tout $\xi \neq 0$, la valeur absolue est dite *impropre*, et la topologie qu'elle définit sur K est la topologie *discrète* ; si, au contraire, il existe $\alpha \neq 0$ dans K tel que $|\alpha| \neq 1$, il existe $\beta \neq 0$ dans K tel que $|\beta| < 1$ (il suffit de prendre $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha^{-1}$), et la suite $(\beta^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0, donc la topologie de K n'est pas discrète.

Rappelons d'autre part (TG, IX, p. 31) que si E est un espace vectoriel sur un corps valué *non discret* K, une *norme* sur E est une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbf{R}_+$, telle que la relation $\|x\| = 0$ soit équivalente à $x = 0$, et qu'on ait $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathrm{K}$, et $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Une norme définit sur E une distance $\|x - y\|$, et par suite une topologie, qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E (*loc. cit.*). *Sauf mention expresse du contraire*, on considérera qu'un espace normé est muni de la structure d'espace vectoriel topologique définie par sa norme. Les espaces normés sont parmi les plus importants des espaces vectoriels topologiques.

On sait (TG, IX, p. 32) que deux normes distinctes sur E peuvent définir la même topologie sur E ; il faut et il suffit pour cela que les deux normes soient *équivalentes* (*loc. cit.*). Une structure d'espace normé est donc plus riche qu'une structure d'espace vectoriel topologique ; si E et F sont deux espaces normés, on aura soin de distinguer entre la notion d'isomorphisme de la structure d'espace normé de E sur celle de F, et la notion d'isomorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E sur celle de F.

Exemple. — Soit I un ensemble d'indices quelconque ; on sait (TG, X, p. 21) que sur l'ensemble $\mathscr{B}(\mathrm{I}\,;\mathrm{K})$ des applications bornées $x = (\xi_\iota)$ de I dans K (qu'on note aussi $\mathscr{B}_{\mathrm{K}}(\mathrm{I})$ ou $\ell^{\infty}_{\mathrm{K}}(\mathrm{I})$), on définit une norme $\|x\| = \sup\limits_{\iota \in \mathrm{I}} |\xi_\iota|$. Lorsque I est un espace topologique, l'ensemble des applications bornées et continues de I dans K est un sous-espace fermé de l'espace $\mathscr{B}(\mathrm{I}\,;\mathrm{K})$ (TG, X, p. 21, cor. 2). Un autre sous-espace de $\mathscr{B}(\mathrm{I}\,;\mathrm{K})$ est l'ensemble $\ell^1_{\mathrm{K}}(\mathrm{I})$ des familles $x = (\xi_\iota)$ *absolument sommables* (TG, IX, p. 36) ; on peut définir sur ce sous-espace une autre norme $\|x\|_1 = \sum\limits_{\iota \in \mathrm{I}} |\xi_\iota|$, qui en général n'est pas équivalente à la norme $\|x\| = \sup\limits_{\iota \in \mathrm{I}} |\xi_\iota|$ (I, p. 23, exerc. 6) ; quand on considère $\ell^1_{\mathrm{K}}(\mathrm{I})$ comme un espace normé, sans préciser sa norme, c'est toujours de la norme $\|x\|_1$ qu'il s'agit. On écrira $\mathscr{B}(\mathrm{I})$ et $\ell^1(\mathrm{I})$ au lieu de $\mathscr{B}(\mathrm{I}\,;\mathbf{R})$ et $\ell^1_{\mathbf{R}}(\mathrm{I})$.

3. Sous-espaces vectoriels et espaces quotients d'un espace vectoriel topologique ; produits d'espaces vectoriels topologiques ; somme directe topologique de sous-espaces

Tout ce qui a été dit pour les modules topologiques (TG, III, p. 45-48 et 52-54) s'applique en particulier aux espaces vectoriels topologiques. Si M est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique E, la topologie induite sur M par celle de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de M, et l'adhérence $\overline{\mathrm{M}}$ de M dans E est un sous-espace vectoriel de E. La topologie quotient de celle de E par M est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E/M.

Si E est un espace vectoriel topologique *non nécessairement séparé*, l'adhérence N de $\{0\}$ dans E (intersection des voisinages de 0) est un sous-espace vectoriel fermé de E ; l'espace vectoriel quotient E/N, qui est séparé, est appelé l'espace vectoriel séparé *associé* à E.

Soit $(\mathrm{E}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques sur un même corps topologique K, et soit E l'espace vectoriel produit des E_ι. La topologie produit des topologies des E_ι est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. Dans l'espace produit E, le sous-espace F, *somme directe* des E_ι, est *partout dense* (TG, III, p. 17, prop. 25).

Pour certains types d'espaces vectoriels topologiques sur le corps **R** ou le corps **C**, nous définirons au chap. II, p. 32, une topologie sur une somme directe d'une famille (E_ι) d'espaces vectoriels topologiques, distincte en général de la topologie induite par la topologie produit de celle des E_ι.

Tout ce qui a été dit sur les sommes directes finies de sous-groupes stables de groupes topologiques à opérateurs (TG, III, p. 46-48) s'applique aux espaces vectoriels topologiques en remplaçant partout « sous-groupe stable » par « sous-espace vectoriel ».

Remarque. — Étant donné un sous-espace vectoriel *fermé* M d'un espace vectoriel topologique séparé E, il n'existe pas nécessairement de sous-espace vectoriel supplémentaire (algébrique) de M qui soit *fermé* dans E (même si E est un espace normé ; *cf.* IV, p. 55, exerc. 16, *c*)) ; à plus forte raison il n'existe pas nécessairement de supplémentaire topologique de M dans E (*cf.* I, p. 26, exerc. 8). Toutefois, nous verrons au § 2 que lorsque K est un corps valué complet non discret, tout sous-espace fermé M de E, de codimension *finie*, admet un supplémentaire topologique dans E (I, p. 15, prop. 3).

4. Structure uniforme et complétion d'un espace vectoriel topologique

La topologie d'un espace vectoriel topologique E, étant compatible avec la structure de groupe additif de E, définit sur E une *structure uniforme* (TG, III, p. 20) ; lorsque nous parlerons de la structure uniforme d'un espace vectoriel topologique, c'est toujours de cette structure qu'il sera question, sauf mention expresse du contraire. Toute application *linéaire continue* d'un espace vectoriel topologique E dans un espace vectoriel topologique F est *uniformément continue* (TG, III, p. 21, prop. 3) ; toute application de E dans lui-même de la forme $x \mapsto \alpha x + b$ est uniformément continue. Un ensemble *équicontinu* d'applications linéaires de E dans F est *uniformément équicontinu* (TG, X, p. 15, prop. 5).

Remarques. — 1) Si B est une partie précompacte de K, alors, pour tout voisinage V de 0 dans E, il y a un voisinage U de 0 dans E tel que $BU \subset V$. En effet, soit W un voisinage de 0 dans E tel que $W + W \subset V$; il y a un voisinage T_0 de 0 dans K et un voisinage U_0 de 0 dans E tels que $T_0U_0 \subset W$, en vertu de (EVT'_{III}). Comme B est précompact, il y a un nombre fini de points $\lambda_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que les $\lambda_i + T_0$ recouvrent B ; en vertu de (EVT'_{II}), il y a ensuite un voisinage $U \subset U_0$ de 0 dans E tel que $\lambda_i U \subset W$ pour tout i ; il est clair que U répond à la question. De la même façon (en utilisant (EVT'_I) au lieu de (EVT'_{II})), on montre que si H est une partie précompacte de E, alors, pour tout voisinage V de 0 dans E, il y a un voisinage T de 0 dans K tel que $TH \subset V$.

2) On déduit de 1) que, si B est une partie précompacte de K et H une partie précompacte de E, alors la restriction à $B \times H$ de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est *uniformément continue*. En effet, étant donné un voisinage V de 0 dans E, il y a un voisinage T de 0 dans K et un voisinage U de 0 dans E tels que $TH + BU \subset V$. Comme on peut écrire $\lambda x - \lambda' x' = (\lambda - \lambda')x + \lambda'(x - x')$, on voit que pour λ, λ' dans B, x, x' dans H, $\lambda - \lambda' \in T$ et $x - x' \in U$, on a $\lambda x - \lambda' x' \in V$, ce qui prouve notre assertion.

Un espace vectoriel topologique est dit *complet* si, muni de sa structure uniforme, c'est un espace uniforme complet.

DÉFINITION 2. — *On appelle espace de Banach un espace normé complet sur un corps valué non discret.*

Exemples. — Lorsque K est un corps valué non discret et complet, l'espace $\mathscr{B}(I ; K)$ (I, p. 4, *Exemple*) est complet (TG, X, p. 21, cor. 1). Il en est de même de l'espace $\ell^1_K(I)$ (I, p. 4, *Exemple*), muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{\iota \in I} |\xi_\iota|$: en effet, soit (x_n) une suite de Cauchy dans cet espace ; si $x_n = (\xi_{n\iota})_{\iota \in I}$, on a, pour tout $\iota \in I$,

$$|\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1 ;$$

donc, pour chaque $\iota \in I$, la suite $(\xi_{n\iota})_{n \geqslant 1}$ converge dans K vers une limite ξ_ι. En outre, pour toute partie finie J de I, on a

$$\sum_{\iota \in J} |\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1 ;$$

on en déduit d'abord qu'il existe une constante $a > 0$, indépendante de J, m et n, telle que $\sum_{\iota \in J} |\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant a$. En faisant tendre m vers $+\infty$, on en tire $\sum_{\iota \in J} |\xi_\iota - \xi_{n\iota}| \leqslant a$, d'où $\sum_{\iota \in I} |\xi_\iota| \leqslant a + \|x_n\|_1$, ce qui prouve que $z = (\xi_\iota)_{\iota \in I}$ appartient à $\ell^1_K(I)$; de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $\sum_{\iota \in J} |\xi_\iota - \xi_{n\iota}| \leqslant \varepsilon$ pour toute partie finie J de I ; en passant à la limite suivant l'ensemble filtrant des parties finies de I, on voit que $\|z - x_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$, ce qui montre que z est limite de la suite (x_n) dans l'espace normé $\ell^1_K(I)$.

