

*A Fulvia, Silvia e Marzia*

A. Quarteroni

# Modellistica numerica per problemi differenziali

3<sup>a</sup> edizione

ALFIO QUARTERONI  
MOX - Dipartimento di Matematica  
Politecnico di Milano e  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

La figura in copertina rappresenta le isolinee del modulo della velocità di un fluido intorno ad una schiera di cilindri. La simulazione è stata ottenuta da Paola Gervasio mediante risoluzione con elementi spettrali.

ISBN 10 88-470-0493-4 Springer Milan Berlin Heidelberg New York  
ISBN 13 978-88-470-0493-1 Springer Milan Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media

[springer.com](http://springer.com)

© Springer-Verlag Italia, Milano 2006

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'uso di figure e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla riproduzione su microfilm o in database, alla diversa riproduzione in qualsiasi altra forma (stampa o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. Una riproduzione di quest'opera, oppure di parte di questa, è anche nel caso specifico solo ammessa nei limiti stabiliti dalla legge sul diritto d'autore, ed è soggetta all'autorizzazione dell'Editore. La violazione delle norme comporta sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc., in quest'opera, anche in assenza di particolare indicazione, non consente di considerare tali denominazioni o marchi liberamente utilizzabili da chiunque ai sensi della legge sul marchio.

Impianti forniti dall'autore  
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano  
Stampa: Signum, Bollate (Mi)  
*Stampato in Italia*

---

# Indice

<b>Prefazione</b> .....	XI
<b>1 Richiami sulle equazioni alle derivate parziali</b> .....	1
1.1 Definizioni ed esempi .....	1
1.2 Necessità della risoluzione numerica .....	3
1.3 Classificazione delle EDP .....	5
1.3.1 Forma quadratica associata ad una EDP .....	8
1.4 Esercizi .....	9
<b>2 Equazioni di tipo ellittico</b> .....	11
2.1 Un esempio di problema ellittico: l'equazione di Poisson .....	11
2.2 Il problema di Poisson nel caso monodimensionale .....	12
2.2.1 Problema di Dirichlet omogeneo .....	13
2.2.2 Problema di Dirichlet non omogeneo .....	19
2.2.3 Problema di Neumann .....	19
2.2.4 Problema misto omogeneo .....	20
2.2.5 Condizioni al bordo miste (o di Robin) .....	20
2.3 Il problema di Poisson nel caso bidimensionale .....	21
2.3.1 Il problema di Dirichlet omogeneo .....	21
2.3.2 Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte del problema di Dirichlet .....	24
2.3.3 Il problema con condizioni miste non omogenee .....	24
2.3.4 Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte per il problema di Neumann .....	27
2.4 Problemi ellittici più generali .....	28
2.4.1 Teorema di esistenza e unicità .....	30
2.5 Esercizi .....	32

<b>3</b>	<b>Il metodo di Galerkin-elementi finiti per problemi ellittici</b> .....	37
3.1	Approssimazione con il metodo di Galerkin .....	37
3.2	Analisi del metodo di Galerkin .....	39
3.2.1	Esistenza e unicità .....	39
3.2.2	Stabilità .....	40
3.2.3	Convergenza .....	40
3.3	Il metodo degli elementi finiti nel caso monodimensionale .....	43
3.3.1	Una definizione di elemento finito nel caso Lagrangiano .....	47
3.3.2	L'approssimazione con elementi finiti lineari .....	48
3.3.3	Interpolazione e stima di interpolazione .....	50
3.3.4	Stima dell'errore nella norma $H^1$ .....	52
3.4	Il metodo degli elementi finiti nel caso multidimensionale .....	53
3.4.1	Risoluzione del problema di Poisson con elementi finiti .....	56
3.4.2	Condizionamento della matrice di rigidezza .....	58
3.4.3	Stima dell'errore di approssimazione nella norma dell'energia .....	61
3.4.4	Stima dell'errore di approssimazione in norma $L^2$ .....	68
3.5	Il problema dell'adattività della griglia .....	71
3.5.1	Adattività a priori basata sulla ricostruzione delle derivate .....	73
3.5.2	Adattività a posteriori .....	75
3.5.3	Stime a posteriori dell'errore nella norma $L^2$ .....	80
3.5.4	Stime a posteriori di un funzionale dell'errore .....	84
3.6	Come ottenere il problema aggiunto .....	86
3.6.1	Il caso lineare .....	87
3.6.2	Il caso non lineare .....	88
3.7	Esercizi .....	91
<b>4</b>	<b>I metodi spettrali</b> .....	97
4.1	Il metodo di Galerkin spettrale per un problema ellittico .....	97
4.2	Polinomi ortogonali e integrazione numerica gaussiana .....	101
4.2.1	Polinomi ortogonali di Legendre .....	101
4.2.2	Integrazione gaussiana .....	104
4.2.3	Le formule di Gauss-Legendre-Lobatto .....	105
4.3	Metodi G-NI in una dimensione .....	108
4.3.1	Interpretazione algebrica del metodo G-NI .....	109
4.3.2	Condizionamento della matrice di rigidezza del metodo G-NI .....	111
4.3.3	Equivalenza tra il metodo G-NI e un metodo di collocazione .....	112
4.4	Generalizzazione al caso bidimensionale .....	116
4.4.1	Convergenza del metodo G-NI .....	118
4.5	Metodo G-NI e MES-NI per un problema modello monodimensionale .....	126
4.5.1	Il metodo G-NI .....	127
4.5.2	Il metodo MES-NI .....	131
4.6	Metodi spettrali su triangoli e tetraedri .....	134
4.7	Esercizi .....	139

