

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

VARIÉTÉS
DIFFÉRENTIELLES
ET ANALYTIQUES

Fascicule de résultats

 Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1967 et 1971

© Herman, Paris, 1971

© N. Bourbaki, 1981

© N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

ISBN-10 3-540-34396-2 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-34396-7 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

AVERTISSEMENT

Ce nouveau tirage du fascicule de résultats des variétés reprend sans changement les ouvrages parus antérieurement (fascicules XXXIII et XXXXI) en les regroupant en un seul volume.

Nancago, automne 1982

N. BOURBAKI

PREMIÈRE PARTIE

**Paragraphes 1 à 7
(97 pages)**

INTRODUCTION

Ce fascicule rassemble les notions fondamentales et les principaux résultats de la théorie des variétés différentielles (sur le corps des nombres réels) et des variétés analytiques (sur un corps valué complet non discret). Il ne contient pas de démonstrations.

Les définitions et les résultats des six premiers livres sont supposés connus.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

(paragraphes 1 à 7)

Corps de base

Dans tout ce fascicule, la lettre K désigne, soit le corps valué $\mathbf{R}$ des nombres réels, soit le corps valué $\mathbf{C}$ des nombres complexes, soit un corps valué complet commutatif non discret à valeur absolue ultramétrique (*Top. Gén.*, ch. IX, 3^{ème} éd., § 3).

Espaces vectoriels topologiques

Lorsque K est différent de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, nous appellerons *semi-norme* (resp. *norme*) sur un espace vectoriel F sur K une *ultra-semi-norme* (resp. une *ultra-semi-norme* qui est une norme) sur F (*Esp. Vect. Top.*, ch. II, 2^e éd., § 1). Si γ est une semi-norme sur F , et si $x \in F$, on écrira parfois $\|x\|_\gamma$ au lieu de $\gamma(x)$.

On appellera *espace normable* un espace vectoriel topologique sur K dont la topologie peut être définie par une seule norme, et *espace de Banach* un espace normable complet¹. On appellera *espace polynormé* un espace vectoriel topologique sur K dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes; lorsque $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, cette notion coïncide avec celle d'espace localement convexe.

Si E et F sont des espaces polynormés, on notera $\mathcal{L}_m(E; F)$ l'espace des applications m -linéaires continues de E^m dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E^m ; c'est un espace polynormé. Si de plus E est normé, et si γ est une semi-norme continue sur F , et si $u \in \mathcal{L}_m(E; F)$, on note $\|u\|_\gamma$ la borne inférieure des nombres réels $a \geq 0$ tels que

$$\|u(x_1, \dots, x_m)\|_\gamma \leq a \|x_1\| \dots \|x_m\|$$

quels que soient $x_1, \dots, x_m$ dans E .

¹ Cette définition diffère de celle donnée dans *Esp. Vect. Top.*, ch. I, § 1, où l'on appelle espace de Banach un espace *normé* complet.

Multi-indices

Soit I un ensemble. Pour $\alpha = (\alpha_i)$ and $\beta = (\beta_i)$ appartenant à $\mathbf{N}^{(I)}$, on pose (cf. *Alg.*, ch. III, 3^e éd., début du chapitre):

$$|\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha_i$$

$$\alpha! = \prod_{i \in I} \alpha_i!$$

$$\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I}$$

$$((\alpha, \beta)) = \prod_{i \in I} \frac{(\alpha_i + \beta_i)!}{\alpha_i! \beta_i!}.$$

On pose $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in I$, ce qui équivaut à l'existence de $\gamma \in \mathbf{N}^{(I)}$ tel que $\beta = \alpha + \gamma$; cet élément γ est alors unique, et se note $\beta - \alpha$.

Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments commutant deux à deux dans un anneau A possédant un élément unité 1, on pose:

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i} \quad (\text{en convenant que } x^0 = 1).$$

On a $\mathbf{x}^{\alpha+\beta} = \mathbf{x}^\alpha \cdot \mathbf{x}^\beta$.

Pour $i \in I$, on note ε_i l'élément de $\mathbf{N}^{(I)}$ dont toutes les coordonnées sont nulles, à l'exception de celle d'indice i qui est égale à 1. On a $\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i \varepsilon_i$ pour tout élément $\alpha = (\alpha_i)$ de $\mathbf{N}^{(I)}$.