Soient K un corps topologique séparé, E un espace vectoriel topologique sur K, et supposons que l'anneau complété $\hat{K}$ soit un *corps* (ce qui s'appliquera en particulier au cas où K est un corps *valué* (TG, IX, p. 30, prop. 7)). Alors le séparé complété $\hat{E}$ de E est muni d'une structure d'*espace vectoriel topologique complet* sur $\hat{K}$ (TG, III, p. 54) ; on dit que $\hat{E}$, muni de cette structure, est le *séparé complété* de l'espace vectoriel topologique E, ou simplement le *complété* de E lorsque E est *séparé*.

5. Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique sur un corps valué

DÉFINITION 3. — *Soient* K *un corps valué,* E *un espace vectoriel à gauche sur* K ; *on dit qu'une partie* M *de* E *est équilibrée si, pour tout* $x \in M$ *et tout* $\lambda \in K$ *tel que* $|\lambda| \leqslant 1$, *on a* $\lambda x \in M$ (ou, en d'autres termes, si $\lambda M \subset M$ pour $|\lambda| \leqslant 1$).

PROPOSITION 2. — *Dans un espace vectoriel topologique* E *sur un corps valué* K, *l'adhérence d'un ensemble équilibré* M *est un ensemble équilibré.*

En effet, soit B l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| \leqslant 1$; il est fermé dans K. L'application continue $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ applique $B \times M$ dans M, donc elle applique $B \times \overline{M}$ dans $\overline{M}$ (TG, I, p. 9, th. 1), ce qui prouve que $\overline{M}$ est équilibré.

Lorsque M est un ensemble quelconque dans un espace vectoriel E sur un corps valué K, l'ensemble M_1 des λx, où x parcourt M et λ l'ensemble des éléments de K tels que $|\lambda| \leqslant 1$, est évidemment le plus petit ensemble équilibré contenant M ; on l'appelle l'*enveloppe équilibrée* de M.

PROPOSITION 3. — *Soit* K *un corps valué localement compact et non discret, et soit* E *un espace vectoriel topologique séparé* (resp. *un espace vectoriel topologique*) *sur* K. *Pour toute partie compacte* (resp. *précompacte*) H *de* E, *l'enveloppe équilibrée de* H *est compacte* (resp. *précompacte*).

En effet, si B désigne la boule $|\xi| \leqslant 1$ dans K, l'enveloppe équilibrée de H est l'image de $B \times H$ par l'application continue $m : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$; si H est compact et E séparé, cette image est donc compacte, puisqu'il en est ainsi de B ; si H est précompact, la restriction à $B \times H$ de m est uniformément continue (I, p. 5, *Remarque* 2), et comme $B \times H$ est précompact, il en est de même de son image par m (TG, II, p. 30, prop. 2).

On notera que l'enveloppe équilibrée d'un ensemble fermé n'est pas nécessairement fermée. Par exemple, dans $\mathbf{R}^2$, l'enveloppe équilibrée de l'hyperbole définie par l'équation $xy = 1$ n'est pas fermée.

Comme la réunion d'une famille de parties équilibrées de E est équilibrée, pour toute partie M de E, il y a un plus grand ensemble équilibré N contenu dans M, que l'on appelle le *noyau équilibré* de M ; pour qu'il soit non vide, il faut et il suffit que $0 \in M$. Dire que $x \in N$ signifie que, pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\lambda x \in M$, ou encore (si $0 \in M$) que, pour tout $\mu \in K$ tel que $|\mu| \geqslant 1$, on a $x \in \mu M$. Si $0 \in M$, le noyau équilibré N de M est donc l'intersection $\bigcap_{|\mu| \geqslant 1} \mu M$. Ceci montre en particulier que si M est *fermé*, il en est de même de N.

DÉFINITION 4. — *Soient* K *un corps valué non discret,* E *un espace vectoriel à gauche sur* K, A *et* B *deux parties de* E. *On dit que* A *absorbe* B *s'il existe* $\alpha > 0$ *tel que l'on ait* $\lambda A \supset B$ *pour* $|\lambda| \geqslant \alpha$ (ce qui équivaut à $\mu B \subset A$ pour $\mu \neq 0$ et $|\mu| \leqslant \alpha^{-1}$). *Une partie* A *de* E *est dite absorbante si elle absorbe toute partie réduite à un point.*

Soit A une partie équilibrée de E ; pour qu'elle absorbe une partie B de E, il suffit qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda A \supset B$; en effet, pour $|\mu| \geqslant |\lambda|$, on a $\lambda A = (\lambda\mu^{-1})\, \mu A$, et comme μA est équilibré et $|\lambda\mu^{-1}| \leqslant 1$, $\lambda A \subset \mu A$, d'où $B \subset \mu A$. En particulier, pour qu'une partie équilibrée A de E soit absorbante, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda x \in A$. Toute partie absorbante de E *engendre* l'espace vectoriel E. Toute intersection *finie* d'ensembles absorbants est un ensemble absorbant.

PROPOSITION 4. — *Dans un espace vectoriel topologique* E *sur un corps valué non discret* K, *il existe un système fondamental* $\mathfrak{B}$ *de voisinages fermés de* 0, *tel que* :

(EV_I) *Tout ensemble* $V \in \mathfrak{B}$ *est équilibré et absorbant.*

(EV_{II}) *Quels que soient* $V \in \mathfrak{B}$ *et* $\lambda \neq 0$ *dans* K, *on a* $\lambda V \in \mathfrak{B}$ (invariance de $\mathfrak{B}$ par les homothéties de rapport $\neq 0$).

(EV_{III}) *Pour tout* $V \in \mathfrak{B}$, *il existe* $W \in \mathfrak{B}$ *tel que* $W + W \subset V$.

Réciproquement, soit E *un espace vectoriel sur* K, *et soit* $\mathfrak{B}$ *une base de filtre sur* E *satisfaisant aux conditions* (EV_I), (EV_{II}) *et* (EV_{III}). *Il existe alors une topologie* (*et une seule*) *sur* E, *compatible avec la structure d'espace vectoriel de* E, *et pour laquelle* $\mathfrak{B}$ *soit un système fondamental de voisinages de* 0.

Remarquons d'abord qu'en vertu de l'axiome (EVT'_{III}), le *noyau équilibré* d'un voisinage V de 0 est un voisinage de 0, car il existe un nombre $\alpha > 0$ et un voisinage W de 0 tels que les relations $|\lambda| \leqslant \alpha$ et $x \in W$ entraînent $\lambda x \in V$; comme il y a par hypothèse un élément $\mu \neq 0$ dans K tel que $|\mu| \leqslant \alpha$, μW est un voisinage de 0 contenu dans V, et pour $|\lambda| \leqslant 1$ et $x \in \mu W$, on a $\lambda x \in V$ en vertu du choix de W, d'où notre assertion. En outre, si V est fermé, il en est de même de son noyau équilibré ; donc, en vertu de l'axiome (O_{III}), vérifié par tout groupe topologique (TG, III, p. 20 et TG, II, p. 5, cor. 3), l'ensemble $\mathfrak{B}$ des voisinages *équilibrés et fermés* est un système fondamental de voisinages de 0 dans E. D'autre part, en vertu de (EVT'_I), tout voisinage de 0 dans E est *absorbant* ; il est clair en outre que $\mathfrak{B}$ vérifie (EV_{II}) (*cf.* I, p. 3, corollaire) ; enfin, tout système fondamental de voisinages de 0 dans E satisfait à (EV_{III}) en vertu de la continuité de $(x, y) \mapsto x + y$ au point $(0, 0)$. L'ensemble $\mathfrak{B}$ répond donc à la question.

Soient maintenant E un espace vectoriel sur K, et $\mathfrak{B}$ une base de filtre sur E satisfaisant à (EV_I), (EV_{II}) et (EV_{III}). L'axiome (EV_I) montre d'abord que pour tout $V \in \mathfrak{B}$, on a $-V = V$ et $0 \in V$; ces relations et l'axiome (EV_{III}) montrent que $\mathfrak{B}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie sur E compatible avec la structure de *groupe additif* de E (TG, III, p. 4). Comme d'autre part les axiomes (EVT'_I), (EVT'_{II}) et (EVT'_{III}) sont des conséquences immédiates de (EV_I) et (EV_{II}), la topologie ainsi définie satisfait à l'axiome (EVT), ce qui achève la démonstration.

Remarques. — 1) Dans un espace normé sur un corps valué non discret, l'ensemble des *boules ouvertes* (resp. des *boules fermées*) de centre 0 est un système fondamental de voisinages de 0 qui satisfait aux conditions (EV_I), (EV_{II}) et (EV_{III}).

2) Lorsque le corps K des scalaires est le corps **R** ou le corps **C**, toute base de filtre $\mathfrak{B}$ sur E qui satisfait aux deux seuls axiomes (EV_I) et (EV_{III}) est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. En effet, tout revient à prouver que, dans ces conditions, pour tout $\lambda \neq 0$ dans K et tout $V \in \mathfrak{B}$, il existe $W \in \mathfrak{B}$ tel que $\lambda W \subset V$. Or, il résulte aussitôt de (EV_{III}) qu'il existe $W_1 \in \mathfrak{B}$ tel que $2W_1 \subset V$, d'où on déduit, par récurrence sur n, que pour tout entier $n > 0$ il existe $W_n \in \mathfrak{B}$ tel que $2^n W_n \subset V$. Comme V est équilibré, il suffit de prendre n assez grand pour que $2^n = |2^n| > |\lambda|$; $W = W_n$ répond à la question.