<b>5</b>	<b>Equazioni di diffusione-trasporto-reazione</b>	141
5.1	Formulazione debole del problema	141
5.2	Analisi di un problema di diffusione-trasporto monodimensionale	144
5.3	Analisi di un problema di diffusione-reazione monodimensionale	148
5.4	Relazioni tra elementi finiti e differenze finite	150
5.5	La tecnica del <i>mass-lumping</i>	152
5.6	Schemi decentrati e diffusione artificiale	154
5.7	Autovalori del problema di diffusione-trasporto	157
5.8	Metodi di stabilizzazione	159
5.8.1	Diffusione artificiale e schemi decentrati agli elementi finiti	160
5.8.2	Il metodo di Petrov-Galerkin	162
5.8.3	Il metodo della diffusione artificiale e della streamline diffusion nel caso bidimensionale	163
5.8.4	Consistenza ed errore di troncamento per i metodi di Galerkin e di Galerkin generalizzato	165
5.8.5	Parte simmetrica e antisimmetrica di un operatore	165
5.8.6	Metodi fortemente consistenti (GLS, SUPG, DW)	167
5.8.7	Analisi del metodo GLS	169
5.8.8	Stabilizzazione tramite funzioni a bolla	175
5.9	Alcuni test numerici	178
5.10	Un esempio di adattività <i>goal-oriented</i>	179
5.11	Esercizi	181
<b>6</b>	<b>Equazioni paraboliche</b>	185
6.1	Formulazione debole e sua approssimazione	186
6.2	Stime a priori	189
6.3	Analisi di convergenza del problema semi-discreto	192
6.4	Analisi di stabilità del $\theta$ -metodo	194
6.5	Analisi di convergenza del $\theta$ -metodo	198
6.6	Il caso dell'approssimazione spettrale G-NI	201
6.7	Esercizi	203
<b>7</b>	<b>Differenze finite per equazioni iperboliche</b>	207
7.1	Un problema di trasporto scalare	207
7.1.1	Una stima a priori	209
7.2	Sistemi di equazioni iperboliche lineari	211
7.2.1	L'equazione delle onde	213
7.3	Il metodo delle differenze finite	215
7.3.1	Discretizzazione dell'equazione scalare	216
7.3.2	Discretizzazione di sistemi iperboliche lineari	217
7.3.3	Trattamento del bordo	218
7.4	Analisi dei metodi alle differenze finite	219
7.4.1	Consistenza e convergenza	219
7.4.2	Stabilità	219
7.4.3	Analisi di Von Neumann e coefficienti di amplificazione	224

7.4.4	Dissipazione e dispersione .....	229
7.5	Equazioni equivalenti .....	233
7.5.1	Il caso dello schema upwind .....	233
7.5.2	Il caso dei metodi di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff .....	236
7.5.3	Sul significato dei coefficienti nelle equazioni equivalenti .....	236
7.5.4	Equazioni equivalenti e analisi dell'errore .....	237
7.6	Esercizi .....	238
<b>8</b>	<b>Elementi finiti e metodi spettrali per equazioni iperboliche</b> .....	<b>241</b>
8.1	Discretizzazione temporale .....	241
8.1.1	Gli schemi di Eulero in avanti e all'indietro .....	241
8.1.2	Gli schemi upwind, di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff .....	243
8.2	Gli schemi Taylor-Galerkin .....	246
8.3	Il caso multidimensionale .....	252
8.3.1	Condizioni al bordo e condizioni di compatibilità .....	254
8.3.2	Discretizzazione temporale .....	256
8.4	Elementi finiti discontinui .....	258
8.4.1	Il caso unidimensionale .....	258
8.4.2	Il caso multidimensionale .....	264
8.5	Elementi finiti spazio-temporali .....	266
8.6	Approssimazione con metodi spettrali .....	268
8.6.1	Il metodo G-NI in un singolo intervallo .....	268
8.6.2	Il metodo DG-SEM-NI .....	272
8.7	Trattamento numerico delle condizioni al bordo per sistemi iperboliche .....	274
8.7.1	Trattamento debole delle condizioni al bordo .....	278
8.8	Esercizi .....	280
<b>9</b>	<b>Cenni a problemi iperboliche non lineari</b> .....	<b>281</b>
9.1	Equazioni scalari .....	281
9.2	Approssimazione alle differenze finite .....	286
9.3	Approssimazione con elementi finiti discontinui .....	288
9.4	Sistemi iperboliche non-lineari .....	296
<b>10</b>	<b>Le equazioni di Navier-Stokes</b> .....	<b>301</b>
10.1	Formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes .....	303
10.2	Le equazioni di Stokes e la loro approssimazione .....	308
10.3	Problemi di punto-sella .....	312
10.3.1	Formulazione del problema .....	312
10.3.2	Analisi del problema di punto-sella .....	313
10.3.3	Approssimazione con il metodo di Galerkin ed analisi di stabilità e convergenza .....	317
10.4	Formulazione algebrica del problema di Stokes .....	320
10.5	Un esempio di problema stabilizzato .....	324
10.6	Un esempio numerico .....	326
10.7	Discretizzazione in tempo delle equazioni di Navier-Stokes .....	328

