Sistemi ACM e Imaging Diagnostico

Le immagini mediche
come Matrici Attive di Connessioni

Paolo Massimo Buscema

Sistemi ACM e Imaging Diagnostico

Le immagini mediche come Matrici Attive di Connessioni

Con i contributi di

U. Bottigli • M. Breda • L. Catzola • M. Intraligi • G. Massini • F. Perona • G.Pieri • P.L. Sacco • G. Salina • S. Terzi

Presentazione a cura di

Enzo Grossi

Springer

Paolo Massimo Buscema
Semeion
Centro Ricerche di Scienze della Comunicazione
Roma

Con i contributi di:
Ubaldo Bottigli – Professore Ordinario, Università di Sassari e Sezione INFN di Cagliari, Struttura Dipartimentale di Matematica e Fisica, Sassari
Marco Breda – Ricercatore associato del Semeion, Roma
Luigi Catzola – Ricercatore associato del Semeion, Roma
Marco Intraligi – Ricercatore del Semeion, Roma
Giulia Massini – Vice direttore e ricercatore del Semeion, Roma
Franco Perona – Primario U.O. Radiologia Diagnostica, Interventistica e Bio–immagini, Istituto Ortopedico Galeazzi, GSD, Milano
Giovanni Pieri – Direttore dell'Istituto Donegani, Milano
Pier Luigi Sacco – Pro–rettore alla Comunicazione e Direttore del Dipartimento di Design e Arti, Università IUAV, Venezia
Gaetano Salina – Ricercatore INFN, Sezione Roma
Stefano Terzi – Ricercatore del Semeion, Roma

Tutti i sistemi di ACM presentati in questo volume sono stati ideati da Paolo Massimo Buscema e coperti da domanda di brevetto internazionale n. WO2005/020132 a nome di Semeion Centro Ricerche.

ISBN-10 88-470-0387-3
ISBN-13 978-88-470-0387-3

Springer fa parte di Springer Science+Business Media
springer.it

Stampato in Italia

Layout di copertina: Simona Colombo, Milano
Impaginazione: Marco Intraligi, Roma
Riprodotto da copia camera ready
Stampa: Printer Trento Srl, Trento

Presentazione

«Chi è addetto alla costruzione
delle scienze troverà la sua gioia
e la sua felicità nell'aver
indagato l'indagabile e
onorato l'inosservabile».

Max Planck

Questo libro è molto difficile da dimenticare. Per ragioni del tutto particolari.

L'opera contiene infatti nuove scoperte matematiche che promettono di cambiare la comprensione di fenomeni visuali complessi del mondo che ci circonda attraverso una nuova forma di computer vision e, contemporaneamente, permettono alla computer vision di apprezzarle a pieno.

Le ragioni sono tre e, da non matematico, proverò a descriverle seguendo in parte la storia della fisica moderna a cavallo tra il XIX e XX secolo.

Prima ragione: si spezzano le catene e la matematica della luce finalmente esprime a pieno la propria libera essenza.

L'elettrone fu scoperto solo poco più di cento anni fa, esattamente nel 1897. Che la scoperta fosse del tutto inattesa è illustrato da una citazione di Joseph John Thomson, il suo scopritore. Egli disse, infatti, che parecchio tempo dopo la sua lettura di presentazione della nuova scoperta, fu avvicinato da un eminente fisico che era presente all'avvenimento e che confessò di aver pensato che Thomson stesse in quel momento prendendo in giro la platea.

La storia della teoria dei quanti è, inaspettatamente, antecedente e risale esattamente al 1859. In quell'anno Gustav Kirchhoff, un fisico tedesco che aveva introdotto e sviluppato la spettroscopia, formulò un teorema a riguardo della radiazione dei corpi neri. Un corpo nero è un oggetto che assorbe tutta l'energia che lo colpisce e dal momento che non riflette alcun raggio luminoso, appare nero all'osservatore.

Un corpo nero è anche un perfetto emittente e Kirchhoff teorizzò che l'energia emessa E dipendesse solo dalla temperatura T e dalla frequenza υ dell'energia emessa secondo questa equazione: $E = J(T, \upsilon)$. La sfida, raccolta inutilmente dai fisici nei quaranta anni che seguirono, fu quella di trovare la funzione J.

Nel 1896 ad esempio Wilhelm Wien propose una soluzione che si accordava con le osservazioni sperimentali in maniera molto precisa a livello di lunghezze d'onda molto piccole, ma purtroppo cadeva miseramente a livello dell'infrarosso.

Anche Max Planck, fisico teorico dell'Università di Berlino, si trovò quasi per gioco a cimentarsi con questa sfida e riuscì in poche ore a ipotizzare la formula corretta della funzione J di Kirchhoff. La formula di Planck dimostrò inequivocabilmente di accordarsi con le evidenze sperimentali a tutte le lunghezze d'onda, infrarosso compreso.

Essendo fisico teorico, Planck si sentì costretto a tentare di derivare una teoria fondamentale che spiegasse la natura della formula, assumendo che l'energia totale fosse fatta di elementi di energia indistinguibili: i quanti.

Nasceva così la teoria dei quanti, base della meccanica quantistica che, con la teoria della relatività di Einstein, avrebbe rivoluzionato non solo la fisica del novecento ma anche l'intera concezione del mondo. La formula di Max Planck per l'energia in una cavità a temperatura fissata (ottima approssimazione di corpo nero) era uno degli anelli mancanti per completare le conoscenze dei fisici di fine ottocento.

La maggior parte dei contemporanei di Planck riteneva infatti che la fisica avesse raggiunto una sorta di "saturazione" e che nulla di profondo (se non pochi dettagli, come il corpo nero) fosse rimasto da spiegare.

Nel prevedere per la prima volta il comportamento della radiazione di corpo nero a tutte le frequenze stava la chiave dello scatto della nuova scienza. Lo scatto stava in due idee inedite: l'energia nella cavità non assume tutti i valori possibili tra uno iniziale e uno finale, ma è distribuita in "pacchetti" o quanti; la seconda idea è che l'energia di un quanto è proporzionale alla frequenza υ della radiazione e il coefficiente di tale proporzionalità deve essere una nuova costante universale, oggi nota come costante di Planck ($h = 6.63 \cdot 10^{-27}$erg s). L'energia di un quanto è quindi $E = h\upsilon$ e solo multipli interi di E sono permessi: E, $2E$, $3E$, ecc.

Fu così che il conservatore Planck divenne rivoluzionario suo malgrado. Egli era di fatto quasi convinto che il concetto di "quanto" fosse solo «*una fortunata violenza puramente matematica contro le leggi della fisica classica*».

A proposito della teoria sulla interpretazione dello spettro del corpo nero, sicuramente al di fuori della logica scientifica, nelle sue memorie si legge tra l'altro: «*L'intera vicenda fu un atto di disperazione... Sono uno studioso tranquillo, per natura contrario alle avventure piuttosto rischiose. Però... una spiegazione teorica bisognava pur darla, qualsiasi ne fosse il prezzo... Nella teoria del calore sembrò che le uniche cose da salvare fossero i due principi fondamentali (conservazione dell'energia e principio dell'entropia), per il resto ero pronto a sacrificare ogni mia precedente convinzione*».