Ce résultat ne s'étend pas à un corps valué non discret K quelconque, car dans un tel corps on n'a plus nécessairement $|m\varepsilon| = m$ pour tout entier naturel m (ε désignant l'élément unité du corps ; *cf.* I, p. 22, exerc. 1).

3) Si K est un corps *discret*, les conditions (EVT'_I) et (EVT'_{III}) sont vérifiées pour une topologie *quelconque* sur E. En raisonnant comme dans la prop. 4, on voit aisément que si E est un espace vectoriel topologique sur K, il existe un système fondamental $\mathfrak{B}$ de voisinages fermés de 0 dans E satisfaisant aux conditions (EV_{II}) et (EV_{III}). Réciproquement, si une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur un espace vectoriel E par rapport à K est telle que 0 appartienne à tous les ensembles de $\mathfrak{B}$, et satisfait à (EV_{II}) et (EV_{III}), $\mathfrak{B}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

6. Critères de continuité et d'équicontinuité

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur un même corps K ; pour qu'une application linéaire f de E dans F soit continue, il suffit qu'elle soit continue à l'origine (TG, III, p. 15, prop. 23). Cette proposition se généralise de la façon suivante :

PROPOSITION 5. — *Soient* E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *et* F *des espaces vectoriels topologiques sur un corps valué commutatif et non discret* K. *Pour qu'une application multilinéaire* f *de* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *dans* F *soit continue dans l'espace produit* $\prod_{i=1}^{n} E_i$, *il suffit qu'elle soit continue au point* $(0, 0, \ldots, 0)$.

En effet, soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point quelconque de $\prod_{i=1}^{n} E_i$; il faut montrer que pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe dans chaque E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un voisinage V_i de 0 tel que les n relations $z_i \in V_i$ entraînent

$$f(a_1 + z_1, a_2 + z_2, \ldots, a_n + z_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W .$$

Or, on peut écrire

$$f(a_1 + z_1, \ldots, a_n + z_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\mathrm{H}} u_{\mathrm{H}}$$

où H parcourt les $2^n - 1$ parties de l'intervalle $\mathrm{I} = \llbracket 1, n \rrbracket$ de $\mathbf{N}$ distinctes de I, et où, pour chaque H, on a $u_{\mathrm{H}} = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, avec $y_i = a_i$ pour $i \in \mathrm{H}$ et $y_i = z_i$ pour $i \notin \mathrm{H}$. Il existe $2^n - 1$ voisinages équilibrés $\mathrm{W_H}$ de 0 dans F tels que $\sum_{\mathrm{H}} \mathrm{W_H} \subset \mathrm{W}$; d'autre part, comme f est continue au point $(0, \ldots, 0)$ par hypothèse, il existe dans chaque E_i un voisinage U_i de 0 ($1 \leqslant i \leqslant n$) tel que les n relations $x_i \in \mathrm{U}_i$ entraînent $f(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_{\mathrm{H}} \mathrm{W_H}$. Comme U_i est absorbant, il existe $\lambda_i \neq 0$ dans K tel que $\lambda_i a_i \in \mathrm{U}_i$. Soit λ un élément de K tel que $|\lambda| \geqslant \prod_{i \in \mathrm{H}} |\lambda_i|^{-1}$ pour toute partie H de I ; montrons que les voisinages $\mathrm{V}_i = \lambda^{-n}\mathrm{U}_i$ répondent à la question. En effet, si p est le nombre d'éléments de $\mathrm{I} - \mathrm{H}$, on peut alors écrire $u_{\mathrm{H}} = \mu f(x_1, \ldots, x_n)$, avec $x_i \in \mathrm{U}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mu = \lambda^{-np}(\prod_{i \in \mathrm{H}} \lambda_i^{-1})$, et il résulte des choix précédents que $|\mu| \leqslant 1$, d'où $u_{\mathrm{H}} \in \mu \mathrm{W_H} \subset \mathrm{W_H}$, puisque $\mathrm{W_H}$ est équilibré. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION 6. — *Les hypothèses sur* E_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) *et* F *étant celles de la prop.* 5, *pour qu'un ensemble* $\mathscr{E}$ *d'applications multilinéaires de* $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ *dans* F *soit équicontinu, il suffit qu'il soit équicontinu au point* $(0, 0, \ldots, 0)$.

En effet, dans la démonstration de la prop. 5, les U_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) peuvent être pris tels que les relations $x_i \in \mathrm{U}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) entraînent $f(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_{\mathrm{H}} \mathrm{W_H}$ pour *toute* application $f \in \mathscr{E}$.

7. Topologies initiales d'espaces vectoriels

PROPOSITION 7. — *Soit* $(\mathrm{E}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *une famille d'espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique* K. *Soit* E *un espace vectoriel sur* K, *et pour chaque* $\iota \in \mathrm{I}$, *soit* f_ι *une application linéaire de* E *dans* E_ι. *Alors la moins fine des topologies sur* E *qui rendent continues toutes les fonctions* f_ι *est une topologie* $\mathscr{T}$ *compatible avec la structure d'espace vectoriel de* E. *En outre, si pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $\varphi(x)$ *désigne le point* $(f_\iota(x))$ *de l'espace produit* $\mathrm{F} = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{E}_\iota$, *la topologie* $\mathscr{T}$ *est l'image réciproque par l'application linéaire* φ *de la topologie du sous-espace* $\varphi(\mathrm{E})$ *de* F.

La dernière partie de la proposition est un cas particulier de TG, I, p. 26, prop. 3. La proposition est alors conséquence du lemme suivant :

Lemme. — *Soient* M *et* N *deux espaces vectoriels,* g *une application linéaire de* M *dans* N. *Si* $\mathscr{T}_0$ *est une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de* N, *l'image réciproque de* $\mathscr{T}_0$ *par* g *est compatible avec la structure d'espace vectoriel de* M.

Montrons par exemple que $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue en tout point (λ_0, x_0) de $K \times M$. Posons $y = g(x_0)$. Tout voisinage de 0 dans M contient un voisinage de la forme $\overset{-1}{g}(U)$, où U est un voisinage de 0 dans N ; par hypothèse, il existe un voisinage V de 0 dans K et un voisinage W de 0 dans N tels que les relations $\lambda - \lambda_0 \in V$, $y - y_0 \in W$ entraînent $\lambda y - \lambda_0 y_0 \in U$. Les relations $\lambda - \lambda_0 \in V$, $x - x_0 \in \overset{-1}{g}(W)$ entraînent donc $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in \overset{-1}{g}(U)$. On démontre de même que $(x, y) \mapsto x - y$ est continue dans $M \times M$.

Pour chaque indice $\iota \in I$, soit $\mathfrak{B}_\iota$ un système fondamental de voisinages de 0 dans E_ι. D'après la définition de la topologie $\mathscr{T}$, le filtre des voisinages de 0 pour cette topologie est engendré par la réunion des ensembles de parties $\overset{-1}{f_\iota}(\mathfrak{B}_\iota)$; autrement dit, les ensembles de la forme $\bigcap_k \overset{-1}{f_{\iota_k}}(V_{\iota_k})$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathscr{T}$, $(\iota_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ étant une suite finie quelconque d'indices de I, et, pour chaque indice k, V_{ι_k} un ensemble quelconque de $\mathfrak{B}_{\iota_k}$.

Corollaire 1. — *Soit* G *un espace vectoriel topologique sur* K. *Pour qu'un ensemble* H *d'applications de* G *dans* E *soit équicontinu, il faut et il suffit que, pour tout* $\iota \in I$, *l'ensemble des* $f_\iota \circ u$, *où* u *parcourt* H, *soit équicontinu.*

C'est un cas particulier de TG, X, p. 14, prop. 3.

Corollaire 2. — *Les espaces* E_ι *étant supposés séparés, pour que la topologie* $\mathscr{T}$ *soit séparée, il faut et il suffit que, pour tout* $x \neq 0$ *dans* E, *il existe un indice* $\iota \in I$ *tel que* $f_\iota(x) \neq 0$.

En effet, $\varphi(E)$ est alors un espace séparé, et pour que $\mathscr{T}$ soit séparée, il faut et il suffit évidemment que φ soit injective ; on notera qu'on peut alors identifier E (muni de $\mathscr{T}$) au sous-espace $\varphi(E)$ de $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ par l'application φ.

Corollaire 3. — *Supposons les* E_ι *complets et* $\varphi(E)$ *fermé dans* $F = \prod_{\iota \in I} E_\iota$. *Alors* E *est complet pour la topologie* $\mathscr{T}$.

En effet, le sous-espace $\varphi(E)$ de F est alors complet (TG, II, p. 16, prop. 8 et p. 17, prop. 10), donc il en est de même de E pour la topologie image réciproque par φ de celle de $\varphi(E)$ (TG, I, p. 51, prop. 10, et TG, II, p. 13, prop. 4).