10.7.1	Metodi alle differenze finite	329
10.7.2	Metodi alle caratteristiche (o Lagrangiani)	331
10.7.3	Metodi a passi frazionari	332
10.8	Risoluzione del sistema di Stokes e metodi di fattorizzazione algebrica	335
10.9	Esercizi	339
<b>11</b>	<b>Cenni di programmazione degli elementi finiti</b>	<b>343</b>
11.1	Fasi operative di un codice a elementi finiti	343
11.1.1	Due parole sul codice utilizzato	346
11.2	Calcolo numerico degli integrali	347
11.2.1	Le coordinate baricentriche	350
11.2.2	Alcuni esempi di formule di quadratura	352
11.3	Memorizzazione di matrici sparse	353
11.4	La fase di assemblaggio	358
11.4.1	Codifica delle informazioni geometriche	360
11.4.2	Codifica delle informazioni funzionali	364
11.4.3	Mappatura tra elemento di riferimento e elemento fisico	365
11.4.4	La costruzione dei sistemi locali e di quello globale	369
11.4.5	La prescrizione delle condizioni al bordo	373
11.5	L'integrazione in tempo	376
11.6	Ed ora consideriamo un esempio completo	379
<b>12</b>	<b>Generazione di griglie nel caso bidimensionale</b>	<b>389</b>
12.1	Reticolazione di un dominio poligonale	389
12.2	Generazione di griglie strutturate	392
12.3	Generazione di griglie non strutturate	395
12.3.1	Triangolazione di Delaunay	395
12.3.2	Tecnica di avanzamento del fronte	397
12.4	Tecniche di regolarizzazione	398
12.4.1	Scambio delle diagonali	399
12.4.2	Movimento dei nodi	400
<b>13</b>	<b>Il metodo dei volumi finiti</b>	<b>403</b>
13.1	Alcuni principi elementari	404
13.2	La costruzione dei volumi di controllo per schemi <i>vertex-centered</i>	406
13.3	Discretizzazione di un problema di diffusione-trasporto-reazione	409
13.4	Analisi dell'approssimazione ai volumi finiti	411
13.5	Implementazione delle condizioni al bordo	412
13.6	Cenni alla discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes	413
<b>Appendice A</b>	<b>Richiami di analisi funzionale</b>	<b>417</b>
A.1	Funzionali e forme bilineari	417
A.2	Richiami sulle distribuzioni	418
A.2.1	Le funzioni a quadrato sommabile	420
A.2.2	Derivazione nel senso delle distribuzioni	422



A.3	Gli spazi di Sobolev .....	423
A.3.1	Regolarità degli spazi $H^k(\Omega)$ .....	424
A.3.2	Lo spazio $H_0^1(\Omega)$ .....	425
A.3.3	Gli operatori di traccia .....	426
A.4	Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ e gli spazi $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ .....	427
A.5	Esercizi .....	429
<b>Appendice B</b>	<b>Algoritmi di risoluzione di sistemi lineari</b> .....	<b>431</b>
B.1	Metodi diretti .....	431
B.2	Metodi iterativi .....	434
	<b>Riferimenti bibliografici</b> .....	<b>441</b>
	<b>Indice analitico</b> .....	<b>447</b>

---

# Prefazione

Queste note sono tratte dalle lezioni di “Metodi Numerici per l’Ingegneria” tenute presso il Politecnico di Milano e da quelle di “Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles” svolte presso l’EPFL (École Polytechnique Fédérale de Lausanne).

Esse costituiscono una introduzione elementare alla modellistica numerica di problemi differenziali alle derivate parziali, sia stazionari che evolutivi. L’enfasi è posta soprattutto su problemi lineari, ellittici, parabolici e iperbolici. Tuttavia si considerano anche alcuni problemi non lineari, quali le leggi di conservazione e le equazioni di Navier-Stokes per la meccanica dei fluidi. Numerosi esempi di interesse fisico motivano i modelli differenziali che vengono illustrati. Di ognuna delle classi di problemi considerati si illustrano le principali proprietà matematiche e se ne fornisce la cosiddetta *formulazione debole*, o integrale, che sta alla base del metodo di Galerkin. Indi, come caso notevole del metodo di Galerkin, si introduce il metodo degli elementi finiti, dapprima per problemi ai limiti monodimensionali, quindi nel caso multidimensionale. Se ne analizzano le proprietà di stabilità e di convergenza, si illustrano gli aspetti algoritmici e quelli relativi alla implementazione su calcolatore. Altri metodi, quali le differenze finite ed i metodi spettrali, vengono pure considerati, nell’ambito della risoluzione numerica di problemi specifici. Numerosi esercizi corredano i diversi capitoli allo scopo di fornire al lettore la possibilità di acquisire maggiore consapevolezza sui principali argomenti trattati.

