N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

INTÉGRATION

Chapitre 6

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1959
© Hermann, Paris, 1959
© N. Bourbaki, 1981

© N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

ISBN-10 3-540-35319-4 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-35319-5 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.
Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

PRÉFACE À LA SECONDE ÉDITION

Les principales modifications apportées au texte du chapitre V portent sur les points suivants.

L'intégrale supérieure essentielle possédant, à bien des égards, des propriétés plus satisfaisantes que l'intégrale supérieure ordinaire (voir surtout la prop. 11 du § 1), le paragraphe qui lui est consacré a été développé. De même, on a traité avec plus de détail la théorie des familles sommables de mesures positives (§ 2).

La notion de *diffusion* a été introduite au paragraphe 3 ; celle de famille μ-adéquate de mesures positives a été légèrement généralisée, de manière à permettre la composition des diffusions.

Les mesures complexes ont été traitées de manière plus systématique ; cela n'a exigé la plupart du temps que des changements mineurs, sauf au paragraphe 5, où l'on a dû abandonner partiellement le point de vue des espaces de Riesz.

Enfin, diverses démonstrations ont été modifiées, pour permettre l'extension ultérieure des resultats au cas des espaces séparés non nécessairement localement compacts, qui seront traités au chapitre IX.

Nancago, automne 1965

N. Bourbaki

LIVRE VI

INTÉGRATION

CHAPITRE VI

INTÉGRATION VECTORIELLE

Dans ce chapitre, si F *désigne un espace vectoriel localement convexe séparé* (*sur* **R** *ou* **C**), *on note* F′ *son dual,* F″ *son bidual,* F′* *le dual algébrique de* F′ (*espace de toutes les formes linéaires sur* F′) ; F″ *est un sous-espace vectoriel de* F′*, *et* F *s'identifie* (*en tant qu'espace vectoriel sans topologie*) *à un sous-espace vectoriel de* F″. *On désigne par* F_σ *l'espace vectoriel* F *muni de la topologie affaiblie* $\sigma(F, F')$; *les qualificatifs « faible » et « faiblement » se rapportent à cette topologie.*

Dans ce chapitre, T *désigne un espace localement compact,* $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(T)$ *ou* $\mathcal{K}(T)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T)$) *l'espace vectoriel des fonctions réelles* (resp. *complexes*) *sur* T, *continues et à support compact ; pour toute partie* A *de* T, $\mathcal{K}(T, A)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T, A)$) *désigne le sous-espace de* $\mathcal{K}(T)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T)$) *formé des fonctions dont le support est contenu dans* A. *Sauf mention expresse du contraire, l'espace* $\mathcal{K}(T)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T)$) *sera muni de la topologie limite inductive des topologies de la convergence uniforme sur chacun des sous-espaces* $\mathcal{K}(T, K)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T, K)$), K *parcourant l'ensemble des parties compactes de* T.

Rappelons que cette topologie est plus fine que la topologie de la convergence uniforme, et par suite est séparée ; elle induit sur chacun des $\mathcal{K}(T, K)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T, K)$) la topologie de la convergence uniforme (*Esp. vect. top.*, chap. II, § 2, n° 4, *Remarque* 3). L'espace $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T)$ s'identifie à l'espace obtenu à partir de $\mathcal{K}(T)$ par extension des scalaires de **R** à **C**. Dire qu'une forme linéaire sur $\mathcal{K}(T)$ est une *mesure* revient à dire qu'elle est *continue* (*Esp. vect. top.*, chap. II, § 2, n° 4).

§ 1. Intégration des fonctions vectorielles

Dans ce paragraphe, μ désigne une mesure positive sur T et F un espace vectoriel localement convexe séparé sur $\mathbf{R}$. Pour toute application $\mathbf{f}$ de T dans F, et tout élément $\mathbf{z}'$ du dual F' de F, on désignera par $\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}' \rangle$ ou $\langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle$ la fonction numérique $\mathbf{z}' \circ \mathbf{f}$ sur T. Nous dirons que $\mathbf{f}$ possède *scalairement* une propriété $\boldsymbol{P}$ si, pour tout $\mathbf{z}' \in \mathrm{F}'$, $\langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle$ possède la propriété $\boldsymbol{P}$. Par exemple, on dira que $\mathbf{f}$ est *scalairement essentiellement μ-intégrable* si, pour tout $\mathbf{z}' \in \mathrm{F}'$, $\langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle$ est essentiellement μ-intégrable.