* *Exemple.* — Soient $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ l'espace des distributions sur $\mathbf{R}$, p un nombre tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $j : L^p(\mathbf{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ l'injection canonique, qui est continue (lorsque $L^p(\mathbf{R})$ est muni de sa topologie d'espace normé et $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ de la topologie forte). Pour toute distribution $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$, $D(f)$ désigne sa dérivée ; on rappelle que $f \mapsto D(f)$ est un endomorphisme continu de $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Soit alors E le sous-espace vectoriel de $L^p(\mathbf{R})$ formé des $f \in L^p(\mathbf{R})$ telles que $D(f) \in L^p(\mathbf{R})$, et munissons E de la topologie la moins fine rendant continues les injections canoniques $i : E \to L^p(\mathbf{R})$ et $D : E \to L^p(\mathbf{R})$ ($L^p(\mathbf{R})$ étant muni de sa topologie d'espace normé). Pour cette topologie, l'espace E est *complet*. En effet, l'image de E dans $F = L^p(\mathbf{R}) \times L^p(\mathbf{R})$ par l'application $\varphi : f \mapsto (f, D(f))$

est *fermée*, car c'est la trace sur $L^p(\mathbf{R}) \times L^p(\mathbf{R})$ de l'image G de $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}) \times \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ par l'application

$$\varphi_0 : f \mapsto (f, \mathrm{D}(f))\,;$$

or G est le graphe de φ_0, donc est fermé dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}) \times \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ (TG, I, p. 53, cor. 2 de la prop. 2), et comme $\varphi(\mathrm{E})$ est l'image réciproque de G par $i \times i$, qui est continue, $\varphi(\mathrm{E})$ est fermé dans F. $_*$

COROLLAIRE 4. — *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps topologique* K, *et soit* $(\mathscr{T}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ *une famille de topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de* E ; *alors la borne supérieure* $\mathscr{T}$ *des topologies* $\mathscr{T}_\iota$ *est compatible avec la structure d'espace vectoriel de* E.

En effet, si E_ι désigne l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant E de $\mathscr{T}_\iota$, et f_ι l'application identique de E sur E_ι, $\mathscr{T}$ est la moins fine des topologies rendant continues les f_ι.

§ 2. VARIÉTÉS LINÉAIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

1. Adhérence d'une variété linéaire

Rappelons (A, II, p. 128) que, dans un espace vectoriel E sur un corps K, une variété linéaire affine (appelée simplement « variété linéaire » quand il n'en résulte pas de confusion) est la transformée par une translation quelconque d'un sous-espace vectoriel de E.

PROPOSITION 1. — *Dans un espace vectoriel topologique* E, *l'adhérence d'une variété linéaire est une variété linéaire.*

En effet, toute translation étant un homéomorphisme de E, il suffit de démontrer la proposition pour un sous-espace vectoriel M de E, et dans ce cas, la proposition a été vue dans I, p. 4.

COROLLAIRE. — *Dans un espace vectoriel topologique* E, *tout hyperplan est fermé ou partout dense.*

En effet, l'adhérence d'un hyperplan homogène H ne peut être que H ou l'espace E tout entier, puisque c'est un sous-espace vectoriel contenant H (prop. 1).

On voit donc que, pour qu'un hyperplan H soit *fermé* dans E, il faut et il suffit que $\complement$ H *contienne un point intérieur.*

Étant donnée une partie A d'un espace vectoriel topologique E, rappelons que le sous-espace vectoriel M engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A (A, II, p. 16, prop. 9) ; l'adhérence de M dans E est, en vertu de la prop. 1, le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A ; on dit que c'est le *sous-espace vectoriel fermé engendré par* A.

DÉFINITION 1. — *Dans un espace vectoriel topologique* E, *on dit qu'un ensemble* A *est total si le sous-espace vectoriel fermé engendré par* A *est identique à* E (ou, en d'autres termes, si l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est *partout dense*).

Exemples. — 1) Dans l'espace normé $\mathscr{C}(\mathrm{I}\,;\mathbf{C})$ (sur le corps $\mathbf{C}$) des fonctions continues dans $\mathrm{I} = [0, 1]$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, les restrictions à I des monômes x^n ($n \in \mathbf{N}$) forment un ensemble total, en vertu du th. de Weierstrass-Stone (TG, X, p. 36, th. 3). De même dans le sous-espace P de $\mathscr{C}(\mathrm{I}\,;\mathbf{C})$ formé des fonctions telles que $f(0) = f(1)$, les restrictions à I des fonctions $e^{2n\pi ix}$ ($n \in \mathbf{Z}$) forment un ensemble total (TG, X, p. 40, prop. 8).

2) Tout ensemble absorbant dans un espace vectoriel topologique E sur un corps valué non discret (et en particulier tout voisinage de 0 dans E) est un ensemble total puisqu'il engendre E (I, p. 7). On déduit de là qu'une variété linéaire qui n'est pas dense dans E est nécessairement un ensemble rare dans E (TG, IX, p. 52), puisque son adhérence ne peut contenir de point intérieur.

DÉFINITION 2. — *Dans un espace vectoriel topologique* E, *on dit qu'une famille* $(a_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *de points de* E *est topologiquement libre si, quel que soit* $\kappa \in \mathrm{I}$, *le sous-espace vectoriel* fermé *engendré par les* a_ι *d'indice* $\iota \neq \kappa$ *ne contient pas* a_κ.

Exemple 3. — Dans l'espace normé $\mathscr{C}(\mathrm{I}\,;\mathbf{C})$ des fonctions continues dans $\mathrm{I} = [0, 1]$, les restrictions à I des fonctions $e^{2n\pi ix}$ ($n \in \mathbf{Z}$) forment une famille topologiquement libre. En effet, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, si $f(x)$ est une combinaison linéaire $\sum_{k \neq n} c_k e^{2k\pi ix}$ (les c_k étant nuls sauf un nombre fini d'entre eux), on a

$$\int_0^1 |e^{2n\pi ix} - f(x)|^2\, dx = 1 + \sum_{k \neq n} |c_k|^2 \geqslant 1$$

et *a fortiori*, en vertu du th. de la moyenne

$$\sup_{x \in \mathrm{I}} |e^{2n\pi ix} - f(x)| \geqslant 1$$

ce qui prouve que $e^{2n\pi ix}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}(\mathrm{I}\,;\mathbf{C})$ engendré par les $e^{2k\pi ix}$ d'indice $k \neq n$.

L'ensemble des éléments d'une famille topologiquement libre est appelé *partie topologiquement libre* de E. Toute partie d'une partie topologiquement libre est topologiquement libre ; toute partie réduite à un point $x \neq 0$ est topologiquement libre si l'espace E est séparé.

Une famille topologiquement libre est libre (au sens algébrique ; *cf.* A, II, p. 96, *Remarque*) ; mais la réciproque est inexacte.

Exemple 4. — Dans l'espace normé $\mathscr{C}(\mathrm{I}\,;\mathbf{C})$ des fonctions continues dans $\mathrm{I} = [0, 1]$, les restrictions à I des monômes x^n ($n \in \mathbf{N}$) forment une famille libre au sens algébrique. Mais il existe une suite (p_n) de polynômes telle que $p_n(x^2)$ converge uniformément vers x dans I (TG, X, p. 36, lemme 2), ce qui signifie que x appartient au sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}(\mathrm{I}\,;\mathbf{C})$ engendré par les monômes x^{2n} ($n \in \mathbf{N}$).

Remarques. — 1) Contrairement à ce qui se passe en Algèbre pour les parties libres d'un espace vectoriel, l'ensemble des parties topologiquement libres d'un espace vectoriel topologique E *n'est pas inductif* en général pour la relation d'inclusion (I, p. 25, exerc. 2) ; en outre, il n'existe pas nécessairement dans E de partie topologiquement libre maximale (I, p. 25, exerc. 4), donc il n'existe pas nécessairement de partie topologiquement libre qui soit en même temps *totale*.

2) Soient M un sous-espace vectoriel fermé de E, et $(\dot{a}_\iota)_{\iota\in I}$ une famille topologiquement libre dans l'espace quotient E/M. Si a_ι est un élément quelconque de la classe $\dot{a}_\iota$, la famille $(a_\iota)_{\iota\in I}$ est topologiquement libre, comme il résulte de la déf. 2 et du fait que l'application canonique de E sur E/M est continue. Mais on notera que si N est le sous-espace vectoriel *fermé* engendré par les a_ι, on peut avoir $M \cap N \neq \{0\}$ (I, p. 25, exerc. 2) et par suite la somme $M + N$ n'est pas nécessairement directe au sens algébrique (ni *a fortiori* au sens topologique).

2. Droites et hyperplans fermés

PROPOSITION 2. — *Tout espace vectoriel topologique séparé* E *de dimension* 1 *sur un corps valué non discret* K *est isomorphe à* K_s ; *de façon précise, pour tout* $a \neq 0$ *dans* E, *l'application* $\xi \mapsto \xi a$ *de* K_s *sur* E *est un isomorphisme* (autrement dit, toute application linéaire de K_s *sur* E est un isomorphisme).

Comme l'application $\xi \mapsto \xi a$ de K_s sur E est bijective et continue (I, p. 1, déf. 1), il suffit de prouver qu'elle est bicontinue. Soit α un nombre réel > 0 ; on va montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que la relation $\xi a \in V$ entraîne $|\xi| < \alpha$. Comme K n'est pas discret, il existe un élément $\xi_0 \in K$ tel que $0 < |\xi_0| < \alpha$; d'autre part, E étant séparé, il existe dans E un voisinage V de 0 ne contenant pas $\xi_0 a$, et on peut supposer V équilibré (I, p. 7, prop. 4). Montrons que la relation $\xi a \in V$ entraîne $|\xi| < |\xi_0|$; sinon, on aurait $|\xi_0\xi^{-1}| \leqslant 1$, donc $\xi_0 a = (\xi_0\xi^{-1})(\xi a) \in V$, contrairement à l'hypothèse, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. — *Dans un espace vectoriel topologique séparé* E *sur un corps valué non discret* K, *tout sous-espace vectoriel* D *de dimension* 1 *est isomorphe à* K_s.