Il testo è diviso in Capitoli, Sezioni e Sottosezioni. Il Capitolo 1 è dedicato ad un breve richiamo delle equazioni alle derivate parziali ed alla loro classificazione. Nel Capitolo 2 vengono introdotte le equazioni ellittiche (quali i problemi di Laplace e Poisson) e la loro formulazione integrale per condizioni al bordo di tipo generale, dapprima nel caso monodimensionale, poi in quello multidimensionale. Il Capitolo 3 è dedicato al metodo di approssimazione di Galerkin in generale ed al metodo degli elementi finiti in particolare. Nel Capitolo 4 si illustrano i metodi spettrali, ovvero metodi di Galerkin con sottospazi di polinomi globali, e la loro generalizzazione ai metodi pseudo-spettrali (o di collocazione) da un lato ed al metodo degli elementi spettrali dall’altro. Durante la lettura di questi capitoli il lettore troverà numerosi rinvii alle Appendici. In particolare, nell’Appendice A si introducono alcuni elementari con-

cetti di analisi funzionale, di teoria delle distribuzioni e di spazi di Sobolev, necessari per una corretta comprensione della formulazione debole (o integrale) dei problemi ai limiti. Nell'Appendice B si richiamano invece alcuni fra gli algoritmi più frequentemente utilizzati per la risoluzione di sistemi lineari generati dalla discretizzazione di problemi alle derivate parziali. Nel Capitolo 5 si introducono i problemi di diffusione e trasporto, si illustrano le difficoltà che derivano dalla presenza di strati limite nella soluzione e si discutono metodi di stabilizzazione, basati su differenze finite ed elementi finiti con opportuna viscosità numerica. Il Capitolo 6 è dedicato ai problemi parabolici, descrittivi processi di diffusione, per i quali si usano metodi di discretizzazione spaziale con elementi finiti e temporale con differenze finite. I Capitoli 7, 8 e 9 riguardano i problemi iperbolici, inerenti fenomeni di propagazione di onde. Ci concentreremo soprattutto sul caso dei problemi monodimensionali, al fine di analizzare in dettaglio le proprietà di dissipazione e di dispersione dei diversi schemi numerici che vengono considerati. Il Capitolo 10 è dedicato all'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes e ad una breve analisi dei problemi inerenti il soddisfacimento del vincolo di incomprimibilità. Infine nei Capitoli 11 e 12 (scritti in collaborazione con F. Saleri e L. Formaggia) si illustrano gli aspetti relativi alla programmazione del metodo degli elementi finiti.

Questo testo è stato scritto per gli studenti di discipline scientifiche, interessati alla modellistica per la risoluzione numerica di problemi differenziali, ma può essere utile anche a ricercatori e studiosi desiderosi di avvicinarsi a questo interessante ramo della matematica applicata.

Milano e Losanna, marzo 2000

Alfio Quarteroni

In questa terza edizione sono stati riveduti ed ampliati tutti i Capitoli, ed in modo particolare il quarto dedicato ai metodi spettrali, il sesto per ciò che concerne l'analisi di problemi parabolici, l'ottavo relativamente all'approssimazione spettrale di problemi iperbolici, ed infine i Capitoli 11 e 12 concernenti gli aspetti implementativi del metodo agli elementi finiti. In particolare, il Capitolo 11 è scritto in collaborazione con A. Veneziani e L. Formaggia e riporta esempi di programmazione in C++ (un linguaggio orientato agli oggetti). Si è inoltre aggiunto un breve Capitolo, il 13, sull'introduzione al metodo dei volumi finiti.

Negli ultimi due anni sono usciti in questa stessa serie due monografie che possono essere considerate un importante compendio a questo testo: *“Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni”* di S. Salsa, in cui si introducono ed analizzano i problemi differenziali che vengono qui trattati, e *“Applicazioni ed esercizi di modellistica numerica per problemi differenziali”* di L. Formaggia, F. Saleri e A. Veneziani, che a tutti gli effetti può considerarsi di supporto a questo testo per ciò che concerne la risoluzione di problemi ed esercizi nonché per l'approfondimento delle

tecniche qui presentate. Segnaliamo anche il testo “*Elementi di fluidodinamica*” di G. Riccardi e D. Durante che, illustrando i modelli differenziali basilari della dinamica dei fluidi, può essere considerato come complementare ai Capitoli 9 e 10 inerenti la fluidodinamica numerica.

Vorrei ringraziare in modo particolare Simona Perotto per il suo contributo davvero determinante, ma anche Alessandro Veneziani, Nicola Parolini e Paola Gervasio. Infine, ringrazio Francesca Bonadei di Springer per il costante aiuto e gli innumerevoli consigli finalizzati a migliorare questa nuova edizione.

Milano e Losanna, 9 luglio 2006

Alfio Quarteroni

# Richiami sulle equazioni alle derivate parziali

Scopo di questo capitolo è quello di richiamare i concetti di base relativi alle equazioni alle derivate parziali (in breve EDP). Per una più ampia trattazione si vedano [PS91], [RR04], [Pro94], [Col76], [Joh82], [Sal04].

## 1.1 Definizioni ed esempi

Le *equazioni alle derivate parziali* sono equazioni differenziali contenenti derivate della funzione incognita rispetto a più variabili (temporali o spaziali). In particolare, indicata con  $u$  la funzione incognita nelle  $d + 1$  variabili indipendenti  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$  e  $t$ , denoteremo con

$$\mathcal{P}(u, g) = F \left( \mathbf{x}, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \dots, \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_d + p_t} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_d^{p_d} \partial t^{p_t}}, g \right) = 0 \quad (1.1)$$

una generica EDP, essendo  $g$  l'insieme dei dati dai quali dipenderà la EDP, mentre  $p_1, \dots, p_d, p_t \in \mathbb{N}$ .