Restriction d'une application

Si f est une application d'un ensemble A dans un ensemble B , et si C est une partie de A , on note $f|C$ la restriction de f à C .

Les éléments ∞ et ω

On adjoint à l'ensemble des entiers deux éléments notés ∞ et ω . La relation d'ordre entre entiers est prolongée par la convention

$$n < \infty < \omega \quad \text{pour tout entier } n.$$

On pose:

$$\infty + n = n + \infty = \infty \quad \text{et} \quad \omega + n = n + \omega = \omega, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

La lettre r désigne soit un entier ≥ 1 , soit l'un des éléments ∞ ou ω . Lorsque $\mathbf{K} \neq \mathbf{R}$, la lettre r désigne toujours l'élément ω . Lorsque $r = \infty$ (resp. $r = \omega$), on pose $r - k = r$ pour tout entier $k \geq 1$.

Fascicule de résultats

§ 1. Fonctions différentiables

Dans ce paragraphe, la lettre E désigne un espace vectoriel topologique normable sur K ; la lettre F désigne un espace polynormé séparé sur K .

1.1 Ordre de contact de deux fonctions en un point

1.1.1. Soient X un espace topologique et θ une fonction numérique positive définie dans un voisinage d'un point x_0 de X . On dit qu'une fonction f , définie dans un voisinage de x_0 et à valeurs dans F , est *négligeable devant θ* en x_0 si la condition suivante est satisfaite :

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute semi-norme γ continue sur F , il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f et θ sont définies et tel que

$$\|f(x)\|_\gamma \leq \varepsilon \theta(x) \quad \text{pour tout } x \in V.$$

Pour que f soit négligeable devant θ , il suffit que cette condition soit satisfaite pour une famille de semi-normes γ définissant la topologie de F . Le fait que f soit négligeable ou non devant θ en x_0 ne dépend que des germes de f et de θ en x_0 . On désigne par $o_{x_0}(\theta)$ (ou $o(\theta)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur x_0) l'ensemble des germes en x_0 de fonctions négligeables devant θ en x_0 : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des germes en x_0 d'applications à valeurs dans F . Si f est négligeable devant θ , on écrira par abus de notations, $f \in o_{x_0}(\theta)$ ou encore $f(x) \in o(\theta(x))$ lorsque x tend vers x_0 .

Si f et g sont deux applications d'un voisinage de x_0 dans F , on écrira encore $f \equiv g \bmod o(\theta)$ si $f - g$ est négligeable devant θ .

Supposons que K soit égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et que x_0 soit adhérent à l'ensemble Y des points de X où θ est définie et non nulle. La relation $f \in o(\theta)$ signifie alors que $f(x)/\theta(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 en restant dans Y , et que $\theta(x) = 0$ entraîne $f(x) = 0$.

1.1.2. Soient f et g deux fonctions à valeurs dans F , définies au voisinage d'un point x_0 de E . Si m est un entier positif, on dit que f et g ont un *contact d'ordre $\geq m$* en x_0 si l'on a :

$$f(x) - g(x) \in o(\|x - x_0\|^m) \quad \text{pour } x \text{ tendant vers } x_0$$

quelle que soit la norme choisie pour définir la topologie de E . Pour cela, il suffit que la relation précédente soit vérifiée pour une norme définissant la topologie de E . S'il en est ainsi, on a $f(x_0) = g(x_0)$.

Si f et g prennent la même valeur en x_0 , on appelle *ordre de contact* de f et g en x_0 la borne supérieure (finie ou égale à $+\infty$) des entiers m tels que f et g aient un contact d'ordre $\geq m$ en x_0 .

1.1.3. L'ordre de contact de f et g en x_0 ne dépend que des germes de ces fonctions au point x_0 . On peut donc parler de l'ordre de contact de deux germes φ et ψ d'applications de E dans F au point x_0 . La relation « φ et ψ ont un contact d'ordre $\geq m$ » est une relation d'équivalence compatible avec la structure vectorielle.