La teoria dei quanti ci dice che una buona parte delle grandezze fisiche possono assumere soltanto valori multipli di quantità di base indivisibili, i quanti appunto. Per esempio l'energia della luce in un certo colore deve essere un multiplo di una certa piccola quantità di energia, a cui corrisponde l'energia di un singolo fotone con quel colore. Analogamente i livelli di energia di un atomo sono disposti come pioli di una scala, con gli elettroni che possono occupare solo alcune orbite discrete, corrispondenti ad un ben definito spettro di possibilità.

Inizialmente Planck non vide molto al di là della porta che egli stesso aveva aperto con la sua scoperta, considerata dapprima solo una trovata ingegnosa in grado di riprodurre fedelmente i dati osservati. Anzi, per anni cercherà invano di recuperare l'ipotesi dei quanti dalla fisica classica, dove l'energia e tutte le grandezze variano con continuità.

Il fatto che i fotoni, responsabili in ultima analisi dell'intensità della luce rappresentino se stessi per pacchetti quantici non è irrilevante.

I sistemi adottati nel moderno imaging digitale per rappresentare gli effetti della luce si basano su rappresentazioni dell'intensità luminosa che sono scalate su sistemi di numerazione del tutto arbitrari, per es. 0-255 per sistemi a 8 bit (2 elevato alla ottava = 256) o 0-4095 (2 elevato alla dodicesima = 4096) per sistemi a 12 bit. Non facciamoci impressionare dai numeri dispari 255 e 4095: purtroppo gli informatici iniziano a contare da zero.

L'imaging analogico (per es. quello della semplice fotografia su film) potrebbe anch'esso risentire dello stesso problema e lo stesso potrebbe avvenire nell'occhio umano ma su questo è necessario ancora riflettere.

È facile immaginare che, dal momento che il valore numerico del singolo quanto luminoso determinato da Planck non è un intero, la scalatura utilizzata dai sistemi informatici vigenti non è in grado di rappresentare fedelmente la realtà, portandosi dietro inevitabilmente il problema di "resti" di divisioni in cui solo il quoziente è onorato. Ne deriva che il debito accumulato crea una sorta di rumore di fondo che tende a mascherare la vera natura della luce.

Una delle grandi attrattive di questo libro risiede proprio nella descrizione dei fenomeni dinamici innescati dalle equazioni recursive originali dei sistemi ACM, che agiscono in un modo strano, come se svincolassero il valore della scala dei grigi di ogni singolo pixel dalla costrizione matematica a cui è stato sottoposto da una miope omologazione internazionale, permettendogli di assumere valori più vicini a quelli reali.

Seconda ragione: oggetti matematici cuciti addosso ai problemi da risolvere.

La prima applicazione importante non legata al corpo nero della quantizzazione dell'energia veniva effettuata nel 1905 da un altro tedesco, uno sconosciuto impiegato dell'ufficio brevetti di Berna: Albert Einstein. Il fisico tedesco spiegava dal punto di vista teorico l'effetto fotoelettrico, ma la sua idea andava ben oltre e coinvolgeva o, meglio, travolgeva tutta la fisica. Einstein applicava l'ipotesi dei quanti direttamente al campo elettromagnetico, le cui oscillazioni, nella visione classica di Maxwell, sono l'essenza delle onde elettromagnetiche.

Einstein, a differenza di Planck, era consapevole dell'enormità che stava postulando.

A una radiazione di lunghezza d'onda λ e frequenza υ sono associati anche un impulso $p = h / \lambda$ e un'energia $E = h\upsilon$. Oltre alle usuali proprietà ondulatorie, la luce possedeva quindi anche caratteristiche corpuscolari!

Dopo aver formulato la teoria della relatività speciale o ristretta nel suo anno di grazia, il 1905, Einstein, nel 1907, formulava il principio di equivalenza e gettava le basi della relatività generale, che estende il principio di relatività anche ai sistemi di riferimento non inerziali.

Appariva subito chiaro che una tale teoria doveva essere anche una teoria della gravitazione. Il prezzo concettuale da pagare era alto: si doveva abbandonare la geometria euclidea (in cui il parallelismo delle rette o il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° sono concetti familiari da secoli) per ammettere che la geometria dello spazio poteva essere non-euclidea, contro la concezione di spazio e tempo accumulatasi in più di 300 anni di fisica, almeno per quanto riguarda le grandi scale di distanza.

Einstein aveva già pronte le basi filosofiche e concettuali per questa rivoluzione: i primi a introdurre delle geometrie non euclidee erano stati i matematici Nikolai Ivanovich Lobachevskij e Bernhard Riemann.

Ma gli strumenti dell'analisi tensoriale, senza i quali Einstein non avrebbe potuto formalizzare la sua teoria in equazioni utili alla scienza, gli erano stati forniti da due troppo presto dimenticati matematici italiani: Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita.

Nel 1901 i due matematici italiani pubblicavano *Il calcolo differenziale assoluto*, una estensione ardita della teoria dell'analisi dei tensori allo spazio Riemanniano *n* dimensionale. Le definizioni di Ricci e di Levi-Civita si dimostrarono le migliori formulazioni generali del cosiddetto tensore.

La teorizzazione non avvenne sulla base di un'influenza della teoria einsteiniana nascente, ma come a volte accade, l'oggetto matematico che si sarebbe rivelato necessario per abbracciare al meglio una nuova teoria fisica era comparso esattamente al momento giusto.

Questo excursus vuole sottolineare che l'utilità della matematica è un tratto caratterizzante dell'indagine scientifica sul mondo; anzi si identifica con essa. A partire da Galileo, attraverso Newton sino ad Einstein, l'idea che le descrizioni scientifiche del mondo non sono niente più e niente di meno che descrizioni matematiche era ormai qualcosa di assolutamente presente nella coscienza scientifica mondiale.

Come afferma Barrows nel suo affascinante libro *Perché il mondo è matematico?* «*mentre le nostre indagini si allontanano sempre di più dall'ambito dell'esperienza uma-*

na diretta, scopriamo che le descrizioni matematiche che ci servono diventano sempre più astratte ma anche più precise, più astruse ma anche più accurate; se osserviamo da vicino il rapporto tra la matematica e una scienza esatta come la fisica scopriamo che si tratta di un rapporto di simbiosi».

Esistono esempi sorprendenti di come alcuni studiosi abbiano scoperto intricate strutture matematiche senza prendere minimamente in considerazione la possibilità di applicarle praticamente nell'ambito di altre scienze, per poi scoprire che le loro creazioni corrispondevano esattamente a quello che serviva per spiegare qualche strano fenomeno che si verificava nel mondo e, in seguito, a predirne di nuovi.