Diremo che la (1.1) è di *ordine*  $q$ , se  $q$  è l'ordine massimo delle derivate parziali che vi compaiono, ovvero il massimo valore assunto da  $p_1 + p_2 + \dots + p_d + p_t$ .

Se la (1.1) dipende linearmente dall'incognita  $u$  e dalle sue derivate, l'equazione verrà detta *lineare*. In tal caso

$$\mathcal{P}(\alpha u + \beta w, g) = \alpha \mathcal{P}(u, g) + \beta \mathcal{P}(w, g) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Nel caso particolare in cui le derivate di ordine massimo compaiono solo linearmente (con coefficienti che possono dipendere da derivate di ordine inferiore), l'equazione si dirà *quasi-lineare*. Si dirà *semi-lineare* se è quasi-lineare ed i coefficienti delle derivate di ordine massimo dipendono solo da  $\mathbf{x}$  e  $t$ , ma non dalla soluzione  $u$ . Infine se nell'equazione non compaiono termini indipendenti dalla funzione incognita  $u$ , la EDP si dice *omogenea*.

Elenchiamo nel seguito alcuni esempi di EDP che si incontrano frequentemente nelle scienze applicate.

**Esempio 1.1** Un'equazione lineare del prim'ordine è l'*equazione di trasporto* (o di *convezione*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta u) = 0, \quad (1.2)$$

avendo indicato con

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)^T,$$

l'*operatore divergenza*. La (1.2), integrata su una regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , esprime la conservazione della massa di un sistema materiale che occupa la regione  $\Omega$ . La variabile  $u$  è la densità del sistema, mentre  $\beta(\mathbf{x})$  è la velocità posseduta da una particella del sistema che all'istante  $t$  occupa la posizione  $\mathbf{x}$ . ■

**Esempio 1.2** Equazioni lineari del second'ordine sono l'*equazione del potenziale*

$$-\Delta u = f, \quad (1.3)$$

che descrive la diffusione di un fluido in una regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  omogenea ed isotropa, ma anche lo spostamento verticale di una membrana elastica, l'*equazione del calore* (o di *diffusione*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad (1.4)$$

e l'*equazione delle onde*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0. \quad (1.5)$$

Abbiamo denotato con

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1.6)$$

l'*operatore di Laplace* (o *laplaciano*). ■

**Esempio 1.3** Un esempio di equazione quasi-lineare del prim'ordine è dato dall'*equazione di Burgers*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,$$

mentre la sua variante ottenuta aggiungendo una perturbazione del second'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad \epsilon > 0,$$

fornisce un esempio di equazione semi-lineare.

Un'equazione non lineare, sempre del second'ordine, è

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 = f.$$

■

Una funzione  $u = u(x_1, \dots, x_d, t)$  è una *soluzione* od un *integrale particolare* della (1.1), se, sostituita nella (1.1) assieme con tutte le sue derivate, rende la (1.1) una identità. L'insieme di tutte le soluzioni della (1.1) si chiama l'*integrale generale*.

**Esempio 1.4** L'equazione del trasporto nel caso monodimensionale,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (1.7)$$

ammette un integrale generale della forma  $u = w(x_1 + t)$ , essendo  $w$  una funzione arbitraria sufficientemente regolare (si veda l'Esercizio 2). Analogamente, l'equazione delle onde monodimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1.8)$$

ammette come integrale generale

$$u(x_1, t) = w_1(x_1 + t) + w_2(x_1 - t),$$

essendo  $w_1$  e  $w_2$  due funzioni arbitrarie, sufficientemente regolari (si veda l'Esercizio 3). ■

**Esempio 1.5** Consideriamo l'equazione del calore monodimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

per  $0 < x < 1$  e  $t > 0$ , con condizioni al contorno

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

e la condizione iniziale  $u|_{t=0} = u_0$ . La soluzione è

$$u(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{0,j} e^{-(j\pi)^2 t} \sin(j\pi x_1),$$

dove  $u_0 = u|_{t=0}$  è il dato iniziale e

$$u_{0,j} = 2 \int_0^1 u_0(x_1) \sin(j\pi x_1) dx_1, \quad j = 1, 2, \dots$$

■

## 1.2 Necessità della risoluzione numerica

In generale, non è possibile ricavare per via analitica una soluzione della (1.1). In effetti, i metodi di integrazione analitica disponibili (come la tecnica di separazione delle variabili) sono di limitata applicabilità. Peraltro, anche nel caso in cui si conosca un integrale generale, non è poi detto che si riesca a determinare un integrale particolare. Per ottenere quest'ultimo bisognerà infatti assegnare opportune condizioni su  $u$  (e/o sulle sue derivate) alla frontiera del dominio  $\Omega$ .

Dagli esempi forniti appare d'altra parte evidente che l'integrale generale dipende da alcune *funzioni arbitrarie* (e non da *costanti* arbitrarie, come accade per le equazioni differenziali ordinarie), di modo che l'imposizione delle condizioni comporterà la risoluzione di problemi matematici, in generale, estremamente complicati. Di conseguenza, da un punto di vista teorico, ci si deve spesso accontentare di studiare solo l'*esistenza* e l'*unicità* della soluzione di una EDP.