COROLLAIRE 2. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur un corps valué non discret. Tout sous-espace vectoriel* D (*de dimension* 1) *supplémentaire algébrique d'un hyperplan homogène fermé* H *est supplémentaire topologique de* H.

En effet, dans D, l'ensemble réduit à 0 est fermé, étant l'intersection de D et de l'ensemble fermé H ; D est donc séparé. Mais comme E/H est aussi séparé, l'application canonique de D sur E/H, qui est linéaire, est un isomorphisme en vertu de la prop. 2, d'où la conclusion (TG, III, p. 47).

THÉORÈME 1. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur un corps valué non discret. Soit* H *un hyperplan dans* E, *défini par une équation* $f(x) = \alpha$, *où* f *est une forme linéaire non identiquement nulle. Pour que* H *soit fermé dans* E, *il faut et il suffit que* f *soit continue.*

La condition est évidemment suffisante (TG, I, p. 9, th. 1) ; montrons qu'elle est nécessaire. On peut supposer que H est un hyperplan fermé homogène, d'équation $f(x) = 0$; l'espace quotient E/H est alors un espace vectoriel topologique séparé de dimension 1 sur K. On peut écrire $f = g \circ \varphi$, où φ est l'application canonique de E sur E/H, et g une application linéaire de E/H sur K_s ; d'après la prop. 2, g est continue, donc il en est de même de f.

COROLLAIRE. — *Toute forme linéaire continue et non nulle sur* E *est un morphisme strict de* E *sur* K_s.

Remarque. — On peut donner des exemples d'espaces vectoriels topologiques normés sur un corps valué non discret et complet, dans lesquels toute forme linéaire continue est identiquement nulle (I, p. 25, exerc. 4) ; dans un tel espace, tout hyperplan est donc partout dense (I, p. 11, corollaire).

3. Sous-espaces vectoriels de dimension finie

THÉORÈME 2. — *Tout espace vectoriel topologique séparé* E *de dimension finie n sur un corps valué* complet *et non discret* K, *est isomorphe à* K_s^n ; *de façon précise, pour toute base* $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de* E *sur* K, *l'application linéaire* $(\xi_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ *est un isomorphisme de* K_s^n *sur* E.

La prop. 2 de I, p. 13, entraîne que le th. 2 est vrai pour $n = 1$; raisonnons par récurrence sur n. Soit H le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$; l'hypothèse de récurrence montre que l'application $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i$ est un isomorphisme de K_s^{n-1} sur H. Le sous-espace H, isomorphe à un produit d'espaces complets, est complet (TG, II, p. 17, prop. 10) ; par suite, il est *fermé* dans E (TG, II, p. 16, prop. 8). Soit D le sous-espace Ke_n supplémentaire de H dans E ; E est somme directe topologique de H et de D (I, p. 13, cor. 2), donc l'application

$$(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \text{ de } K_s^{n-1} \times K_s$$

sur E est un isomorphisme.

L'hypothèse que K est *complet* est essentielle pour la validité du th. 2 dès que $n > 1$. En effet, soit K un corps valué non complet, et soit $\hat{K}$ son complété : pour tout élément $a \neq 0$ de $\hat{K}$, $K.a$ est partout dense dans $\hat{K}$, puisque $x \mapsto xa$ est un homéomorphisme de $\hat{K}$ sur lui-même. Si $a \notin K$, le sous-espace $K + Ka$ de l'espace vectoriel topologique $\hat{K}$ sur K, est de dimension 2 sur K, mais il n'est pas isomorphe à K_s^2, puisque tout sous-espace de dimension 1 dans $K + Ka$ est dense dans $K + Ka$.

COROLLAIRE 1. — *Dans un espace vectoriel topologique séparé* E *sur un corps valué complet et non discret* K, *tout sous-espace vectoriel* F *de dimension finie est fermé dans* E.

En effet, si F est de dimension n, il est isomorphe à K_s^n, donc complet, et par suite fermé dans E (TG, II, p. 16, prop. 8).

COROLLAIRE 2. — *Soient* K *un corps valué complet et non discret,* E *un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie sur* K, F *un espace vectoriel topologique quelconque sur* K ; *toute application linéaire de* E *dans* F *est continue.*

COROLLAIRE 3. — *Dans un espace vectoriel topologique séparé* E *sur un corps valué complet et non discret, toute partie libre* finie *est topologiquement libre.*

Corollaire 4. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet non discret. Soient* M *un sous-espace vectoriel fermé de* E, F *un sous-espace vectoriel de dimension* finie *de* E ; *le sous-espace* M + F *est fermé dans* E.

En effet, l'espace quotient E/M est séparé ; soit φ l'homomorphisme canonique de E sur E/M ; le sous-espace M + F est égal à $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(\mathrm{F}))$. Or, $\varphi(\mathrm{F})$ est de dimension finie dans E/M, donc (cor. 1) $\varphi(\mathrm{F})$ est fermé dans E/M, et par suite $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(\mathrm{F}))$ est fermé dans E.

On observera que, si M et N sont deux sous-espaces vectoriels fermés *quelconques* dans un espace vectoriel topologique séparé E, M + N n'est pas nécessairement fermé dans E, * même si E est un espace hilbertien $_*$ (*cf.* IV, p. 64, exerc. 13 *d*)).

Proposition 3. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet et non discret* K. *Soit* M *un sous-espace vectoriel fermé de codimension* finie *n dans* E. *Tout sous-espace* N *supplémentaire algébrique de* M *dans* E *est supplémentaire topologique de* M.

En effet, dans N, l'ensemble réduit à 0 est fermé, étant l'intersection de N et de l'ensemble M fermé dans E ; N est donc séparé. Comme E/M est aussi séparé, l'application canonique de N sur E/M, qui est linéaire et bijective, est bicontinue (I, p. 14, cor. 2), d'où la proposition.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué complet et non discret. Si* F *est séparé et de dimension finie, toute application linéaire continue de* E *sur* F *est un morphisme strict.*

Remarque. — Les résultats des nos 2 et 3 ne sont plus valables lorsque K est *discret*. Par exemple, soit K_1 un corps valué non discret, et soit K le corps discret obtenu en munissant K_1 de la valeur absolue impropre ; K_1 est un espace vectoriel topologique de dimension 1 sur K, mais n'est pas isomorphe à K_s. Toutefois, on peut montrer que les résultats des nos 2 et 3 subsistent lorsque K est discret, pourvu qu'on impose aux espaces vectoriels topologiques considérés d'avoir un système fondamental de voisinages, *équilibrés* de 0 (c'est-à-dire ici de voisinages V tels que K.V = V) (I, p. 28, exerc. 14) ; cette condition (qui est toujours remplie lorsque K est un corps valué non discret, *cf.* I, p. 7, prop. 4) ne l'est plus ici pour tous les espaces vectoriels topologiques sur K, comme le montre l'exemple précédent.

4. Espaces vectoriels topologiques localement compacts

Théorème 3. — *Soit* K *un corps valué complet non discret. Un espace vectoriel topologique séparé* E *sur* K *qui admet un voisinage de* 0 *précompact* V *est de dimension finie. Si* E *n'est pas réduit à* 0, K *et* E *sont alors localement compacts.*

Pour démontrer la première assertion, on peut se borner au cas où E est *complet*, car E est un sous-espace partout dense de son complété $\hat{\mathrm{E}}$ et l'adhérence $\overline{\mathrm{V}}$ de V dans $\hat{\mathrm{E}}$ est compacte et est un voisinage de 0 dans $\hat{\mathrm{E}}$ (TG, III, p. 24, prop. 7).

On peut donc supposer qu'il y a dans E un voisinage *compact* V de 0. Soit $\alpha \in \mathrm{K}$ tel que $0 < |\alpha| < 1$; il y a donc des points $a_i \in \mathrm{V}$ en nombre fini tels que

$$\mathrm{V} \subset \bigcup_i (a_i + \alpha\mathrm{V}).$$

Soit M le sous-espace (de dimension finie) de E engendré par les a_i ; il est fermé dans E (I, p. 14, cor. 1); dans l'espace vectoriel topologique séparé E/M, l'image canonique de V est un voisinage compact W de 0 tel que $W \subset \alpha W$; ceci s'écrit encore $\alpha^{-1}W \subset W$, d'où par récurrence sur n, $\alpha^{-n}W \subset W$ pour tout entier positif n. Comme W est absorbant, on en déduit que $W = E/M$; autrement dit E/M est *compact*. Pour prouver la première assertion, il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 1. — *Tout espace vectoriel topologique compact* E *sur un corps valué non discret est réduit à* 0.

En effet, comme E est complet, on peut supposer qu'il en est de même de K (I, p. 6). Si E n'était pas réduit à 0, il contiendrait une droite, fermée dans E, donc compacte, et isomorphe à K_s (I, p. 14, cor. 1 et I, p. 13, prop. 2), et par suite K serait compact ; mais cela est absurde, car l'application $\xi \mapsto |\xi|$ de K dans **R** est continue, donc serait bornée, alors qu'il existe des $\gamma \in K$ tels que $|\gamma| > 1$, donc tels que $|\gamma^n| = |\gamma|^n$ soit arbitrairement grand.

Revenant au th. 3, on voit que si E admet un voisinage de 0 précompact et n'est pas réduit à 0, E est de dimension finie sur K, donc isomorphe à un espace K_s^n avec $n > 0$; comme K est complet, il en est de même de E, qui est donc localement compact. Puisque K_s est isomorphe à une droite de E (I, p. 13, prop. 2), nécessairement fermée dans E (I, p. 14, cor. 1), K est localement compact.