Ecco di seguito alcuni altri esempi rappresentativi dell'uso di formule matematiche già pronte: l'utilizzazione fatta da Keplero della teoria di Apollonio sulla geometria dell'ellisse per descrivere il moto dei pianeti; l'uso degli spazi di Hilbert come base per la teoria dei quanti; l'uso della teoria dei gruppi nella fisica delle particelle elementari; l'applicazione di alcuni inquietanti aspetti della struttura delle *varietà complesse* allo studio delle superstringhe nell'ambito della fisica delle particelle. Questi sono alcuni esempi di come la nuova fisica sia stata resa possibile dalla pre-esistenza di una matematica appropriata.

Gli esempi della tendenza opposta sono invece più rari.

Lo sviluppo da parte di Fourier della serie omonima per lo studio dell'ottica ondulatoria e l'idea di un "attrattore strano" di tipo caotico a partire dal desiderio di comprendere la dinamica non lineare del tempo meteorologico da parte di Lorenz sono indubbiamente rimasti nella storia.

Una delle grandi novità di questo libro è che l'autore, Massimo Buscema, è stato "costretto" ad ideare equazioni originali per raggiungere lo scopo che si era prefissato: vedere l'invisibile.

Il numero di queste invenzioni è tale che se l'impatto di questi nuovi sistemi risulterà decisivo sullo sviluppo futuro della computer vision, ci troveremo di fronte ad uno dei fenomeni matematici più straordinari della storia della fisica moderna.

Terza ragione: vedere la matematica non lineare.

I rapidi sviluppi della computer science hanno aperto nuove prospettive per la visualizzazione della complessità in biologia e in medicina. Il concetto che di fatto l'imaging digitale sia la rappresentazione matematica del mondo che ci circonda ci deve far riflettere. Il sogno di Galileo si avvera: un'immagine digitale è un esempio mirabile di espressione diretta del linguaggio matematico della natura, così come recitava ne *Il Saggiatore* il nostro grande e incompreso scienziato:

«*…questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*»
(Galileo Galilei, 1623, Opere Il Saggiatore, p. 171).

Ma se è vero che l'imaging digitale è la rappresentazione matematica del mondo, allora è vero anche il contrario e cioè che attraverso il mondo digitale che si modifica dinamicamente come risultato di equazioni non lineari ricorsive attraversanti ad ondate incessanti l'immagine, alla ricerca di uno stato stazionario nascosto, allora noi possiamo finalmente *vedere la matematica complessa*.

Il libro ovviamente non ha la possibilità di offrire al lettore questo spettacolo, essendo nella parte iconografica la rappresentazione forzatamente statica di fenomeni dinamici che andrebbero apprezzati in un filmato. Il lettore vedrà il *fermo immagine* di elaborazioni effettuate con i nuovi oggetti matematici, quasi sempre riferite allo stato stazionario conclusivo, dove la tempesta luminosa ha raggiunto un equilibrio, dopo centinaia o migliaia di escursioni.

Quelle escursioni rappresentano visivamente la straordinaria complessità di trasformazioni matematiche armoniche e disarmoniche di orde di pixels attraversati da calcoli algebrici impossibili da descrivere analiticamente e che solo le modificazioni cromatiche innescate dalle nuove reti neurali possono rendere percepibili.

Si tratta certo di un sottoprodotto rispetto all'utilità dei risultati oggettivi. Ma ripensando a tutti i grandi matematici vissuti prima dell'epoca della computer science, ci commuove l'idea che, se alcuni di loro potessero finalmente "vedere dall'alto" la matematica che solo nella loro mente si saranno ogni tanto immaginati, sicuramente ne sarebbero profondamente colpiti ed emozionati.

Perché questo libro è importante per il progresso medico nel campo dell'imaging diagnostico?

Si parlava poco fa dell'utilità pratica di queste scoperte. Direi semplicemente: enorme.

Per capire perché, dobbiamo riflettere su una cosa: *l'imaging digitale non l'aveva chiesto nessuno*. Il radiologo in prima battuta.

Avete mai visto un radiologo al lavoro, non tanto mentre esegue un esame radiologico (dal momento che la maggior parte degli esami sono effettuati dai tecnici di radiologia), ma quando esegue il "referto"?

Sino a 20-25 anni fa il radiologo aveva a disposizione le "lastre", ovvero foto in negativo dei più disparati organi ed apparati che era possibile mettere in evidenza con i mezzi tecnologici dell'epoca pre-digitale. Disponeva queste lastre sull'apposito visore, chiamato romanticamente "diafanoscopio" e osservava attentamente i dettagli dell'immagine alla ricerca di tratti suggestivi e di segni patognomonici di una certa malattia. Scriveva poi a mano il referto che veniva ribattuto a macchina dalla segretaria. La lastra veniva archiviata in polverosi armadi. Il lavoro era stato eseguito. I ritmi erano abbastanza intensi ma nulla faceva presagire cosa sarebbe successo nel giro di pochi anni con l'avvento di un infernale armamentario tecnologico: la mitica TAC.

Con la *tomografia assiale computerizzata*, cambia nettamente il paradigma: il numero di immagini aumenta notevolmente. Una TAC del torace può dare origine ad alcune decine di immagini. È necessario selezionare quelle più esemplificative, stamparle su film e assemblarle in una grande lastra in cui è possibile vedere un certo numero di fette. Il lavoro ovviamente diventa più complesso. I tempi di refertazione per singola immagine si riducono, dato che gli esami effettuati rimangono gli stessi ma le immagini aumentano. Nonostante l'introduzione del dittafono, che consente al radiologo di non dover trascrivere a mano ma semplicemente di leggere ad alta voce quello che desidera diventi il referto, i ritmi di esecuzione si fanno sempre più nevrotici.

Anche il contesto clinico tuttavia comincia a cambiare. In certi settori oncologici si scopre il valore della diagnosi precoce attraverso i cosiddetti screening di popolazioni a rischio potenziale, prima fra tutte le donne potenzialmente affette da tumore mammario.

Nei primi centri di screening il radiologo effettua anche 30-40 referti ogni giorno. Dati i tassi di incidenza del cancro mammario nella popolazione generale sottoposta a screening (all'incirca 1:1000) è possibile che in un mese di lavoro il radiologo non veda neanche un caso "positivo". Dopo 999 casi negativi è anche possibile che l'unico positivo gli possa sfuggire, semplicemente per stanchezza, o abitudine alla negatività. È possibile anche il contrario, vedere qualcosa che invece non c'è; e qui il prezzo da pagare è l'ansia o il terrore nella donna e una biopsia inutile.

Siamo arrivati agli anni novanta e progressivamente tutta la radiologia diventa digitale. Il numero di immagini cresce a dismisura, mentre i tempi di acquisizione si fanno sempre più brevi. Il paziente ringrazia; in pochi secondi può fare una TAC, in pochi minuti può fare la risonanza o una PET. Il radiologo no. È letteralmente sommerso dalle immagini. Un post-proccesing di un esame complesso come la colonscopia virtuale può richiedere anche due ore. Una mammografia per risonanza con mezzo di contrasto, se vi sono alcune lesioni sospette da segmentare a mano e caratterizzare, può richiedere facilmente 45 minuti. La visione delle immagini sullo schermo del computer è più faticosa rispetto al diafanoscopio. Alcuni dettagli possono sfuggire, altri aspetti notevoli, come un piccolo nodulo di un millimetro, possono essere non visti… sono i limiti dell'occhio umano.