Da ciò segue l'importanza di disporre di *metodi numerici* che permettano di costruire un'approssimazione  $u_N$  della soluzione esatta  $u$  e di valutare (in una qualche norma) l'errore  $u_N - u$  che si commette sostituendo alla soluzione esatta  $u$  la soluzione approssimata  $u_N$ . L'intero positivo  $N$  denota la dimensione (finita) del problema approssimato. Schematicamente, otterremo la situazione seguente:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(u, g) = 0 & \text{EDP esatta} \\ \downarrow & \text{[metodi numerici]} \\ \mathcal{P}_N(u_N, g_N) = 0 & \text{EDP approssimata} \end{array}$$

avendo indicato con  $g_N$  una approssimazione dell'insieme dei dati  $g$  dai quali dipende la EDP, e con  $P_N$  la nuova relazione funzionale che caratterizza il problema approssimato. Per semplicità si può porre:  $u = u(g), u_N = u_N(g_N)$ .

Presenteremo diversi metodi numerici a partire dal Cap. 3. Ci limitiamo qui a ricordarne le principali caratteristiche. Un metodo numerico è *convergente* se

$$\|u - u_N\| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty$$

in una norma opportuna. Più precisamente indichiamo con  $g_N$  un'approssimazione ammissibile dell'insieme dei dati dal quale dipende la EDP, si ha convergenza se e solo se

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_0(\varepsilon) > 0, \exists \delta(N_0, \varepsilon) : \forall N > N_0(\varepsilon), \forall g_N \text{ t.c. } \|g - g_N\| < \delta(N_0, \varepsilon) \\ \Rightarrow \quad \|u(g) - u_N(g_N)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(La norma usata per i dati non è necessariamente la stessa usata per le soluzioni.) Verificare direttamente la convergenza di un metodo numerico può non essere agevole. Conviene piuttosto passare ad una verifica delle proprietà di consistenza e di stabilità.

Un metodo numerico si dice *consistente* se

$$\mathcal{P}_N(u, g) \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow \infty, \tag{1.9}$$

e *fortemente consistente* se

$$\mathcal{P}_N(u, g) = 0 \quad \forall N. \tag{1.10}$$

Si noti che (1.9) si può formulare in modo equivalente come

$$\mathcal{P}_N(u, g) - \mathcal{P}(u, g) \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow \infty,$$



essendo  $u$  la soluzione del problema esatto corrispondente al dato  $g$ . Ciò esprime la proprietà che  $\mathcal{P}_N$  (la EDP approssimata) “tenda” a  $\mathcal{P}$  (quella esatta) per  $N \rightarrow \infty$ . Diciamo invece che un metodo numerico è *stabile* se a piccole perturbazioni sui dati corrispondono piccole perturbazioni sulla soluzione, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \delta g_N : \|\delta g_N\| < \delta \Rightarrow \|\delta u_N\| \leq \varepsilon, \forall N,$$

essendo  $u_N + \delta u_N$  la soluzione del problema perturbato

$$\mathcal{P}_N(u_N + \delta u_N, g_N + \delta g_N) = 0.$$

(Si veda [QSS00, Cap. 2] per approfondimenti).

Il risultato fondamentale, noto come *teorema di equivalenza*, garantisce infine che

se un metodo è consistente, allora è convergente se e solo se è stabile

Nella scelta di un metodo numerico interverranno ovviamente anche altre caratteristiche, quali ad esempio la *velocità di convergenza* (ovvero l'ordine rispetto ad  $1/N$  con cui l'errore tende a zero) ed il *costo computazionale*, ovvero il tempo di calcolo e la memoria richiesta per l'implementazione del metodo stesso su calcolatore.

## 1.3 Classificazione delle EDP

Le equazioni differenziali possono essere classificate in base alla loro formulazione matematica in tre famiglie diverse: equazioni *ellittiche*, *paraboliche* ed *iperboliche*, per ognuna delle quali si considerano metodi numerici specifici. Limitiamoci al caso di EDP del second'ordine lineari, a coefficienti costanti, della forma

$$Lu = A \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + D \frac{\partial u}{\partial x_1} + E \frac{\partial u}{\partial x_2} + Fu = G, \quad (1.11)$$

con  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$  (si noti che una qualunque delle variabili  $x_i$  potrebbe rappresentare la variabile temporale). In tal caso, la classificazione si effettua in base al segno del cosiddetto *discriminante*,  $\Delta = B^2 - 4AC$ . In particolare:

- se  $\Delta < 0$  l'equazione si dice *ellittica*,
- se  $\Delta = 0$  l'equazione si dice *parabolica*,
- se  $\Delta > 0$  l'equazione si dice *iperbolica*.

**Esempio 1.6** L'equazione delle onde (1.8) è iperbolica, mentre l'equazione del potenziale (1.3) è ellittica. Un esempio di problema parabolico è dato dall'equazione del calore (1.4), ma anche dalla seguente equazione di diffusione-trasporto

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla \cdot (\beta u) = 0.$$

in cui  $\mu > 0$ , e  $\beta$  è un campo vettoriale assegnato. ■

Il criterio introdotto fa dipendere la classificazione dai soli coefficienti delle derivate di ordine massimo e si giustifica con il seguente argomento. Come si ricorderà, l'equazione algebrica quadratica

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = G,$$

rappresenta nel piano cartesiano  $(x_1, x_2)$  un'iperbole, una parabola od un'ellisse a seconda che  $\Delta$  sia positivo, nullo o negativo. Questo parallelo con le coniche motiva il nome attribuito alle tre classi di operatori alle derivate parziali.