Remarque. — La conclusion du th. 3 ne subsiste plus lorsque K est un corps discret, comme le montre l'exemple de **R** (muni de la topologie usuelle) considéré comme espace vectoriel topologique sur le corps **Q** discret.

§ 3. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES MÉTRISABLES

1. Voisinages de 0 dans un espace vectoriel topologique métrisable

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique E est *métrisable* si sa topologie est métrisable. Muni de sa structure de groupe additif et de sa topologie, E est donc un groupe métrisable (TG, IX, p. 24).

On sait que, pour qu'un groupe topologique soit métrisable, il faut et il suffit que l'élément neutre e admette un système fondamental dénombrable de voisinages, dont l'intersection soit réduite à e (TG, IX, p. 23, prop. 1).

On sait qu'on peut définir la structure uniforme d'un espace vectoriel topologique métrisable E par une *distance invariante* $d(x, y) = |x - y|$, $x \mapsto |x|$ étant une application continue de E dans $\mathbf{R}_+$, qui satisfait aux trois conditions : 1) $|-x| = |x|$; 2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; 3) la relation $|x| = 0$ est équivalente à $x = 0$ (TG, IX, p. 24, prop. 3).

On a vu (TG, IX, p. 24, prop. 2) comment une telle distance d peut être définie à l'aide d'une suite décroissante (W_n) de voisinages de 0 dans E, formant un système fondamental de voisinages, et telle que $W_{n+1} + W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n$. Lorsque E est un espace vectoriel métrisable sur un corps valué non discret K, on peut supposer en outre que les W_n sont équilibrés (I, p. 7, prop. 4) ; si on remonte au procédé de définition de d (*loc. cit.*), on voit alors que *la relation* $|\lambda| \leqslant 1$ *entraîne* $|\lambda x| \leqslant |x|$. En outre, les conditions ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}}$) et ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}}$) de I, p. 3 entraînent que, pour tout $x_0 \in E$, $|\lambda x_0|$ *tend vers* 0 *avec* $\lambda \in K$, et que, pour tout $\lambda_0 \in K$, $|\lambda_0 x|$ *tend vers* 0 *avec* $|x|$. Inversement, si la fonction $|x|$ possède toutes les propriétés précédentes, et si W_n désigne l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x| \leqslant 2^{-n}$, on constate aussitôt que les W_n forment un système fondamental de voisinages équilibrés de 0 pour une topologie métrisable sur E, compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

Remarque. — Les espaces *normés* forment l'une des classes d'espaces vectoriels métrisables les plus importantes (I, p. 3). Mais il faut noter qu'il existe des espaces vectoriels métrisables dont la topologie *ne peut être définie par une norme* (I, p. 28, exerc. 1) ; nous en étudierons plus tard d'importants exemples.

2. Propriétés des espaces vectoriels métrisables

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique métrisable E est métrisable ; il en est de même de tout espace quotient E/M de E par un sous-espace vectoriel fermé M (TG, IX, p. 25, prop. 4). Tout produit d'une famille *dénombrable* d'espaces vectoriels topologiques métrisables est métrisable (TG, IX, p. 15, cor. 2). Si K_0 est un corps valué complet, et K un sous-corps partout dense de K_0, le complété $\hat{E}$ d'un espace vectoriel métrisable E sur K est un espace vectoriel métrisable sur K_0 (I, p. 6 et TG, IX, p. 12, prop. 1). Enfin, si E est un espace vectoriel métrisable et complet, pour tout sous-espace vectoriel fermé M de E, E/M est complet (TG, IX, p. 25, prop. 4).

3. Fonctions linéaires continues dans un espace vectoriel métrisable

THÉORÈME 1 (Banach). — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels métrisables sur un corps valué non discret* K, *et u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Supposons que* E *soit complet. Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *u est un morphisme strict surjectif.*

(ii) F *est complet et u est surjectif.*

(iii) *L'image de u n'est pas maigre* (TG, IX, p. 53) *dans* F.

(iv) *Pour tout voisinage* V *de* 0 *dans* E, $\overline{u(V)}$ *est un voisinage de* 0 *dans* F.

Montrons que (i) implique (ii). Supposons que u soit un morphisme strict surjectif, et soit N le noyau de u. Alors u induit un isomorphisme de E/N sur F. De plus, comme E est métrisable et complet, E/N est complet (TG, IX, p. 25, prop. 4), donc F est complet.

Montrons que (ii) implique (iii). Supposons que F soit complet et u surjectif. L'image de u est égale à F, donc n'est pas maigre dans F d'après le théorème de Baire (TG, IX, p. 55).

Le lemme suivant montre que (iii) implique (iv) :

Lemme 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret* K, *et soit u une application linéaire continue de* E *dans* F *dont l'image n'est pas maigre. Pour tout voisinage* V *de* 0 *dans* E, $\overline{u(V)}$ *est un voisinage de* 0 *dans* F.

Soit W un voisinage équilibré de 0 dans E tel que $W + W \subset V$ (I, p. 7, prop. 4). Soit d'autre part α un élément de K tel que $|\alpha| > 1$; alors E est la réunion des ensembles $\alpha^n W$ pour n parcourant **N** : en effet, pour tout $x \in E$, il existe $\beta \in K$ tel que $x \in \beta W$ (I, p. 7, prop. 4) et il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $|\beta| < |\alpha|^n$, d'où $x \in \alpha^n W$ puisque W est équilibré. Par suite, $u(E)$ est réunion de la suite des ensembles $u(\alpha^n W) = \alpha^n u(W)$, et comme $u(E)$ n'est pas maigre dans F, l'un au moins des ensembles $\alpha^n \overline{u(W)}$ a un point intérieur (TG, IX, p. 53, déf. 2). Soit y_0 un point intérieur de $\overline{u(W)}$; on a $-u(W) = u(W)$, d'où $-\overline{u(W)} = \overline{u(W)}$ et par suite $0 = y_0 + (-y_0)$ est un point intérieur de $\overline{u(W)} + \overline{u(W)}$. Comme l'addition est une application continue de $F \times F$ dans F, l'ensemble $\overline{u(W)} + \overline{u(W)}$ est contenu dans l'adhérence de l'ensemble

$$u(W) + u(W) = u(W + W) \subset u(V) ;$$

par suite, $\overline{u(V)}$ est un voisinage de 0 dans F.

Dans l'énoncé suivant, on convient que, dans tout espace métrique, $B_r(x)$ désigne la boule *fermée* de centre x et de rayon r.

Lemme 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces métriques*, E *étant en outre supposé complet. Soit u une application continue de* E *dans* F, *ayant la propriété suivante : quel que soit le nombre* $r > 0$, *il existe un nombre* $\rho(r) > 0$ *tel que, pour tout* $x \in E$, *on ait*

$$B_{\rho(r)}(u(x)) \subset \overline{u(B_r(x))} .$$

Dans ces conditions, pour tout $a > r$, *l'image* $u(B_a(x))$ *contient la boule* $B_{\rho(r)}(u(x))$.

Soit en effet (r_n) une suite infinie de nombres > 0 telle que $r_1 = r$ et $a = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$. Pour chaque indice n, il existe un nombre $\rho_n > 0$ (avec $\rho_1 = \rho(r)$) tel que

$$B_{\rho_n}(u(x)) \subset \overline{u(B_{r_n}(x))}$$

pour tout $x \in E$; on peut toujours supposer que $\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0$.

Soit x_0 un point de E, et soit y un point de $B_{\rho(r)}(u(x_0))$. Nous allons montrer que y appartient à $u(B_a(x_0))$.

Pour cela, nous allons déterminer par récurrence une suite $(x_n)_{n>0}$ de points de E telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ et $u(x_n) \in B_{\rho_{n+1}}(y)$. Si les x_i sont déterminés pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et satisfont à ces relations, on a $y \in B_{\rho_n}(u(x_{n-1}))$; comme

$$B_{\rho_n}(u(x_{n-1})) \subset \overline{u(B_{r_n}(x_{n-1}))} ,$$

il existe un point $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ dont l'image $u(x_n)$ appartient au voisinage $B_{\rho_{n+1}}(y)$ de y, ce qui démontre l'existence de la suite (x_n).

La suite (x_n) est une suite de Cauchy dans E, car la distance de x_n à x_{n+p} est majorée par $r_{n+1} + r_{n+2} + \cdots + r_{n+p}$, qui est arbitrairement petit dès que n est assez grand. Comme E est complet, la suite (x_n) converge vers un point $x \in E$, et la distance de x_0 à x est majorée par $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a$, donc $x \in B_a(x_0)$. Mais comme u est continue, la suite $(u(x_n))$ converge vers $u(x)$; or on a $u(x_n) \in B_{\rho_{n+1}}(y)$, donc $y = u(x)$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Supposons que u satisfasse à la condition (iv). Munissons chacun des espaces E et F d'une distance invariante par translation et définissant sa topologie (I, p. 16). Par hypothèse, l'ensemble $\overline{u(B_r(0))}$ est un voisinage de 0 pour tout nombre $r > 0$, et il existe donc un nombre $\rho(r) > 0$ tel que $B_{\rho(r)}(0) \subset \overline{u(B_r(0))}$. Par translation, on en conclut que $B_{\rho(r)}(u(x))$ est contenue dans $\overline{u(B_r(x))}$ pour tout $r > 0$ et tout $x \in E$. D'après le lemme 2, pour tout couple (a, r) de nombres réels tel que $a > r > 0$, on a $B_{\rho(r)}(0) \subset u(B_a(0))$, donc u est un morphisme strict de E sur F. On a prouvé que (iv) implique (i).