1.2. Fonctions dérivables en un point

1.2.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage du point x_0 de E et à valeurs dans F . On dit que f est *dérivable en x_0* s'il existe une fonction affine continue v de E dans F ayant en x_0 un contact d'ordre ≥ 1 avec f . Cette application v est unique; il existe une application linéaire continue et une seule, notée $Df(x_0)$, de E dans F telle que :

$$v(x) = v(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Si l'on choisit une norme sur E , ceci équivaut à :

$$f(x_0 + h) \equiv f(x_0) + Df(x_0) \cdot h \quad \text{mod } o(\|h\|) \quad \text{pour } h \text{ tendant vers } 0,$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot h\|_\gamma}{\|h\|} = 0$$

pour toute semi-norme γ continue sur F .

L'élément $Df(x_0)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ s'appelle la *dérivée* de f en x_0 . On écrit parfois $D_h f(x_0)$ pour $Df(x_0) \cdot h$; c'est un élément de F défini par la relation :

$$D_h f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

1.2.2. On dit qu'une fonction f est *strictement dérivable en x_0* si elle est dérivable en x_0 et si l'on a, pour toute norme définissant la topologie de E , la relation :

$$f(y) - f(z) \equiv Df(x_0) \cdot (y - z) \quad \text{mod } o(\|y - z\|)$$

pour (y, z) tendant vers (x_0, x_0) dans $E \times E$. Pour cela, il suffit que cette condition soit satisfaite pour une norme définissant la topologie de E . Supposons de plus E et F normés; pour tout nombre $c > \|Df(x_0)\|$, il

existe alors un voisinage V de x_0 tel que $\|f(y) - f(z)\| \leq c \cdot \|y - z\|$ pour y, z dans V ; ceci entraîne que f est uniformément continue dans V .

1.2.3. Le fait pour une fonction f d'être dérivable ou strictement dérivable en x_0 ne dépend que du germe de f en x_0 . Les germes de fonctions dérivables en x_0 forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de l'espace de tous les germes et l'application $f \mapsto Df(x_0)$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(E; F)$ est linéaire. Les germes de fonctions strictement dérivables en x_0 forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

1.2.4. Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 .

1.2.5. Lorsque $E = K$, l'application $u \mapsto u(1)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E; F)$ sur F ; si la fonction f est dérivable en x_0 , l'élément

$$f'(x_0) = Df(x_0) \cdot 1$$

n'est autre que la dérivée de f en x_0 au sens donné dans *Fonct. Var. Réelle*, chap. I, § 1, n° 6, remarque 2.

1.3. Composition des fonctions dérivables

1.3.1. Supposons F normable. Soient $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$, U un voisinage de x_0 et V un voisinage de y_0 ; enfin soit f une application de U dans V , dérivable en x_0 , avec $f(x_0) = y_0$. Si g est une application de V dans un espace vectoriel polynormé séparé G , dérivable en y_0 , l'application $g \circ f$ de U dans G est dérivable en x_0 , et l'on a :

$$(1) \quad D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \circ Df(x_0).$$

Si f et g sont strictement dérivables, il en est de même de $g \circ f$.

1.3.2. Soit f une application définie au voisinage d'un point x_0 de E et à valeurs dans F , dérivable en x_0 ; si u est une application linéaire continue de F dans un espace polynormé séparé G , la fonction $u \circ f$ est dérivable en x_0 et l'on a :

$$(2) \quad D(u \circ f)(x_0) = u \circ Df(x_0).$$

1.3.3. Supposons que F soit produit d'une famille $(F_i)_{i \in I}$ d'espaces vectoriels polynormés séparés; pour tout i dans I , soit f_i une application définie dans un voisinage U d'un point x_0 de E et à valeurs dans F et soit $f = (f_i)_{i \in I}$. Pour que f soit dérivable (resp. strictement dérivable) en x_0 , il faut et il suffit que tous les f_i le soient; on a :

$$(3) \quad D_h f(x_0) = (D_h f_i(x_0))_{i \in I} \quad \text{pour tout } h \text{ dans } E.$$

1.3.4. Si $E = K$, on peut remplacer $Df(x_0)$ par $f'(x_0)$ et $D_h f_i(x_0)$ par $f'_i(x_0)$ dans les formules (1) et (3).