Indaghiamo più in profondità le differenze tra le tre classi. Supponiamo, senza che ciò sia restrittivo, che  $D, E, F$  e  $G$  siano nulli. Cerchiamo un cambio di variabili della forma

$$\xi = \alpha x_2 + \beta x_1, \quad \eta = \gamma x_2 + \delta x_1, \quad (1.12)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  da scegliersi in modo che  $Lu$  diventi multiplo di  $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ . Essendo

$$\begin{aligned} Lu = & (A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ & + (2A\beta\delta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (A\delta^2 + B\gamma\delta + C\gamma^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

si dovrà richiedere che

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0, \quad A\delta^2 + B\gamma\delta + C\gamma^2 = 0. \quad (1.14)$$

Se  $A = C = 0$ , la trasformazione banale  $\xi = x_2, \eta = x_1$  (ad esempio) fornisce  $Lu$  nella forma desiderata.

Supponiamo allora che  $A$  o  $C$  siano non nulli. Non è restrittivo supporre  $A \neq 0$ . Allora se  $\alpha \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$ , possiamo dividere la prima equazione della (1.14) per  $\alpha^2$  e la seconda per  $\gamma^2$ . Troviamo due equazioni quadratiche identiche per le frazioni  $\beta/\alpha$  e  $\delta/\gamma$ . Risolvendole, si ha

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2A} [-B \pm \sqrt{\Delta}], \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2A} [-B \pm \sqrt{\Delta}].$$

Affinché la trasformazione (1.12) sia non singolare, i quozienti  $\beta/\alpha$  e  $\delta/\gamma$  devono essere diversi. Dobbiamo pertanto prendere il segno positivo in un caso, quello negativo nell'altro ed inoltre assumere  $\Delta > 0$ . Se  $\Delta$  fosse nullo infatti le due frazioni sarebbero ancora coincidenti. Infine, se  $\Delta$  fosse negativo nessuna frazione potrebbe essere reale. Una soluzione è pertanto fornita da:

$$\alpha = \gamma = 2A, \quad \beta = -B + \sqrt{\Delta}, \quad \delta = -B - \sqrt{\Delta}.$$

Corrispondentemente,

$$\xi = 2Ax_2 + [-B + \sqrt{\Delta}] x_1, \quad \eta = 2Ax_2 + [-B - \sqrt{\Delta}] x_1,$$

ed il problema differenziale trasformato diventa

$$Lu = -4A\Delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.15)$$

Il caso  $A = 0$  può essere trattato in modo analogo prendendo  $\xi = x_1$ ,  $\eta = -Bx_2/C + x_1$ .

Concludendo,  $Lu$  può diventare un multiplo di  $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$  secondo la trasformazione (1.12) se e solo se  $\Delta > 0$  ed in tal caso, come abbiamo anticipato, il problema è detto *iperbolico*. È facile verificare che la soluzione generale del problema (1.15) è

$$u = p(\xi) + q(\eta),$$

essendo  $p$  e  $q$  funzioni differenziabili di una variabile, arbitrarie. Le linee  $\xi = \text{costante}$  e  $\eta = \text{costante}$  sono dette le *caratteristiche* di  $L$  e sono caratterizzate dal fatto che su di esse le funzioni  $p$  e  $q$  si mantengono rispettivamente costanti. In particolare, eventuali discontinuità della soluzione  $u$ , si propagano lungo le caratteristiche (lo si vedrà più in dettaglio nel Cap. 7). In effetti, identificando  $x_1$  con  $t$  e  $x_2$  con  $x$ , la trasformazione

$$x' = x - \frac{B}{2A}t, \quad t' = t,$$

trasforma l'operatore iperbolico (con  $A \neq 0$ )

$$Lu = A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in un multiplo dell'operatore delle onde

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{con } C = -B/2A.$$

Dunque  $L$  è l'operatore delle onde in un sistema di coordinate che si muove con velocità  $-B/2A$ . Le caratteristiche dell'operatore delle onde sono le linee che verificano

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

ovvero

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{c}.$$

Se invece  $\Delta = 0$ , come detto,  $L$  è *parabolico*. In tal caso esiste un solo valore di  $\beta/\alpha$  in corrispondenza del quale il coefficiente di  $\partial^2 u / \partial \xi^2$  in (1.13) si annulla. Precisamente,  $\beta/\alpha = -B/(2A)$ . Peraltro, essendo  $B/(2A) = 2C/B$ , questa scelta comporta anche che il coefficiente di  $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$  si annulli. Di conseguenza, la trasformazione

$$\xi = 2Ax_2 - Bx_1, \quad \eta = x_1,$$

trasforma il problema originario nel seguente

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

la cui soluzione generale ha la forma

$$u = p(\xi) + \eta q(\xi).$$

Un operatore parabolico ha dunque solo una famiglia di caratteristiche, precisamente  $\xi = \text{costante}$ . Le discontinuità nelle derivate di  $u$  si propagano lungo tali caratteristiche.