COROLLAIRE 1. — *Si* E *et* F *sont deux espaces vectoriels métrisables et complets sur un corps valué non discret, toute application linéaire continue et bijective u de* E *sur* F *est un isomorphisme.*

En particulier, si E et F sont des espaces *normés* complets, il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|u(x)\| \geqslant a.\|x\|$ pour tout $x \in E$.

COROLLAIRE 2. — *Soient* E *un espace vectoriel sur un corps valué non discret,* $\mathscr{T}_1$ *et* $\mathscr{T}_2$ *deux topologies sur* E *compatibles avec sa structure d'espace vectoriel et pour chacune desquelles* E *est métrisable et complet. Si* $\mathscr{T}_1$ *et* $\mathscr{T}_2$ *sont comparables, elles sont identiques.*

COROLLAIRE 3. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels métrisables et complets sur un corps valué non discret. Pour qu'une application linéaire continue u de* E *dans* F *soit un morphisme strict, il faut et il suffit que* u(E) *soit fermé dans* F.

La condition est nécessaire, car si u est un morphisme strict, u(E), isomorphe au quotient $E/u^{-1}(0)$, est complet (I, p. 17) donc fermé dans F. La condition est suffisante, car si u(E) est fermé dans F, c'est un espace vectoriel métrisable et complet, donc u est un morphisme strict de E sur u(E) en vertu du th. 1.

COROLLAIRE 4. — *Soit* E *un espace vectoriel métrisable et complet sur un corps valué non discret. Si* M *et* N *sont deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires (algébriques) dans* E, E *est somme directe topologique de* M *et de* N.

En effet, $M \times N$ est un espace vectoriel métrisable et complet, et l'application $(y, z) \mapsto y + z$ de $M \times N$ sur E est continue et bijective, donc un isomorphisme (cor. 1).

COROLLAIRE 5 (théorème du graphe fermé). — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels métrisables et complets sur un corps valué non discret. Pour qu'une application linéaire u* *de* E *dans* F *soit continue, il faut et il suffit que son graphe dans l'espace produit* E × F *soit fermé.*

La condition est nécessaire, le graphe d'une application continue dans un espace séparé étant toujours fermé (TG, I, p. 53, cor. 2). Pour voir qu'elle est suffisante, remarquons qu'elle entraîne que le graphe G de u, sous-espace vectoriel fermé de l'espace métrisable et complet E × F, est lui-même métrisable et complet. La projection $z \mapsto \mathrm{pr}_1(z)$ de G sur E est une application linéaire continue et bijective, donc un isomorphisme (cor. 1) ; comme son application réciproque est $x \mapsto (x, u(x))$, u est continue dans E.

On peut encore exprimer ce corollaire sous la forme suivante : si, pour toute suite (x_n) de points de E qui converge vers 0 et *est telle que la suite* $(u(x_n))$ *ait une limite* y, on a nécessairement $y = 0$, alors u est continue.

Exemple. — Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions numériques définies dans $\mathrm{I} = [0, 1]$; soit $\|f\|$ une norme sur E telle que E, muni de cette norme, soit *complet*, et que sa topologie soit plus fine que la topologie de la convergence simple. Supposons en outre que E contienne l'ensemble $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ des fonctions indéfiniment dérivables dans I ; nous allons montrer qu'il existe alors un entier $k \geqslant 0$ tel que E contienne l'ensemble $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$ de toutes les fonctions admettant une dérivée k-ième continue dans I.

Pour tout couple d'entiers $m > 0$, $n \geqslant 0$, soit V_{mn} l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ telles que $|f^{(h)}(x)| \leqslant 1/m$ pour $0 \leqslant h \leqslant n$ et pour tout $x \in \mathrm{I}$; on vérifie aussitôt que les V_{mn} forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie métrisable compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$; en outre, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ est *complet* pour cette topologie (FVR, II, p. 2, th. 1). Soit u l'application canonique de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ dans E ; montrons que u est *continue.* En vertu du cor. 5 de I, p. 19, il suffit de prouver que, si une suite (f_n) converge vers 0 dans $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ et a une limite f dans E, on a nécessairement $f = 0$, ce qui est immédiat, puisque f est par hypothèse limite simple de (f_n). Il existe donc un entier $k \geqslant 0$ et un nombre $a > 0$ tels que la relation

$$p_k(f) = \sup_{\substack{x \in \mathrm{I} \\ 0 \leqslant h \leqslant k}} |f^{(h)}(x)| \leqslant a$$

entraîne $\|f\| \leqslant 1$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$.

Mais p_k est une norme sur l'espace $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$, et $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ est un sous-espace partout dense de $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$ pour cette norme (l'ensemble des polynômes étant déjà partout dense dans $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$, comme il résulte aussitôt du th. de Weierstrass-Stone). Comme, en vertu de ce qui précède, l'application identique de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ (muni de la norme p_k) dans E est continue, elle se prolonge par continuité à l'espace $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$ tout entier (parce que E est complet), ce qui démontre notre assertion.

PROPOSITION 1. — *Soient* E, F *deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret* K. *On suppose que* :

1) E *est métrisable et complet.*

2) *Il existe une suite* (F_n) *d'espaces vectoriels métrisables et complets sur* K *et, pour tout* n, *une application linéaire injective et continue* v_n *de* F_n *dans* F *telles que* F *soit réunion des sous-espaces* $v_n(\mathrm{F}_n)$.

Soit alors u *une application linéaire de* E *dans* F. *Si le graphe de* u *est fermé dans* E × F, *il existe un entier* n *et une application linéaire continue* u_n *de* E *dans* F_n *tels que* $u = v_n \circ u_n$ (ce qui entraîne que u est *continue* et que $u(\mathrm{E}) \subset v_n(\mathrm{F}_n)$).

Soit G le graphe de u dans E × F. Pour tout n, considérons l'application linéaire continue $w_n : (x, y) \mapsto (x, v_n(y))$ de $E \times F_n$ dans $E \times F$; comme G est fermé, $w_n^{-1}(G) = G_n$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F_n$; si p_n est la restriction à G_n de la première projection pr_1, on a $p_n(G_n) = u^{-1}(v_n(F_n))$. Comme p_n est continue et G_n complet (puisque G_n est fermé dans l'espace complet $E \times F_n$), $p_n(G_n)$ est ou bien maigre dans E, ou bien égal à E en vertu du th. 1. Mais par hypothèse E est réunion des $p_n(G_n)$, et comme E est complet, les $p_n(G_n)$ ne peuvent être tous maigres dans E en vertu du th. de Baire (TG, IX, p. 55, th. 1). Donc il existe un entier n tel que $p_n(G_n) = E$, autrement dit $u(E) \subset v_n(F_n)$. En outre, comme v_n est injective, G_n est le graphe d'une application linéaire u_n de E dans F_n, et en vertu du th. du graphe fermé (I, p. 19, cor. 5) u_n est *continue* ; il résulte alors des définitions que $u = v_n \circ u_n$. C.Q.F.D.

Exercices

§ 1

1) Soit $E_0 = \mathbf{Q}_p^{\mathbf{N}}$ l'espace vectoriel sur le corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ (TG, III, p. 84, exerc. 23), produit d'une infinité dénombrable de facteurs identiques à $\mathbf{Q}_p$. Soit $P \subset E_0$ l'ensemble $\mathbf{Z}_p^{\mathbf{N}}$, et soit E le sous-espace vectoriel de E_0 engendré par P. On considère sur le groupe additif P la topologie compacte produit des topologies des facteurs $\mathbf{Z}_p$, et on désigne par $\mathfrak{B}$ le filtre des voisinages de 0 dans P pour cette topologie. Montrer que $\mathfrak{B}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans E pour une topologie $\mathscr{T}$ compatible avec la structure de groupe additif de E, qui vérifie les axiomes ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}}$) et ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{III}}$), mais non ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}}$) (prouver que l'homothétie $x \mapsto x/p$ n'est pas continue dans E).

2) Soient K un corps topologique non discret, K_0 le corps K muni de la topologie discrète. La topologie discrète sur K_0 est compatible avec sa structure de groupe additif, et, lorsqu'on considère K_0 comme un K-espace vectoriel, elle vérifie les axiomes ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}}$) et ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{III}}$), mais non ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}}$).

3) Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, soit G_α le groupe topologique $\mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z}$, et soit G le groupe topologique produit $\prod_\alpha G_\alpha$ (α parcourant l'ensemble des nombres > 0). Pour tout $x \in \mathbf{R}$, soit $t_\alpha(x)$ l'image canonique de x dans G_α ; l'application $\varphi : x \mapsto (t_\alpha(x))$ est un homomorphisme injectif et continu de $\mathbf{R}$ dans G. On considère sur $\mathbf{R}$ la topologie image réciproque de celle de G par φ, et on désigne par E le groupe topologique obtenu en munissant $\mathbf{R}$ de cette topologie. Montrer que lorsque E est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, sa topologie vérifie les axiomes ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}}$) et ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}}$), mais non ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{III}}$).

4) Soit E un espace vectoriel sur un corps valué K ; on suppose E muni d'une topologie *métrisable* compatible avec sa structure de groupe additif. On suppose en outre que cette topologie vérifie les axiomes ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}}$) et ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}}$) ; montrer que si l'un des deux groupes métrisables K, E est *complet*, la topologie de E vérifie aussi ($\mathrm{EVT}'_{\mathrm{III}}$), et est par suite compatible avec la structure d'espace vectoriel de E (*cf.* TG, IX, p. 115, exerc. 21).