1.4. Produit de fonctions dérivables

1.4.1. Soient $F_1, \dots, F_m$ des espaces polynormés séparés et u une application m -linéaire continue de $F_1 \times \dots \times F_m$ dans F . Soit U un voisinage d'un point x_0 de E , et soit f_i une application de U dans F_i (pour $1 \leq i \leq m$). Si les f_i sont dérivables (resp. strictement dérivables) en x_0 , il en est de même de $u(f_1, \dots, f_m) = g$ et l'on a :

$$(4) \quad D_h g(x_0) = \sum_{j=1}^m u(f_1(x_0), \dots, D_h f_j(x_0), \dots, f_m(x_0)) \quad \text{pour } h \text{ dans } E,$$

ce que l'on écrira plus succinctement :

$$(5) \quad Dg = \sum_{j=1}^m u(f_1, \dots, Df_j, \dots, f_m).$$

En particulier, pour $m = 2$, on a :

$$(6) \quad Du(f_1, f_2) = u(Df_1, f_2) + u(f_1, Df_2).$$

Pour $m = 1$, on retrouve 1.3.2.

1.4.2. Lorsque $E = K$, on peut remplacer Dg par g' et Df_j par f'_j dans les formules (4) à (6).

1.5. Premières variantes du théorème des fonctions implicites

Supposons que E et F sont des espaces de Banach et soient x_0 un point de E , U un voisinage de x_0 et f une application de U dans F . On suppose de plus que f est *strictement dérivable* en x_0 .

1.5.1. Si $Df(x_0)$ est un *isomorphisme* de E sur F , il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 contenu dans U et un voisinage ouvert V_0 de $f(x_0)$ tels que $f|U_0$ soit un homéomorphisme de U_0 sur V_0 . L'application $g : V_0 \rightarrow U_0$ réciproque de $f|U_0$ est strictement dérivable au point $f(x_0)$ et l'on a :

$$Dg(f(x_0)) = Df(x_0)^{-1}.$$

1.5.2. Si $Df(x_0)$ est une application *surjective* de E sur F , il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 contenu dans U , tel que $f|U_0$ soit une application ouverte.

1.5.3. Si $Df(x_0)$ est *injective et d'image fermée*, il existe un voisinage fermé U_0 de x_0 contenu dans U , tel que $f|U_0$ soit un homéomorphisme de U_0 sur une partie fermée de F .

1.6. Dérivées partielles

1.6.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage U du point x_0 de E et à valeurs dans F . Soient X un sous-espace vectoriel de E et V l'ensemble des points x de X tels que $x_0 + x \in U$; posons $g(x) = f(x_0 + x)$ pour $x \in V$. On dit que f admet une *dérivée partielle suivant X en x_0* si g admet une dérivée en 0 ; cette dérivée se note $D_X f(x_0)$; c'est une application linéaire continue de X dans F . Si f est dérivable en x_0 , elle admet une dérivée partielle suivant X en x_0 et cette dérivée partielle est la restriction de $Df(x_0)$ à X .

1.6.2. Supposons que E soit produit d'une famille finie d'espaces vectoriels normés E_i ($1 \leq i \leq n$) identifiés canoniquement à des sous-espaces de E ; soit $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ dans E et soit U un voisinage de x_0 dans E ; enfin soit f une application de U dans F . On note $D_i f(x_0)$ la dérivée au point x_0^i , si elle existe, de l'application $z_i \mapsto f(x_0^1, \dots, z_i, \dots, x_0^n)$ définie au voisinage de x_0^i dans E_i et à valeurs dans F . C'est un élément de $\mathcal{L}(E_i; F)$ que l'on appelle la *i-ème dérivée partielle de f en x_0* . Si f est dérivable en x_0 , les n dérivées partielles existent, et déterminent $Df(x_0)$ par la formule:

$$Df(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) \cdot h_i \quad \text{pour } h = (h_1, \dots, h_n) \text{ dans } E.$$

1.6.3. Plus particulièrement, soit $E = K^n$. Si les dérivées partielles de f en x_0 existent, on note $\partial_i f(x_0)$ l'élément $D_i f(x_0) \cdot 1$ de F . L'écriture suivante est souvent usitée; supposons qu'on ait choisi une notation pour les fonctions coordonnées sur K^n , par exemple u_i désigne la *i-ème* projection de K^n sur K . On écrit alors:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u_i} \right|_{x=x_0}$$

au lieu de $\partial_i f(x_0)$.