On notera que dans cette définition, la topologie de F n'intervient que par l'intermédiaire du dual F' de F. Si une fonction $\mathbf{f}$ possède scalairement la propriété $\boldsymbol{P}$, elle possède encore scalairement la propriété $\boldsymbol{P}$ quand on remplace la topologie de F par toute topologie localement convexe séparée compatible avec la dualité entre F et F'.

1. Fonctions scalairement essentiellement intégrables.

Si $\mathbf{f}$ est une application scalairement essentiellement μ-intégrable de T dans F, l'application $\mathbf{z}' \rightarrow \int \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{z}' \rangle \, d\mu(t)$ est une forme linéaire sur F', c'est-à-dire un élément du dual algébrique F'*.

Définition 1. — *On appelle* intégrale de $\mathbf{f}$ par rapport à μ *et on note* $\int \mathbf{f} d\mu$, *ou* $\int \mathbf{f}(t) d\mu(t)$, *l'élément de* F'* *défini par*

$$\left\langle \mathbf{z}', \int \mathbf{f} d\mu \right\rangle = \int \langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle \, d\mu$$

pour tout $\mathbf{z}' \in \mathrm{F}'$.

Si $\mathbf{f}$ est continue à support compact, elle est scalairement intégrable et la déf. 1 coïncide avec la définition de l'intégrale de $\mathbf{f}$ donnée au chap. III, § 4, n° 1. D'autre part, si F est un espace de Banach et si $\mathbf{f}$ est essentiellement intégrable (chap. V, § 2, n° 2, déf. 2), alors $\mathbf{f}$ est scalairement essentiellement intégrable et la déf. 1 coïncide avec la définition de l'intégrale de $\mathbf{f}$ donnée au chap. V, § 2, n° 2 (chap. V, § 2, n° 2, prop. 6 et chap. IV, § 4, n° 2, cor. 1 du th. 1).

Exemple. — Soient X un espace localement compact, $t \to \lambda_t$ une application de T dans l'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures sur X. Dire que la famille $t \to \lambda_t$ est μ-adéquate (chap. V, § 3, n° 1, déf. 1) signifie qu'elle est formée de mesures positives et que l'application $t \to \lambda_t$ est scalairement essentiellement μ-intégrable et μ-mesurable pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}(X), \mathcal{K}(X))$. Son intégrale par rapport à μ est la mesure qui a été notée $\int \lambda_t d\mu(t)$ au chap. V, § 3, n° 1.

Remarques. — 1) Si F est de dimension finie, toute application scalairement essentiellement intégrable de T dans F est essentiellement intégrable (chap. V, § 2, n° 2). Par contre, dans le cas général, une fonction scalairement négligeable sur un espace T compact peut ne pas même être μ-mesurable (exerc. 12).

2) Il est clair que l'intégrale de $\mathbf{f}$ ne dépend que de la classe de $\mathbf{f}$ modulo l'espace des applications de T dans F qui sont scalairement localement μ-négligeables. On notera qu'une fonction $\mathbf{g}$ scalairement localement négligeable n'est pas nécessairement nulle localement presque partout (exerc. 12). Toutefois, il en est bien ainsi lorsqu'il existe dans F′ une suite $(\mathbf{z}'_n)$ partout dense pour la topologie $\sigma(F', F)$: en effet, si H_n est l'ensemble localement négligeable des points $t \in T$ tels que $\langle \mathbf{g}(t), \mathbf{z}'_n \rangle \neq 0$, la réunion H des H_n est localement négligeable, et pour tout $t \notin H$, on a $\langle \mathbf{g}(t), \mathbf{z}'_n \rangle = 0$ pour tout n, d'où $\mathbf{g}(t) = 0$.

Soit u une application linéaire *continue* de F dans un espace localement convexe séparé G ; sa transposée ${}^t u$ est une application linéaire de G′ dans F′, et la transposée (algébrique) ${}^t({}^t u)$ est une application linéaire de F′* dans G′* qui prolonge u, et que nous noterons encore u. Avec cette convention :