È in questo scenario che dobbiamo immaginare l'avvento dei sistemi ACM. Essi funzionano come un terzo occhio, non più legato alla esperienza, alla interpretazione e alla sensibilità soggettiva dell'operatore, ma direttamente riferiti alla struttura matematica e quindi anatomica dell'immagine stessa. Sì, il terzo occhio di cui parliamo è proprio quello dell'immagine che, come per magia, interroga se stessa e si mostra al radiologo sotto una veste diversa, spesso molto più informativa.

Non è difficile immaginare che le elaborazioni potranno avvenire non solo in fase di post-processing, ma anche in diretta, in real time, durante l'esecuzione di esami delicati, come quelli della radiologia interventistica, in cui è necessario prendere decisioni rapide e possibilmente giuste; decisioni che possono cambiare la vita dell'essere umano posto sotto quel lenzuolo verde.

È questo il futuro che vediamo; è questo quello che ci auguriamo possa avvenire. Questa volta la computer science sarà utile sia per il paziente sia per il tecnico, il medico, il radiologo. Siamo certi che queste scoperte porteranno grandi vantaggi e benefici e ci auguriamo che trovino il supporto necessario al loro ulteriore sviluppo.

Milano, Settembre 2005

Enzo Grossi
Direttore Medico Bracco S.p.A.
Esperto di medicina clinica

Indice

PARTE QUARTA: Contributi e approfondimenti

PARTE PRIMA

Le basi epistemologiche

Capitolo 1

Le idee alla base dei sistemi ACM

Massimo Buscema

1.1 Riduzionismo e ricostruttivismo

La definizione del concetto di *fenomeno* non può prescindere dalle dimensioni spazio-temporali in cui esso avviene: qualsiasi *fenomeno* avviene nello spazio-tempo.

Ogni *fenomeno* è la dinamica del cambiamento indotto da una asimmetria presente nello spazio-tempo. Esso perciò non può che riguardare cambiamenti di stato della materia in relazione allo spazio-tempo, e, poiché massa ed energia altro non sono che stati diversi della materia, ogni *fenomeno* è caratterizzato dal variare della massa o dell'energia in relazione allo spazio-tempo in cui tali variazioni avvengono. A qualunque variazione di massa o di energia è associabile una variazione del campo elettromagnetico laddove esso è presente nel contesto del *fenomeno* di interesse. Esso, in parte può essere assorbito e in parte può essere riflesso o emesso dalla materia coinvolta nel *fenomeno* interessato.

Ai fini del nostro studio, come sarà meglio chiarito in seguito, è la contestualità di emissione e assorbimento elettromagnetico che dà significato all'esistenza di un *fenomeno* e pertanto risulta essenziale poter misurare le frequenze elettromagnetiche assorbite e quelle emesse o riflesse.

Definiamo perciò *fenomeno* ogni variazione di energia nella porzione spazio-temporale coinvolta a cui sia associabile una perturbazione del campo elettromagnetico misurabile in termini di frequenze elettromagnetiche assorbite ed emesse o riflesse.

A qualunque perturbazione del campo elettromagnetico è associabile una banda di frequenza che è lo spettro di frequenza in cui avvengono le variazioni di energia. Ogni fenomeno risulta pertanto *visibile* in uno o più spettri di frequenza ad essi associabili. Esso può essere osservato su tutto il suo spettro o su parti di esso che sono intervalli di frequenza, sottoinsiemi dello spettro. Tali intervalli, assieme alle variazioni di energia corrispondenti, possono essere posti in corrispondenza alla geometria intrinseca di tale fenomeno, che è portatrice di informazione a noi utile per descrivere e caratterizzare il *fenomeno*.

Di conseguenza, i *fenomeni visivi* sono un sottoinsieme dell'universo dei *fenomeni*. Sottoinsieme variabile in funzione delle frequenze elettromagnetiche che si è deciso di osservare. Un *fenomeno* viene detto *visivo*, quando la sua *topologia* diventa *pertinente*, ovvero quando è descrivibile tramite la propria geometria intrinseca ricavabile dagli spettri di frequenza in cui il fenomeno è osservato e dalle corrispondenti variazioni di energia. Tali variazioni di energia diventano, pertanto, *informazione pertinente* perché esplicitazione della *topologia pertinente*.

Qualunque metodo di indagine che tenti di spiegare un *fenomeno* e i comportamenti ad esso associati, cerca di costruire un modello matematico del *fenomeno* stesso che ne approssimi i comportamenti. Un tale modello, per aspirare ad essere un reale modello valido del fenomeno di interesse, deve avere le proprietà topologiche isomorfe a quelle del *fenomeno*. Tali proprietà topologiche devono riferirsi agli elementi che compongono il *feno-*

meno e che entrano a far parte del suo modello. Questi elementi possono essere, o meno, combinazione di altri elementi non ulteriormente riducibili. Gli elementi non ulteriormente riducibili sono detti *minimi*. I modelli di nostro interesse sono tutti e soli quelli costituiti partendo dagli elementi *minimi* del *fenomeno*. È questa l'opzione metodologica corretta, specie per i fenomeni visivi.

Se ciò non fosse, gli elementi entrati a far parte del modello, si presenterebbero come rappresentativi di una ridotta informazione rispetto a quella di origine presente nel *fenomeno* considerato. Ma questo non avviene se gli elementi considerati nel modello sono tutti e solo quelli minimi. In altre parole la *topologia pertinente* del *fenomeno* è punto di partenza del modello da costruire ma anche suo punto di arrivo se gli elementi che entrano a far parte del modello sono gli *elementi minimi*. Ciò significa che il processo di riduzione può essere critico: è, infatti, possibile che l'elemento non minimo entrato a far parte del modello, ignori delle proprietà fondamentali presenti negli elementi minimi e/o nelle loro interazioni locali.

Nell'analisi dei *fenomeni visivi*, cioè a *topologia pertinente*, questo tipo di riduzionismo è grave. Infatti, indici come la media, la varianza e tutti gli altri basati sulla media non conservano le proprietà topologiche degli elementi che sintetizzano. Si pensi a come la media dei rispettivi lati di due triangoli rettangoli non crea un triangolo rettangolo, se non in poche eccezioni.

In secondo luogo, tutti i fenomeni che possiamo assumere come oggetto di conoscenza scientifica sono fenomeni la cui topologia è sempre pertinente: in uno spazio, teoricamente isotropo, qualsiasi *forma*, per il solo fatto di poter esistere esibisce con la propria *topologia* la sua specifica *pertinenza*.

Quindi, i *fenomeni* che definiamo *visivi* sono la struttura più didattica e figurativa di qualsiasi *fenomeno* passibile di conoscenza scientifica.