1.6.4. Soient $E = K^n$ et $F = K^m$; supposons que la fonction $f = (f_1, \dots, f_m)$ à valeurs dans F soit dérivable au point x_0 de E . Les dérivées partielles $a_{ji} = \partial_i f_j(x_0)$ existent alors (ce sont des éléments de K). La matrice à m lignes et n colonnes formée des a_{ji} (élément de la ligne d'indice j et de la colonne d'indice i) s'appelle la *matrice jacobienne* de f en x_0 ; c'est la matrice de l'application linéaire $Df(x_0)$ de K^n dans K^m par rapport aux bases canoniques de ces espaces.

1.7. Dérivées itérées

1.7.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point x_0 de E , à valeurs dans F . Si f est dérivable au voisinage de x_0 , sa dérivée Df est une application d'un voisinage de x_0 dans l'espace polynormé $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F . Soit p un entier ≥ 2 :

on dit que f est p fois dérivable en x_0 si f est dérivable au voisinage de x_0 et si sa dérivée Df est $(p-1)$ fois dérivable en x_0 . On définit alors la *dérivée p -ième* de f en x_0 : c'est l'application p -linéaire continue $D^p f(x_0)$ de E^p dans F , définie par:

$$D^p f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_p) = (D(D^{p-1}f)(x_0) \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_p).$$

On pose aussi $D^0 f = f$ et $D^1 f = Df$. Si f est p fois dérivable en x_0 et si q et s sont deux entiers tels que $q + s = p$, avec $s > 0$, alors f est q fois dérivable au voisinage de x_0 , la fonction $D^q f$ (à valeurs dans $\mathcal{L}_q(E; F)$) est s fois dérivable en x_0 , et on a:

$$D^{q+s} f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_{q+s}) = (D^s(D^q f)(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_s)) \cdot (h_{s+1}, \dots, h_{q+s})$$

relation que l'on écrit par abus de notation sous la forme:

$$D^{q+s} f = D^s D^q f.$$

1.7.2. Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-espaces vectoriels fermés de E , tels que E soit somme directe topologique des E_i . On définit alors, quand elle existe, la *dérivée partielle itérée* $D_{i_1} \dots D_{i_m} f$ d'une application f d'un voisinage de $x_0 \in E$ dans F ; c'est une application multilinéaire continue de

$$E_{i_1} \times \dots \times E_{i_m}$$

dans F , définie par récurrence sur l'entier $m \geq 1$ comme suit: si $D_{i_2} \dots D_{i_m} f(x)$ existe dans un voisinage de x_0 et possède une dérivée partielle suivant E_{i_1} , alors $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$ est donnée par:

$$D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_m) = (D_{i_1}(D_{i_2} \dots D_{i_m} f)(x_0) \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_m)$$

pour $h_k \in E_{i_k}$.

Si f est m fois dérivable en x_0 , alors la dérivée partielle $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$ existe et est égale à la restriction de $D^m f(x_0)$ au sous-espace $E_{i_1} \times \dots \times E_{i_m}$ de E^m . Par suite, $D^m f(x_0)$ est complètement déterminée par les dérivées partielles itérées d'ordre m en x_0 .

1.7.3. Supposons que E soit de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Posons $E_i = K e_i$ et soit f une application d'un voisinage de x_0 , à valeurs dans F . Si la dérivée partielle $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$ (avec les notations de 1.7.2) existe, on pose:

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f(x_0) = D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0) \cdot (e_{i_1}, \dots, e_{i_m}).$$

§ 2. Fonctions différentiables réelles

Dans ce paragraphe, on suppose que $K = \mathbb{R}$. La lettre E désigne un espace vectoriel *normé* sur $\mathbb{R}$; la lettre F désigne un espace vectoriel topologique localement convexe *séparé* sur $\mathbb{R}$.