Proposition 1. — *Si* $\mathbf{f}$ *est une application de* T *dans* F, *scalairement essentiellement* μ*-intégrable, l'application* $u \circ \mathbf{f}$ *est scalairement essentiellement* μ*-intégrable et on a*

$$\int (u \circ \mathbf{f}) d\mu = u\left(\int \mathbf{f} d\mu\right).$$

En effet, pour tout $\mathbf{z}' \in G'$, on a $\langle \mathbf{z}', u \circ \mathbf{f} \rangle = \langle {}^t u(\mathbf{z}'), \mathbf{f} \rangle$, d'où la première assertion ; la seconde résulte de la formule

$$\left\langle \mathbf{z}', \int (u \circ \mathbf{f}) d\mu \right\rangle = \int \langle \mathbf{z}', u \circ \mathbf{f} \rangle d\mu = \left\langle {}^t u(\mathbf{z}'), \int \mathbf{f} d\mu \right\rangle = \left\langle \mathbf{z}', u\left(\int \mathbf{f} d\mu \right) \right\rangle.$$

En particulier si $\mathbf{f}$ est scalairement essentiellement μ-intégrable elle reste scalairement essentiellement μ-intégrable lorsqu'on remplace la topologie de F par une topologie moins fine.

PROPOSITION 2. — *Soit* $\mathbf{f}$ *une application scalairement essentiellement* μ*-intégrable de* T *dans* F. *Pour toute fonction numérique* $g \geqslant 0$, μ*-mesurable et bornée, l'application* $t \to g(t)\mathbf{f}(t)$ (*notée* $g\mathbf{f}$ *ou* $\mathbf{f}g$) *de* T *dans* F *est scalairement essentiellement* μ*-intégrable,* $\mathbf{f}$ *est scalairement essentiellement* $(g.\mu)$*-intégrable, et l'on a* $\int \mathbf{f} d(g.\mu) = \int \mathbf{f} g d\mu$.

C'est une conséquence immédiate de la formule $\langle \mathbf{z}', g\mathbf{f} \rangle = g\langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle$ pour tout $\mathbf{z}' \in F'$ et de la formule $\int h d(g.\mu) = \int hg d\mu$ pour toute fonction scalaire h essentiellement μ-intégrable (chap. V, § 5, nº 3, th. 1).

Un grand nombre de propositions sur les fonctions numériques essentiellement intégrables se transposent mot pour mot en propositions sur les fonctions vectorielles scalairement essentiellement intégrables. Signalons parmi les plus importantes les conditions pour qu'une fonction soit essentiellement intégrable par rapport à une mesure définie par une densité (chap. V, § 5, nº 3, th. 1), ou par rapport à l'image d'une mesure (chap. V, § 6, nº 2, th. 1), ou par rapport à une mesure induite (chap. V, § 7, nº 1, th. 1), ou par rapport à la somme d'une famille sommable de mesures positives (chap. V, § 3, nº 5, prop. 5). Nous laissons ces transcriptions au lecteur.

Par contre, pour obtenir des énoncés correspondant aux théorèmes sur les intégrales « doubles » (chap. V, § 3, nº 4, th. 1 et § 8, nº 1, th. 1 (th. de Lebesgue-Fubini)), il est nécessaire d'en renforcer les hypothèses (cf. exerc. 1) ; en appliquant les théorèmes précités à chacune des fonctions $\langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle$, où $\mathbf{z}' \in F'$, on obtient ainsi les deux propositions suivantes :

Proposition 3. — *Soient* X *un espace localement compact,* $t \to \lambda_t$ *une famille* μ*-adéquate* (chap. V, § 3, n° 1, déf. 1) *de mesures positives sur* X, *et soit* $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$. *Soit* $\mathbf{f}$ *une application de* X *dans* F ; *on suppose que :* 1° $\mathbf{f}$ *est scalairement* ν*-intégrable* ; 2° *il existe un ensemble* $N \subset T$, *localement* μ*-négligeable, tel que, pour tout* $t \notin N$, $\mathbf{f}$ *soit scalairement* λ_t*-intégrable et que* $\int \mathbf{f} d\lambda_t \in F$. *Alors la fonction* $t \to \int \mathbf{f} d\lambda_t$, *définie pour* $t \notin N$, *est scalairement essentiellement* μ*-intégrable, et on a*

$$\int \mathbf{f}(x) d\nu(x) = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x) d\lambda_t(x).$$