In linea più generale, qualsiasi modello scientifico deve mirare a far emergere da ogni *fenomeno* la propria *topologia pertinente* costruendo il proprio modello inerente, tramite l'interazione dinamica degli elementi minimi del *fenomeno* in questione.

Individuati gli *elementi minimi* di un *fenomeno*, il modello scientifico deve fornire a tali elementi le equazioni tramite le quali questi elementi interagiscono. Quando tramite queste equazioni gli elementi minimi di un fenomeno sono in grado di ricostruire il fenomeno stesso nella sua complessità morfologica e dinamica, allora quelle equazioni si dimostrano essere un buon metamodello del modello che gli *elementi minimi* hanno generato. Il modello include anche il metamodello. Senza questa prova di ricostruzione, l'attività scientifica non è validabile.

Un modello, per essere in grado di ricostruire un fenomeno noto, deve poter rappresentare come il *fenomeno* si genera, come si sostiene, e come esso decade e degenera. È evidente che ciò che genera, sostiene, e fa decadere un *fenomeno*, è un complesso di sollecitazioni rappresentative della contrattazione che l'entità (*la cosa in sé*) stabilisce col contesto in cui interagisce, diventando così *fenomeno*. Tali sollecitazioni sono espressione di tensioni, ovvero di forze, che matematicamente sono rappresentabili da equazioni.

In estrema sintesi: la conoscenza scientifica di qualsiasi *fenomeno* è connessa alla nostra capacità di:

a. conoscere le equazioni (o le forze) che generano quel fenomeno;
b. conoscere le equazioni (o le forze) che lo fanno persistere nel tempo;
c. conoscere le equazioni (o le forze) che lo possono degenerare.

1.2 Quantità e qualità

Ogni fenomeno per essere oggetto di conoscenza scientifica deve poter essere caratterizzato quantitativamente. Ciò significa che i suoi elementi minimi e i loro rapporti devono poter essere rappresentati da valori numerici. Da un punto di vista fisico questi valori numerici sintetizzano delle "forze" e/o i "risultati" delle applicazioni di forze.

L'interazione tra questi valori numerici all'interno di apposite equazioni, permette la verifica ricostruttiva di quanto il metamodello (le equazioni) genera un modello simile al *fenomeno* che si intende comprendere e rappresentare. Quindi la rappresentazione quantitativa di un *fenomeno* è il presupposto fisicamente fondato per delineare la funzione matematica che è implicita nel *fenomeno*.

L'obiettivo della conoscenza scientifica consiste nel definire le funzioni matematiche implicite in un *fenomeno*.

La formulazione di tali equazioni è sempre una manifestazione della complessità delle variabili in gioco e delle loro relazioni. Essa è espressione della contesa che l'entità (*la cosa in sé*) intraprende col contesto in cui si trova, dandosi in tal modo come *fenomeno* al dominio cognitivo dell'uomo. La dinamica di tale contesa è espressa quantitativamente da queste equazioni complesse. Il livello *quantitativo* che esprime la complessità di tale dinamica, cresce col crescere del livello di complessità dell'interagire. Quando la diversità degli elementi in gioco è tale da portare a livelli molto alti la complessità di questa dinamica di interazione, il quadro cognitivo che costruiamo del *fenomeno* che stiamo analizzando ci porta a considerare il *fenomeno* come dotato di proprietà *qualitative* non riducibili semplicemente ad espressioni *quantitative*.

È per questo che, nei casi in cui la funzione matematica implicita in un fenomeno si rivela piuttosto complessa, cioè altamente non lineare, la nostra percezione del *fenomeno* ci porta a definire quel *fenomeno* come dotato di proprietà *qualitative*, non riducibili a soli effetti *quantitativi*. Si tratta, comunque, di un semplice effetto percettivo dovuto alla complessità che caratterizza la funzione implicita in quel fenomeno.

È possibile quindi sostenere che la componente *qualitativa* di ogni *fenomeno* è l'effetto percettivo della sua complessa dinamica e alta non linearità.

Considerato che tutti i *fenomeni* presenti in natura si sviluppano con dinamiche altamente non lineari, è ovvio che la percezione di effetti *qualitativi* sia così diffusa da far pensare che la *qualità* sia insita nei *fenomeni* stessi. In realtà la *qualità* è il modo in cui la *quantità* esibisce il proprio virtuosismo.

1.3 Sistemi ACM

I sistemi ACM (Active Connections Matrix) traggono la loro idea di base da alcune considerazioni:
1. In ogni immagine digitale i pixel e le loro relazioni contengono il massimo dell'informazione disponibile per quella immagine.
2. La posizione che in una immagine ogni pixel occupa rispetto agli altri, è una informazione strategica per la comprensione del contenuto informativo di quella immagine.

Queste due considerazioni di base sono abbastanza ovvie se considerate a sé stanti, e sono alla base di qualunque elaborazione dell'immagine. Poiché ogni immagine racchiude le informazioni della dinamica di interazione tra un oggetto con la radiazione elettromagnetica che lo investe, ciascuna di esse offre all'apparato della visione umana le informazioni inerenti tale dinamica. L'elaborazione che opera l'apparato della visione umana, tiene conto della intensità luminosa dei pixel e delle reciproche posizioni di ognuno di essi.

In ogni immagine digitale, quindi, ogni pixel ha una posizione P e una luminosità L, ovvero esso è identificabile dalle sue coordinate spaziali e dal valore di luminosità L funzione di esse:

$$Pixel = L\left(P\left(x_1, x_2, \ldots, x_D\right)\right) \qquad 0 \le L < 2^M \qquad [1.1]$$

dove 2^M = luminosità massima.

La visione umana, però, è in grado di svolgere solo una elaborazione parziale delle relazioni che ciascun pixel ha con tutti gli altri. Ciò ha come implicazione che alcune informazioni inerenti la dinamica di interazione tra oggetto e luce che lo investe, non risultino visibili all'uomo anche qualora la rilevanza di esse sia significativa.

Alle considerazioni iniziali occorre allora aggiungerne due ulteriori che sono, perciò, peculiari solo dei sistemi ACM:
3. In ogni immagine la *luminosità* di ogni pixel, la sua *posizione* nell'immagine e le sue *relazioni* con gli altri pixel dell'immagine definiscono il *contenuto informativo completo* di quell'immagine, ovvero della dinamica con cui l'oggetto e il fascio di luce interagiscono.
4. Le *relazioni* di ogni pixel con gli altri pixel della stessa immagine dipendono dalla dinamica delle *connessioni* che collegano ogni pixel con i pixel del suo intorno locale. Tale dinamica risente fortemente del modo di interagire dell'oggetto con la luce che lo investe e risulta determinante ai fini dell'evidenziare anche le informazioni che all'apparato visivo umano sfuggono quando osserva l'immagine di partenza assegnata.

1.3.1 Prime caratterizzazioni

Queste considerazioni, sotto un certo profilo ovvie, hanno implicazioni notevoli.