2.1. Fonctions dérivables en un point

2.1.1. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 de E et à valeurs dans F . Soit u un élément de l'espace $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F . Pour que f soit dérivable en x_0 et u admette u pour dérivée, il faut et suffit que l'on ait

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)}{\|h\|} = 0.$$

2.1.2. Pour que f soit strictement dérivable en x_0 , il faut et suffit que l'on ait

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ h \neq k}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - Df(x_0) \cdot (h - k)}{\|h - k\|} = 0.$$

2.1.3. Soient F_1 et F_2 deux espaces localement convexes séparés et soit u une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans F , satisfaisant à la condition de continuité suivante :

(SC) Si $((a_n, b_n))$ est une suite d'éléments de $F_1 \times F_2$ convergeant vers un élément $(a, b) \in F_1 \times F_2$, alors la suite $(u(a_n, b_n))$ converge vers $u(a, b)$ dans F .

Soit f_i (pour $i = 1, 2$) une application d'un voisinage d'un point x_0 de E dans F_i . Si f_1 et f_2 sont dérivables en x_0 , alors $u(f_1, f_2)$ est dérivable en x_0 et l'on a :

$$D(u(f_1, f_2))(x_0) \cdot h = u(Df_1(x_0) \cdot h, f_2(x_0)) + u(f_1(x_0), Df_2(x_0) \cdot h)$$

pour tout $h \in E$.

2.2. Le théorème des accroissements finis

2.2.1. Soient x, y dans E , et $[x, y]$ le segment fermé joignant ces deux points. Soit de plus f une application d'un voisinage de $[x, y]$ dans l'espace F , dérivable en tout point de $[x, y]$. Alors $f(x) - f(y)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des points $Df(z) \cdot (x - y)$ pour z dans $[x, y]$.

2.2.2. Soient U un ouvert *connexe* de E , et f une application de U dans

F, admettant une dérivée nulle en tout point de U ; alors f est constante dans U .

2.2.3. Soient U un ouvert convexe de E , et f une application de U dans F , dérivable en tout point de U . Etant donné une semi-norme continue γ sur F et un nombre réel $M \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout x dans U , on a $\|Df(x)\|_\gamma \leq M$.
- (ii) Pour tout x et tout y dans U , on a $\|f(x) - f(y)\|_\gamma \leq M \cdot \|x - y\|$.

2.2.4. Soit U un voisinage d'un point x_0 de E et soit f une fonction définie dans le complémentaire de x_0 dans U , à valeurs dans F . Supposons que f admet une dérivée $Df(x)$ en tout point x de U , $x \neq x_0$, et que la fonction $x \mapsto Df(x)$ admet une limite D_0 quand x tend vers x_0 . Alors, si $\dim(E) \geq 2$, f a une limite en x_0 et la fonction f prolongée par continuité à U tout entier est dérivable de dérivée D_0 en x_0 ; il en est de même si $\dim(E) = 1$ et qu'on suppose que f a une limite en x_0 .

2.3. Fonctions de classe C^r ($r \neq \omega$)

2.3.1. Soient U un ouvert de E et f une application de U dans F . On définit la relation « f est de classe C^r » (pour $r \in \mathbb{N}$) par récurrence sur r de la manière suivante :

- 1) f est de classe C^0 si et seulement si elle est continue;
- 2) si r est un entier ≥ 1 , la fonction f est de classe C^r si et seulement si elle est dérivable en tout point de U et si l'application dérivée Df de U dans $\mathcal{L}(E; F)$ est de classe C^{r-1} .

Les fonctions de classe C^r sont aussi appelées *fonctions r fois continûment dérivables*.

On dit que f est de classe C^∞ (ou *indéfiniment dérivable*) si elle est de classe C^r pour tout entier r .

Si f est de classe C^r dans U , alors f est p fois dérivable pour tout entier $p \leq r$ et la fonction $D^p f$ est de classe C^{r-p} .

2.3.2. Les applications de classe C^r d'un ouvert U de E dans F forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^r(U; F)$ de l'espace de toutes les applications de U dans F . On a $\mathcal{C}^s(U; F) \subset \mathcal{C}^r(U; F)$ pour $s \geq r$.