Proposition 4. — *Soient* T, T′ *deux espaces localement compacts,* μ (resp. μ') *une mesure positive sur* T (resp. T′), $\nu = \mu \otimes \mu'$ *la mesure produit sur* $X = T \times T'$. *Soit* $\mathbf{f}$ *une application de* X *dans* F. *On suppose que :* 1° $\mathbf{f}$ *est scalairement* ν*-intégrable ;* 2° *il existe un ensemble* $N \subset T$, *localement* μ*-négligeable, tel que pour tout* $t \notin N$, *l'application* $t' \to \mathbf{f}(t, t')$ *soit scalairement* μ*-intégrable, et que* $\int \mathbf{f}(t, t') d\mu'(t') \in F$. *Alors la fonction* $t \to \int \mathbf{f}(t, t') d\mu'(t')$, *définie pour* $t \notin N$, *est scalairement essentiellement* μ*-intégrable, et on a*

$$\iint \mathbf{f}(t, t') d\mu(t) d\mu'(t') = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(t, t') d\mu'(t').$$

2. *Propriétés de l'intégrale d'une fonction scalairement essentiellement intégrable.*

Proposition 5. — *Soient* μ *une mesure positive bornée sur* T, S *un ensemble* μ*-mesurable portant* μ (chap. V, § 5, n° 7), $\mathbf{f}$ *une fonction scalairement* μ*-intégrable* (*) *à valeurs dans* F. *Soit* D *l'enve-*

(*) On rappelle que pour une mesure positive *bornée* μ, les notions de fonction μ-intégrable et de fonction essentiellement μ-intégrable sont les mêmes (chap. V, § 2, n° 1, cor. de la prop. 3).

loppe convexe fermée de $\mathbf{f}(S)$ *dans l'espace* F'^* *muni de la topologie* $\sigma(F'^*, F')$. *On a alors* $\int \mathbf{f}d\mu \in \mu(T)D$.

Comme D est l'intersection des demi-espaces fermés contenant $\mathbf{f}(S)$ (*Esp. vect. top.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 1 de la prop. 4), il suffit de démontrer que la relation $\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{z}' \rangle \leqslant a$ pour tout $t \in S$ (où $\mathbf{z}' \in F'$, $a \in \mathbf{R}$) entraîne $\left\langle \mathbf{z}', \int \mathbf{f}d\mu \right\rangle \leqslant a \,.\, \mu(T)$; mais comme $\int \mathbf{f}d\mu = \int_S \mathbf{f}d\mu$, cela résulte de la prop. 1 du chap. IV, § 4, n° 2.

Corollaire. — *Soient* μ *une mesure positive bornée sur* T, S *un ensemble* μ*-mesurable portant* μ, $\mathbf{f}$ *une application de* T *dans* F, *scalairement* μ*-mesurable et telle que* $\mathbf{f}(S)$ *soit contenu dans une partie convexe faiblement compacte* A *de* F. *Alors* $\mathbf{f}$ *est scalairement* μ*-intégrable, et l'on a* $\int \mathbf{f}d\mu \in \mu(T)A \subset F$.

En effet, pour tout $\mathbf{z}' \in F'$, $\langle \mathbf{z}', \mathbf{f} \rangle$ est μ-mesurable et bornée dans S, donc intégrable, ce qui prouve que $\mathbf{f}$ est scalairement intégrable. En outre, comme A est compact dans F_σ, il est fermé dans F'^*, et l'enveloppe convexe fermée de $\mathbf{f}(S)$ dans F'^* est contenue dans A, d'où le corollaire.

Proposition 6. — *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction scalairement essentiellement* μ*-intégrable à valeurs dans* F, *telle que* $\int \mathbf{f}d\mu \in F$. *Pour toute semi-norme* q *sur* F, *semi-continue inférieurement dans* F, *on a*

$$q\left(\int \mathbf{f}d\mu\right) \leqslant \overline{\int}^* (q \circ \mathbf{f})d\mu.$$

Soit D l'ensemble des $\mathbf{z} \in F$ tels que $q(\mathbf{z}) \leqslant 1$; D est fermé et convexe et contient 0, donc on a $D = D^{00}$ (*Esp. vect. top.*, chap. IV, § 2, n° 3, cor. 2 de la prop. 4). Il suffit donc de prouver que pour tout $\mathbf{z}' \in D^0$ on a $\left|\left\langle \mathbf{z}', \int \mathbf{f}d\mu \right\rangle\right| \leqslant \overline{\int}^* (q \circ \mathbf{f})d\mu$; mais cela résulte aussitôt de ce que l'on a, pour tout $t \in T$, $|\langle \mathbf{z}', \mathbf{f}(t) \rangle| \leqslant q(\mathbf{f}(t))$.