La prima consiste nello stabilire una differenza tra *contenuto informativo* di un'immagine e il suo *significato culturale*. Il secondo dipende dal primo, ma lo integra con altre conoscenze e abitudini di codifica non presenti nell'immagine né desumibili direttamente da queste, ma dipendenti invece dalla cultura dell'osservatore, dal contesto in cui esso è inserito e dall'uso che intende fare delle informazioni rappresentate dall'immagine. I sistemi ACM si occupano del contenuto informativo e non del suo significato culturale.

La seconda conseguenza di quanto sostenuto riguarda il processo di generazione del contenuto informativo di una immagine. Si sta sostenendo che il contenuto informativo di un'immagine è il *processo* tramite il quale i singoli pixel interagiscono localmente e in parallelo nel tempo. Si intende, cioè, dire che il contenuto informativo di un'immagine *non è nel processo*, *né alla fine del processo* dell'interazione locale dei suoi costituenti primi (i pixel) ma è *il processo stesso*. Ciò significa che per visualizzare il contenuto informativo di una singola immagine occorrerebbe scorrere il filmato dell'intero processo di interazione locale tra i pixel. Arrestando il filmato di tale processo si mostrerà una nuova immagine che è una parte ridotta del contenuto informativo dell'immagine di partenza. Si tratterà di definire le *condizioni* perché un qualsiasi processo di interazione locale dei pixel di un'immagine sia un processo che mostra parte (e quale parte) del contenuto informativo di quell'immagine.

In ogni immagine, quindi, l'interazione locale dei suoi pixel nel tempo, è, in certe condizioni, parte del contenuto informativo dell'immagine stessa, contenuto informativo rimasto impresso nei pixel, durante il tempo di esposizione dell'oggetto alla luce che lo ha investito, rappresentativo della loro dinamica di interazione.

La terza conseguenza delle considerazioni precedenti riguarda le connessioni locali di ciascun pixel con i pixel del suo intorno.

Ogni immagine è una rete di pixel connessi localmente. È sufficiente un intorno di raggio 1 per garantire che l'intera immagine sia una rete totalmente connessa di pixel. Questa esigenza di connettività incrementa la dimensionalità di tutti i pixel di una immagine. Se una immagine ha D dimensioni, ogni suo pixel sarà identificato da una posizione specificata da D variabili. Per connettere ogni pixel al suo intorno locale, questi sarà dotato di Q archi (quanti sono i pixel locali ai quali è connesso). Questa nuova architettura situerà ogni pixel in una spazio dimensionale D+1 specificato dalle D variabili di posizione x_1, x_2, x_3, …, x_D alle quali si aggiunge la variabile w che identifica gli archi di connessione.

1.3.2 Le ipotesi

Il nome Matrice Attiva delle Connessioni significa, quindi, che ogni immagine è considerata come una matrice (rete) connessa di elementi (pixel) che si sviluppa nel *tempo*. Trasformare ogni immagine in una matrice di elementi connessi che attivamente si trasforma nel *tempo* equivale a rendere visibile il suo contenuto informativo. In altre parole, una immagine anche se appare statica conserva entro di sé tutte le informazioni del proprio contenuto informativo. Quest'ultimo non è statico perché esprime la dinamica delle interazioni locali tra i pixel costituenti l'immagine stessa e per fare ciò ha bisogno di potersi esprimere tramite *il tempo*: è come se l'immagine di partenza nasconda nel proprio interno un filmato che per poter essere visto deve, ovviamente, scorrere nel *tempo*.

Nei sistemi ACM alle dimensioni originarie delle immagini vengono, quindi, aggiunte 2 dimensioni nuove: la *connessione locale* w e il *tempo* t.

Perciò, la luminosità L, di ogni pixel di un'immagine sarà funzione non solo delle D variabili di posizione x_1, x_2, x_3,…, x_D ma anche delle ulteriori due variabili w e t, aumentando le proprie coordinate nel modo seguente:

$$Pixel^{originale}\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_D\right) \rightarrow Pixel^{ACM}\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_D, w, t\right) \qquad [1.2]$$

dove: x_1, x_2, x_3,…, x_D = coordinate originarie ; w = connessioni ; t = tempo.

Nei sistemi ACM le coordinate originarie di un'immagine sono costanti e danno un contributo costante al valore di luminosità L, mentre le connessioni w nel tempo si modificano e direttamente o indirettamente modificano anche la luminosità di ogni pixel nel tempo.

In termini più pratici: data un'immagine bidimensionale di $M \times N$ pixel, la sua traduzione nel sistema ACM la trasforma in una matrice di $M \times N \times Q \times T$ pixel, dove Q è il numero delle connessioni tra ogni pixel con quelli del suo intorno e T è il numero di istanti discreti dall'inizio alla fine del processo.

Quindi, in un generico istante di tempo t ad ogni pixel originario *Pixel* sarà associato un vettore $w^{(t)}$ di Q pixel rappresentativo delle connessioni del pixel originario con quelli del suo intorno:

$$Pixel(x, y) \rightarrow w^{(t)}(x, y, z) \qquad [1.3]$$

dove z specifica che ad ogni pixel originario devono essere anche associati tanti pixel diversi quanti sono i pixel con i quali il pixel originario è connesso. Se il valore di questa connettività varia nel tempo, è evidente che in ogni istante di tempo t si potranno generare T matrici diverse di Q pixel, ciascuna delle quali renderà visibili le sole *relazioni* che esistono tra ogni pixel e ognuno dei suoi vicini.

I sistemi ACM, quindi, rimodellano un'immagine digitale qualsiasi tramite tre operazioni:
1. trasformano l'immagine originale in una *rete connessa* di pixel. Quindi aggiungono una dimensione all'immagine stessa, la dimensione w delle connessioni tra un pixel e i pixel del suo intorno;
2. applicano all'immagine trasformata delle *operazioni locali*, *deterministiche* e *iterative* che trasformano direttamente o indirettamente la luminosità originaria di pixel e/o le loro connessioni. Quindi aggiungono all'immagine originaria un'ulteriore dimensione t: il tempo;
3. terminano questo processo quando la funzione di costo sulla quale sono fondate le operazioni di trasformazione dell'immagine è soddisfatta. Quindi, considerano finito il tempo delle trasformazioni quando il processo stesso di trasformazione si stabilizza in modo autonomo.

Se le varie immagini che si succedono dipendono dalle connessioni tra i propri pixel, se le operazioni trasformative sono locali, deterministiche e iterative, e se il processo trasformativo tende autonomamente verso un'attrattore stabile, allora il processo di trasformazione dell'immagine è esso stesso parte del contenuto informativo globale di quella immagine.

La *prima ipotesi* sulla quale, quindi, si fondano i sistemi ACM è la seguente: "ogni immagine a N dimensioni, trasformata in una rete connessa di unità che si sviluppano nel tempo, tramite operazioni locali, deterministiche e iterative, può mostrare, in uno spazio dimensionale più ampio, delle *regolarità morfologiche e dinamiche* che nelle dimensioni originarie sarebbero non visibili oppure qualificabili come rumore".