5) Soient K un corps valué commutatif non discret, S un ensemble infini quelconque.
a) Soit $D = (a_n)$ un ensemble infini dénombrable d'éléments de S. Pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$, soit u_λ l'élément de l'espace normé $\mathscr{B}_K(S)$ (I, p. 4) des applications bornées de S dans K, tel que $u_\lambda(a_n) = \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $u_\lambda(b) = 0$ pour $b \notin D$. Montrer que la famille (u_λ) est (algébriquement) libre.
b) En déduire que toute base de l'espace vectoriel $\mathscr{B}_K(S)$ est équipotente à K^S (en utilisant *a*), montrer que le cardinal de toute base de $\mathscr{B}_K(S)$ est au moins égal à Card (K) : remarquer d'autre part que $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_K(S)) = \mathrm{Card}(K^S)$ et utiliser A, II, p. 182, exerc. 22).
c) Montrer de la même manière que toute base de l'espace vectoriel $\ell^1_K(S)$ est équipotente à $(K \times S)^{\mathbf{N}}$.

6) Soit K un corps valué non discret. Montrer que, sur l'espace $\ell^1_K(\mathbf{N})$ des suites absolument sommables $x = (\xi_n)$ d'éléments de K, les normes $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|$ et $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$ ne sont pas équivalentes (*cf.* TG, IX, p. 32, prop. 8) ; montrer que $\ell^1_K(\mathbf{N})$, muni de la norme $\|x\|$, n'est jamais complet, même si K est complet ; quelle est son adhérence dans $\mathscr{B}_K(\mathbf{N})$?

¶ 7) * Soient A un anneau de valuation discrète, v la valuation normée du corps des fractions K de A ; on prend sur K la valeur absolue a^v, où $0 < a < 1$. Soit E un espace vectoriel normé sur K, dont la norme vérifie l'inégalité ultramétrique

$$\|x + y\| \leqslant \sup(\| x \|, \| y \|) .$$

a) On désigne par M l'ensemble des $x \in E$ tels que $\|x\| \leqslant 1$, par π une uniformisante de A ; M est un A-module, et $M/\pi M$ un espace vectoriel sur le corps résiduel $k = A/\pi A$ de A. Soit $(e_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'éléments de M telle que les images des e_λ dans $M/\pi M$ forment une base de ce k-espace vectoriel. Montrer que (e_λ) est une famille libre dans E et que le sous-espace vectoriel F de E engendré par (e_λ) est dense dans E.
b) Si, pour tout $x = \sum_\lambda \xi_\lambda e_\lambda$ dans F, on pose $\|x\|_1 = \sup_\lambda |\xi_\lambda|$, montrer que sur F les normes $\|x\|$ et $\|x\|_1$ sont équivalentes.
c) Supposons K complet. Déduire de *a*) et *b*) que si L est fini, le complété $\hat{E}$ de E est isomorphe à K^L ; si L est infini, $\hat{E}$ est isomorphe au sous-espace $\mathscr{C}^0_K(L)$ de $\mathscr{B}_K(L)$ formé des familles (ξ_λ) telles que $\lim \xi_\lambda = 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de L.
d) On suppose K et E complets ; soit d'autre part G un second espace normé complet sur K dont la norme vérifie l'inégalité ultramétrique. Montrer qu'en remplaçant au besoin la norme de $\mathscr{L}(E ; G)$ (TG, X, p. 23) par une norme équivalente, $\mathscr{L}(E ; G)$ est isométrique à l'espace vectoriel des familles $(y_\lambda)_{\lambda \in L}$ d'éléments de G telles que $\sup_{\lambda \in L} \|y_\lambda\| < +\infty$, muni de la norme $\sup_{\lambda \in L} \|y_\lambda\|$ (qui vérifie aussi l'inégalité ultramétrique). *

8) Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps topologique non discret K. Pour qu'il existe un voisinage du point (0, 0) de $K \times E$ tel que l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ soit uniformément continue dans ce voisinage, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage V_0 de 0 dans E tel que les ensembles λV_0 forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E lorsque λ parcourt l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K. Lorsque K est un corps valué non discret et que E est séparé, montrer que la structure uniforme de E est alors métrisable.

9) Généraliser la prop. 5 de I, p. 8 au cas où les espaces E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et F sont des espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique commutatif non discret quelconque.

10) Soit E un espace vectoriel topologique séparé et complet sur un corps valué non discret K. Soient F un sous-espace vectoriel de E, et $\mathscr{T}$ la topologie sur F, induite par la topologie $\mathscr{T}'$ de E ; soit $\mathfrak{B}$ un système fondamental de voisinages fermés et équilibrés de 0 pour $\mathscr{T}$. Soit F_0 le sous-espace vectoriel de E, engendré par les adhérences $\overline{V}$ dans E (pour $\mathscr{T}'$) des ensembles $V \in \mathfrak{B}$; les ensembles $\overline{V}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie $\mathscr{T}_0$ sur F_0, compatible avec la structure d'espace vectoriel de F_0 ; pour cette topologie, F_0 est complet, et la topologie induite par $\mathscr{T}_0$ sur F est égale à $\mathscr{T}$.

11) Dans un espace vectoriel topologique E sur un corps topologique non discret K, il existe un système fondamental $\mathfrak{B}$ de voisinages fermés de 0, satisfaisant aux conditions (EV_{II}) et (EV_{III}), ainsi qu'aux deux suivantes :
(EV_{Ia}) Quel que soit $V \in \mathfrak{B}$, il existe $W \in \mathfrak{B}$ et un voisinage U de 0 dans K tels que $UW \subset V$.
(EV_{Ib}) Quels que soient $x \in E$ et $V \in \mathfrak{B}$, il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda x \in V$.

Réciproquement, soit E un espace vectoriel sur K et soit $\mathfrak{B}$ une base de filtre sur E satisfaisant aux conditions (EV_{Ia}), (EV_{Ib}), (EV_{II}) et (EV_{III}). Montrer qu'il existe une topologie et une seule sur E, compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, et pour laquelle $\mathfrak{B}$ est un système fondamental de voisinages de 0.

12) Soient K un corps commutatif *discret*, E le corps des fractions de l'anneau de séries formelles $A = K[[X, Y]]$ en deux indéterminées sur K (A, IV, p. 36). Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $V_n \subset A$ l'ensemble des séries formelles d'ordre (total) au moins égal à n. Montrer que, dans E, les ensembles V_n forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E (sur K), pour laquelle E est métrisable et complet ; si en outre K est un corps fini, E est localement compact. Montrer que l'application K-bilinéaire $(u, v) \mapsto uv$ de $E \times E$ dans E est continue au point (0, 0), mais qu'il existe des $u_0 \in E$ tels que $v \mapsto u_0 v$ ne soit pas continue dans E (par exemple, $u_0 = 1/X$).

13) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie sur **R**, et soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble de toutes les parties équilibrées et absorbantes de E. Montrer que $\mathfrak{T}$ ne satisfait pas à l'axiome (EV_{III}) (autrement dit, n'est pas un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie compatible avec la structure de groupe additif de E). Pour cela, considérer une famille libre infinie $(e_n)_{n \geqslant 1}$ dans E ; pour tout entier $n \geqslant 1$, soit A_n l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ tels que $|t_i| \leqslant 1/n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; soient A la réunion des A_n, V un sous-espace supplémentaire du sous-espace de E engendré par les e_n, C l'ensemble $A + V$; montrer qu'il n'existe aucun ensemble $M \in \mathfrak{T}$ tel que $M + M \subset C$.

¶ 14) Soient K un corps topologique séparé, $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille *infinie* d'espaces vectoriels topologiques séparés sur K, non réduits à 0. On considère sur $F = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ la topologie $\mathscr{T}$, compatible avec la structure de groupe additif de F, pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé des produits $\prod_{\iota \in I} V_\iota$, où, pour *chaque* $\iota \in I$, V_ι est un voisinage quelconque de 0 dans E_ι (topologie strictement plus fine que la topologie produit ; *cf.* TG, III, p. 70, exerc. 23). On désigne par $\mathscr{T}_0$ la topologie induite par $\mathscr{T}$ sur le sous-espace $E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ de F ; E est fermé dans F pour la topologie $\mathscr{T}$, et si chacun des E_ι est complet, F est complet pour la topologie $\mathscr{T}$, donc E pour $\mathscr{T}_0$ (TG, III, p. 73, exerc. 10).

a) Montrer que s'il existe dans K un voisinage de 0 borné à droite (TG, III, p. 81, exerc. 12) (en particulier, si K est un corps valué), la topologie $\mathscr{T}_0$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. Si en outre K n'est pas discret, E n'est un espace de Baire pour aucune topologie plus fine que $\mathscr{T}_0$ et compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

b) Inversement, s'il n'existe dans K aucun voisinage de 0 borné à droite (voir *c*)), donner un exemple de famille (E_ι) telle que la topologie $\mathscr{T}_0$ ne soit pas compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

c) Soit $A = \mathbf{R}[X]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée sur **R**. Pour toute suite $s = (\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres réels > 0, on désigne par V_s l'ensemble des polynômes $\sum_k a_k X^k \in A$ tels que $|a_k| < \varepsilon_k$ pour tout k. Soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble des V_s où s parcourt l'ensemble des suites de nombres > 0. Montrer que $\mathfrak{T}$ est un système fondamental de voisinages symétriques de 0 pour une topologie compatible avec la structure d'anneau de A. Soit $K = \mathbf{R}(X)$ le corps des fractions de A ; on désigne par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties de K de la forme $U(1 + U)^{-1}$, où U parcourt l'ensemble des V_s ne contenant pas 1 ; montrer que $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie compatible avec la structure de corps de K, et qu'il n'existe dans K aucun voisinage de 0 qui soit borné.