2.3.3. Pour qu'une fonction f soit de classe C^1 dans un ouvert U de E , il faut et il suffit qu'elle soit strictement dérivable en tout point de U .

Si E est un produit d'espaces normés E_i , une application f d'un ouvert V de E dans F est de classe C^r si et seulement si f possède des dérivées partielles itérées $D_{i_1} \dots D_{i_m} f$ continues pour tout entier $m \leq r$.

2.3.4. Soit G un espace normé et soit U un ouvert de E . Soient V un ouvert de G , $g \in \mathcal{C}^r(U; G)$ et $f \in \mathcal{C}^r(V; F)$. Si $g(U) \subset V$, l'application $f \circ g$ de U dans F est de classe C^r .

Soient F_1 et F_2 deux espaces localement convexes séparés et u une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans F , hypocontinue par rapport à l'ensemble des parties bornées de F_1 (resp. F_2) (*Esp. Vect. Top.*, ch. III, § 4, n° 2). Soient U un ouvert de E et $f_i \in \mathcal{C}^r(U; F_i)$ (pour $i = 1, 2$). Alors la fonction $u(f_1, f_2)$ appartient à $\mathcal{C}^r(U; F)$. Si E est de dimension finie, il suffit de supposer que u satisfait à la condition (SC) du n° 2.1.3.

2.3.5. Si E est un produit d'espaces normés E_i ($1 \leq i \leq n$) et si f est une application n -linéaire continue de E dans F , alors f est de classe C^∞ et l'on a $D^p f = 0$ pour $p \geq n + 1$.

2.3.6. Supposons que E et F soient des espaces de Banach. Soit f une fonction de classe C^r (avec $r \geq 1$) définie dans un voisinage d'un point x_0 de E et à valeurs dans F . Soit $y_0 = f(x_0)$ et supposons que $Df(x_0)$ soit un isomorphisme de E sur F . Alors f induit un homéomorphisme g d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0 (1.5) et l'application réciproque de g est de classe C^r au voisinage de y_0 .

2.4. Dérivées des fonctions de classe C^r

2.4.1. Soit f une application de classe C^r d'un ouvert U de E dans F . Pour tout $x \in U$, et tout entier s avec $s \leq r$, l'application multilinéaire $D^s f(x)$ est symétrique.

2.4.2. Supposons de plus E de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Les dérivées partielles $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f$ dépendent symétriquement des indices $i_1, \dots, i_s$. Soit α_k le nombre de fois que l'indice k intervient dans la suite $i_1, \dots, i_s$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On pose alors :

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f$$

Lorsque les coordonnées relatives à la base $(e_1, \dots, e_n)$ sont notées $x_1, \dots, x_n$, on écrit aussi $\partial^\alpha f$ sous la forme :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

2.5. Formule de Taylor

2.5.1. Soit r un entier ≥ 1 et soit f une application de classe C^r d'un ouvert U de E dans F . Pour $x \in U$, $h \in E$ et $p \leq r$, convenons d'écrire $D^p f(x_0) \cdot h^p$ au lieu de $D^p f(x_0) \cdot (h, \dots, h)$. Si le segment $[x, x + h]$ est

contenu dans U , on a la formule (« formule de Taylor »):

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{p!} D^p f(x) \cdot h^p + v_r(x; h)$$

où le « reste » $v_r(x; h)$ est donné par :

$$v_r(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f(x+th) \cdot h^r dt$$

On a :

$$v_r(x; h) \equiv \frac{1}{r!} D^r f(x) \cdot h^r \quad \text{mod } o(\|h\|^r) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0$$

et

$$f(x+h) \equiv \sum_{p=0}^r \frac{1}{p!} D^p f(x) \cdot h^p \quad \text{mod } o(\|h\|^r)$$

quand h tend vers zéro.