Questa prima ipotesi suppone, a sua volta, un'ulteriore ipotesi. Dal punto di vista dei sistemi ACM si ritiene, infatti, che ogni immagine digitale a N dimensioni è un processo congelato. L'informazione che appare a N dimensioni, quindi, è solo una parte dell'informazione globale a N+1 dimensioni. I sistemi ACM operano una dinamicizzazione dell'immagine originale, tramite l'inserimento delle connessioni tra un pixel e i suoi vicini e la dimensione temporale. Ciò al fine di ricostruire le diverse proiezioni della geometria globale dell'immagine a N+1 dimensioni nello spazio a N dimensioni nel quale l'immagine appare. In altre parole, il modo in cui ogni pixel si trasforma nel tempo, in modo diverso a seconda del pixel vicino con cui sta interagendo, trasforma il pixel originario da unità elementare in unità composita:

Questa analisi *intrapixel* focalizza nei sistemi ACM l'importanza delle *connessioni* e delle *leggi* tramite le quali queste nascono, si aggiustano e si stabilizzano.

Si può, a questo punto, affermare che tutte quelle *connessioni* e tutte quelle *equazioni di evoluzione delle connessioni* che nel loro sviluppo evidenziano e/o mostrano proprietà poco visibili o quasi invisibili dell'immagine, che invece sono presenti nell'oggetto dal quale l'immagine è stata generata, sono le *connessioni* e le *equazioni* che devono essere prese in considerazione perché permettono di accedere ad una parte del contenuto informativo dell'immagine dotato di uno statuto particolare:

a. questo è un contenuto informativo reale, in quanto è presente nell'oggetto da cui l'immagine è stata generata;
b. questo è un contenuto informativo tanto più pregiato quanto più è invisibile o poco visibile tramite altri strumenti di elaborazione dell'immagine stessa.

È facile dimostrare che non tutte le *connessioni* e non tutte le *equazioni di evoluzione* di queste evidenziano caratteristiche dell'immagine presenti nell'oggetto che l'ha generata. Da ciò si può dedurre che esiste un insieme non infinito di *connessioni* e di *equazioni di evoluzione* di queste che possono trasformare parte del "rumore" di un'immagine in caratteristiche reali dell'oggetto dal quale questa è stata generata.

Queste osservazioni permettono di esplicitare la *seconda ipotesi* che è alla base dei sistemi ACM: "ogni immagine contiene al suo interno le matematiche inerenti che l'hanno prodotta".

L'esplicitazione di queste matematiche interne fornisce informazioni reali sull'oggetto dal quale l'immagine è stata prodotta. In linea teorica questo potrebbe significare che anche per un'immagine che non è generata fisicamente da un oggetto reale sarebbe possibile fare ipotesi corrette sull'*oggetto virtuale* che avrebbe potuto generarla.

I sistemi ACM, quindi, propongono un rovesciamento epistemologico sul modo di concepire il processamento dell'immagine. Non più partire da una matematica esterna all'immagine per valutare quanto l'immagine stessa si adegua a quella matematica (ad esempio i vari filtri che usano varie forme di convoluzione); bensì usare una metamatematica che lasci che l'immagine si sviluppi per generare le matematiche interne che la sua rete di pixel implicitamente contiene.

Detto in modo più divulgativo, si tratta di passare da un approccio aristotelico nel quale la regola viene applicata al caso singolo, ad un approccio più socratico nel quale il caso singolo dal basso mostra le proprie regole, in modo quasi maieutico.

Si tratta, quindi, di trasformare l'immagine da *oggetto* del ricercatore in *soggetto* che evidenzia la propria oggettività.

Nei sistemi ACM il rapporto tra ricercatore e immagine dovrebbe passare dal "Penso, quindi tu esisti" al "Se mi pensi, allora io esisto".

PARTE SECONDA

La teoria

Capitolo 2

Introduzione ai sistemi ACM

Massimo Buscema, Luigi Catzola

2.1 Aspetti generali

La contrattazione che si stabilisce, nello spazio e nel tempo, tra l'entità (*la cosa in sé*) e il contesto in cui essa interagisce e che porta a definire il *fenomeno*, si esprime per il tramite di sollecitazioni, ovvero di forze, tra gli elementi minimi del fenomeno stesso.

Tali forze sono dette *finite* quando assumono valori reali finiti in qualunque intorno spaziale e temporale di un punto assunto come iniziale. Sono dette *continue* quando non esiste alcun punto di un intorno spaziale e temporale, in cui il valore della forza dipende dalla direzione cui si arriva nel punto considerato. Infine, sono dette *locali* quando la propagazione degli effetti di tali forze avviene con continuità attraverso tutti i punti spazio temporali successivi al punto assunto come iniziale.

La capacità che ha un *fenomeno* di mantenere *finite*, *locali* e *continue* le forze tra i suoi elementi minimi, è la *coesione* spazio-temporale del *fenomeno* stesso.

In ogni fenomeno con topologia pertinente, l'identità e l'unità del fenomeno stesso è garantita dalla sua coesione spazio-temporale. Il che significa che ogni elemento minimo del fenomeno è contiguo e connesso, direttamente o indirettamente, tramite specifiche forze, agli altri. Il valore quantitativo di ogni elemento minimo del fenomeno in analisi, quindi, è il risultato dell'azione di queste forze. Si può dimostrare che in un fenomeno con topologia pertinente le forze che connettono ogni elemento minimo con ogni altro nel suo intorno locale sono sufficienti a spiegare la coesione spazio-temporale dell'intero fenomeno.

Quanto detto permette di affermare che ogni fenomeno visivo è esprimibile come una *matrice di valori*, connessi localmente gli uni agli altri, da altri valori (pesi), che rappresentano le *forze di coesione* locali tra le unità minime di quel fenomeno.

Come abbiamo già anticipato nelle pagine precedenti, il *fenomeno* cui in generale ci riferiamo nel nostro studio, è relativo all'immagine che cattura la nostra sensibilità allorché un soggetto investito da luce si dà a noi, per l'appunto, come *fenomeno*. L'immagine del soggetto, catturata e resa disponibile come *fenomeno,* è rappresentabile per la sua trattazione analitica da una matrice di punti che sono i pixel dell'immagine di partenza assegnata. Il tentativo di estrarre da tale immagine, ovvero da tale *fenomeno*, ulteriori informazioni sul soggetto che lo ha prodotto e che non sono visibili nell'immagine data in partenza, ci porta a considerare la matrice dei pixel dell'immagine di partenza, come un sistema dinamico che evolve nel suo spazio delle fasi verso una matrice di configurazione finale dei pixel. Questo spazio delle fasi, non va confuso con lo spazio bidimensionale o tridimensionale dell'immagine di partenza. Infatti è alla dimensione di quest'ultimo spazio che si aggiunge l'ulteriore dimensione data dalla intensità delle forze di connessione dei pixel tra loro allorquando se ne consideri di essi la matrice dei punti e la si consideri *attiva* nel senso che dalla matrice iniziale si evolverà verso una matrice finale proprio a causa di una evoluzione dinamica di tali connessioni.

2.2 Definizioni

Un *fenomeno* con *topologia pertinente* in uno spazio a D dimensioni è rappresentabile da *unità minime* chiamate *nodi* e da *connessioni locali* tra queste. Ogni unità minima u al passo di elaborazione n è definita dalla *posizione* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_D)$ che essa occupa all'interno del fenomeno e da un *valore* quantitativo funzione di tale posizione:

$$u_{x_1,x_2,\cdots,x_D}^{[n]} = u_x^{[n]} \qquad [2.1]$$

In pratica immaginiamo le unità minime u come *punti* posti nelle coordinate di *posizione* x ai quali è anche attribuito un *valore* detto intensità. Per ciascuna unità u, l'insieme della *posizione* x e del *valore* dell'intensità al ciclo n di elaborazione è riassunto nel termine $u_x^{[n]}$. L'immagine iniziale assegnata è da considerarsi come costituita dalle unità al ciclo "0" di elaborazione, pertanto ciascuna delle sue unità è identificata dal termine $u_x^{[0]}$. Quando non faremo riferimento al ciclo di elaborazione n, ma intendiamo una unità minima in senso generico, la indicheremo col termine u oppure u_x se vogliamo indicarne anche la *posizione*.

Consideriamo come *distanza* $dist(x, x_S)$ tra le posizioni $x = (x_1, x_2, \cdots, x_D)$ e $x_S = (x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD})$ di due unità minime, il massimo tra i valori assoluti degli indici k_{Si} con $i = 1, 2,\dots, D$ dove:

$$dist(x, x_S) = \max_{i=1,2,\dots,D} \left\{ \left| k_{Si} \right| \right\}. \qquad [2.2]$$

Data una coordinata di posizione x (nell'immagine assegnata), diciamo *intorno a raggio G* di x l'intorno I_x^G, centrato sulla posizione x, che include x e tutte le posizioni x_S la cui distanza da x sia non nulla e non superi G:

$$I_x^G = \left\{ (x, x_S) \middle| \ 0 < dist(x, x_S) \leq G \right\} \qquad [2.3]$$

In pratica ciascun intorno I_x^G di x è costituito da tutti e soli i punti x_S che soddisfino la [2.3] e da x stesso. Alla *posizione* x diamo il nome di *posizione del pixel centrale* dell'intorno I_x^G. Il pedice S (che varia da 1 a D) indica la variabilità della posizione dei punti x_S dell'intorno, distinti dalla posizione centrale x.

L'insieme delle posizioni x e x_S appartenenti ai rispettivi intorni I_x^G, in quanto coordinate di posizione, saranno usate indifferentemente per indicare le posizioni dei pixel dell'immagine iniziale assegnata, delle immagini in corso di elaborazione, e di quella finale. Nel caso in cui ci riferiremo ad intorni con raggio $G = 1$, l'intorno lo indicheremo con la notazione semplificata I_x.

Ogni *connessione locale* tra due unità minime, definisce la forza esercitata da un'unità minima sull'altra e viceversa. Quindi, assegnate due unità minime per esse esistono sempre due *connessioni locali* il cui valore è in generale diverso.

La *connessione* tra un'unità minima di posizione $x = (x_1, x_2, ..., x_D)$ e un'altra di posizione $x_S = (x_{S1}, x_{S2}, ..., x_{SD})$, al passo n sarà definita dalle *posizioni* x e x_s delle unità connesse e dal *valore* quantitativo:

$$w^{[n]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_{S1}, x_{S2}, \cdots, x_{SD})} = w^{[n]}_{x, x_S} \qquad [2.4]$$

equivalente a:

$$w^{[n]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD})} \qquad [2.5]$$

dove si è indicata esplicitamente ciascuna coordinata sia di x che di x_S : $x_{S1} = x_1 + k_{S1}$, $x_{S2} = x_2 + k_{S2}$, $x_{SD} = x_D + k_{SD}$. Nella [2.4], invece, abbiamo preferito adottare una notazione più semplice in cui sinteticamente abbiamo indicato $x_S = x + k_S$, dove $k_S = (k_{S1}, k_{S2}, ..., k_{SD})$.

In generale, pertanto, adotteremo la notazione seguente: $w^{[n]}_{x, x_S}$ per intendere il valore di ciascuna connessione tra l'unità minima u_x del pixel centrale (posto in posizione x dell'intorno) e ciascuna unità minima u_{x_S} dei pixel dell'intorno I^G_x (posti nelle posizioni x_S) al passo n di elaborazione.

Le *Matrici Attive delle Connessioni* vengono definite in relazione a un intorno di raggio G. Per ogni unità minima u_x vengono considerate le sole connessioni tra l'unità centrale in posizione x e quelle u_{x_S} del suo intorno $I^G_{x_S}$ a raggio G.

Definiamo *Matrice Attiva delle Connessioni* il sistema costituito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} u^{[n+1]}_{x_1, x_2, \cdots, x_D} &= \qquad [2.6] \\ &= f\left(u^{[n]}_{x_1, x_2, \cdots, x_D}, ..., u^{[n]}_{x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD}}, ..., w^{[n]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD})}\right) = \\ &= f\left(u^{[n]}_{x_1, x_2, \cdots, x_D}, ..., u^{[n]}_{x_{S1}, x_{S2}, \cdots, x_{SD}}, ..., w^{[n]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_{S1}, x_{S2}, \cdots, x_{SD})}\right) = \\ &= f(u^{[n]}_x, ..., u^{[n]}_{x_S}, ..., w^{[n]}_{x, x_S}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w^{[n+1]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_1 + k_1, x_2 + k_2, \cdots, x_D + k_D)} &= \qquad [2.7] \\ &= g\left(u^{[n]}_{x_1, x_2, \cdots, x_D}, u^{[n]}_{x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD}}, w^{[n]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD})}\right) = \\ &= g\left(u^{[n]}_{x_1, x_2, \cdots, x_D}, u^{[n]}_{x_{S1}, x_{S2}, \cdots, x_{SD}}, ..., w^{[n]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_{S1}, x_{S2}, \cdots, x_{SD})}\right) = \\ &= g(u^{[n]}_x, u^{[n]}_{x_S}, w^{[n]}_{x, x_S}) \end{aligned}$$

valide:

$$\forall u^{[n]}_x \; e \; \forall w^{[n]}_{x, x_S} \,\Big|\, (x, x_S) \in I^G_x = \{(x, x_S) \mid 0 < dist(x, x_S) \leq G\} \qquad [2.8]$$

e con valori iniziali $u^{[0]}_{x_1, x_2, \cdots, x_D} = u^{[0]}_x$ e $w^{[0]}_{(x_1, x_2, \cdots, x_D), (x_1 + k_{S1}, x_2 + k_{S2}, \cdots, x_D + k_{SD})} = w^{[0]}_{x, x_S}$ fissati.