2.5.2. Soit de plus γ une semi-norme continue sur F ; si l'on a $\|D^r f(z)\|_\gamma \leq M$ pour tout point z du segment $[x, x+h]$, alors on a :

$$\|v_r(x; h)\|_\gamma \leq \frac{M}{r!} \|h\|^r$$

2.5.3. Supposons en outre que $E = \mathbf{R}^n$. On a alors :

$$f(x+h) \equiv \sum_{|\alpha| \leq r} \Delta^\alpha f(x) h^\alpha \quad \text{mod } o(\|h\|^r) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0$$

en posant :

$$\Delta^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)$$

2.5.4. Soient f et g deux fonctions de classe C^r sur un ouvert U de E , à valeurs dans F . Pour que f et g aient en un point x de U un contact d'ordre $\geq r$, il faut et il suffit que l'on ait $D^p f(x) = D^p g(x)$ pour tout entier p avec $0 \leq p \leq r$. Lorsque E est de dimension finie, cela revient à dire que les dérivées partielles itérées d'ordre $\leq r$ de f et de g (par rapport à une base de E) sont égales au point x .

2.5.5. Soit U un ouvert de $E \times \mathbf{R}^n$ de la forme $V \times I_1 \times \dots \times I_n$, où V est un ouvert de E et $I_1, \dots, I_n$ des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ contenant 0. Posons $U_0 = V$ et $U_j = V \times I_1 \times \dots \times I_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^r(U; F)$ (avec $1 \leq r \leq \infty$), il existe une suite et

une seule de fonctions $f_j \in \mathcal{C}^{r-1}(U_j; F)$ (pour $0 \leq j \leq n$) telle que :

$$f(x, t_1, \dots, t_n) = f_0(x) + \sum_{j=1}^n t_j f_j(x, t_1, \dots, t_j)$$

pour $x \in V$ et $t_j \in I_j$. On a :

$$f_0(x) = f(x, 0, \dots, 0)$$

$$f_j(x, t_1, \dots, t_j) = \int_0^1 \partial_j f(x, t_1, \dots, t_{j-1}, t_j u, 0, \dots, 0) du$$

pour $1 \leq j \leq n$. Dans cette dernière formule, $\partial_j f$ désigne la j -ième dérivée partielle de la fonction $(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(x, t_1, \dots, t_n)$.

2.6. Critères de dérivabilité

2.6.1. Supposons que F , outre sa topologie $\mathcal{T}$, soit muni d'une topologie moins fine $\mathcal{T}'$, qui fait aussi de F un espace localement convexe séparé. Supposons en outre que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ satisfassent à la condition suivante :

(S) Pour tout voisinage V de 0 pour la topologie $\mathcal{T}$, il existe un voisinage W de 0 pour $\mathcal{T}$ tel que l'enveloppe convexe $\mathcal{T}'$ -fermée de toute partie $\mathcal{T}$ -compacte de W soit contenue dans V .

Soit f une application d'un ouvert U de E dans F . Supposons que f est de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) lorsque l'on munit F de la topologie $\mathcal{T}'$, que $D^m f(x)$ est, pour tout x de U , et tout entier $m \leq r$, une application multilinéaire continue de E^m dans F muni de la topologie $\mathcal{T}$ et que l'application $x \mapsto D^m f(x)$ est continue de U dans $\mathcal{L}_m(E; F)$ (F étant muni de la topologie $\mathcal{T}$). Alors f est de classe C^r lorsque l'on munit F de la topologie $\mathcal{T}$ et ses dérivées $D^m f$ sont les mêmes pour $\mathcal{T}$ et pour $\mathcal{T}'$.

La condition (S) est en particulier réalisée s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie $\mathcal{T}$ qui sont fermés pour la topologie $\mathcal{T}'$: c'est le cas si le dual de F muni de $\mathcal{T}$ est identique au dual de F muni de $\mathcal{T}'$. La condition (S) est également réalisée si F muni de la topologie $\mathcal{T}$ est *quasi-complet* (*Esp. Vect. Top.*, ch. III, § 2, n° 5).

2.6.2. Soit f une application d'un ouvert U de E dans F . Si f est de classe C^r (avec $0 \leq r \leq \infty$), les fonctions scalaires $u \circ f$ sont de classe C^r pour toute forme linéaire continue u sur F . Réciproquement si F est *quasi-complet* et si les fonctions $u \circ f$ sont de classe C^{r+1} pour tout $u \in F'$, alors f est de classe C^r .