Infine, se  $\Delta < 0$  (operatori *ellittici*) non esiste alcuna scelta di  $\beta/\alpha$  o  $\delta/\gamma$  che renda nulli i coefficienti  $\partial^2 u / \partial \xi^2$  e  $\partial^2 u / \partial \eta^2$ . Tuttavia, la trasformazione

$$\xi = \frac{2Ax_2 - Bx_1}{\sqrt{4AC - B^2}}, \quad \eta = x_1,$$

trasforma  $Lu$  in

$$Lu = A \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right),$$

ossia in un multiplo dell'equazione del potenziale. Essa non ha perciò alcuna famiglia di caratteristiche.

### 1.3.1 Forma quadratica associata ad una EDP

All'equazione (1.11) si può associare il cosiddetto simbolo principale  $S^p$  definito da

$$S^p(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = -A(\mathbf{x})q_1^2 - B(\mathbf{x})q_1q_2 - C(\mathbf{x})q_2^2.$$

Questa forma quadratica in  $q_1, q_2$  si può rappresentare in forma matriciale come segue:

$$S^p(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} -A(\mathbf{x}) & -\frac{1}{2}B(\mathbf{x}) \\ -\frac{1}{2}B(\mathbf{x}) & -C(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (1.16)$$

Una forma quadratica è detta *definita* se la matrice associata ha autovalori tutti dello stesso segno (positivi o negativi); è *indefinita* se la matrice ha autovalori di entrambi i segni; è *degenere* se la matrice è singolare.

Si può allora dire che l'equazione (1.11) è ellittica se la forma quadratica (1.16) è definita (positiva o negativa), iperbolica se è indefinita, parabolica se è degenere.

Le matrici associate all'equazione del potenziale (1.3), del calore (1.4) (in una dimensione) e delle onde (1.5) sono date rispettivamente da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sono definita positiva nel primo caso, singolare nel secondo, indefinita nel terzo.

## 1.4 Esercizi

1. Si classifichino, in base all'ordine ed alla linearità, le seguenti equazioni:

$$(a) \quad \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$(b) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} = f,$$

$$(c) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = f.$$

[*Soluzione:* (a) quasi-lineare, del second'ordine; si tratta dell'equazione di Plateau che regola, sotto opportune ipotesi, il moto piano di un fluido. La  $u$  che compare è il cosiddetto *potenziale cinetico*; (b) lineare, del quart'ordine. È l'equazione della *verga vibrante*,  $\rho$  è la densità della verga, mentre  $K$  è una quantità positiva che dipende dalle caratteristiche geometriche della verga stessa; (c) non lineare, del prim'ordine.]

2. Si riduca l'equazione del trasporto monodimensionale (1.7) ad una equazione della forma  $\partial w / \partial y = 0$ , avendo posto  $y = x_1 - t$  e si ricavi che  $u = w(x_1 + t)$  è soluzione dell'equazione di partenza.

[*Soluzione:* si effettui il cambio di variabili  $z = x_1 + t$ ,  $y = x_1 - t$ ,  $u(x_1, t) = w(y, z)$ . In tal modo  $\partial u / \partial x_1 = \partial w / \partial z + \partial w / \partial y$ , mentre  $\partial u / \partial t = \partial w / \partial z - \partial w / \partial y$ , e dunque,  $-2\partial w / \partial y = 0$ . Si osservi a questo punto che l'equazione così ottenuta ammette una soluzione  $w(y, z)$  che non dipende da  $y$  e dunque, usando le variabili originarie,  $u = w(x_1 + t)$ .]

3. Si dimostri che l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

con  $c$  costante, ammette come soluzione  $u(x_1, t) = w_1(x_1 + ct) + w_2(x_1 - ct)$ , con  $w_1, w_2$  due funzioni arbitrarie sufficientemente regolari.

[*Soluzione:* si proceda come nell'Esercizio 2, impiegando il cambio di variabili  $y = x_1 + ct$ ,  $z = x_1 - ct$  e ponendo  $u(x_1, t) = w(y, z)$ .]

4. Si verifichi che l'equazione di Kortevég-de-Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = 0,$$

ammette l'integrale generale della forma  $u = a \cos(kx_1 - \omega t)$  con  $\omega$  opportuno da determinarsi,  $a, \beta$  ed  $\alpha$  costanti assegnate. Questa equazione descrive la posizione  $u$  di un fluido rispetto ad una posizione di riferimento, in presenza di propagazione di onde lunghe.

[Soluzione: la  $u$  data soddisfa l'equazione solo se  $\omega = k\beta - \alpha k^3$ .]

5. Si consideri l'equazione

$$x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

con  $x_1 x_2 \neq 0$ . La si classifichi e si determinino le linee caratteristiche.

6. Si consideri la generica equazione differenziale semi-lineare del second'ordine

$$a(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(u, \nabla u) = 0.$$

Si scriva l'equazione delle linee caratteristiche e si deduca da essa la classificazione dell'equazione proposta, commentando le varie situazioni.

7. Si ponga  $r(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  e si definisca  $u(\mathbf{x}) = \ln(r(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Si verifichi che

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

dove  $\Omega$  è un qualunque insieme aperto tale che  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

[Soluzione: si osservi che

$$u_{x_i x_i} = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2x_i^2}{r^2} \right), \quad i = 1, 2.]$$

## Equazioni di tipo ellittico

Questo capitolo è dedicato all'introduzione di problemi ellittici ed alla loro formulazione debole. Pur essendo la nostra trattazione alquanto elementare, prima di affrontarne la lettura, il lettore che fosse completamente a digiuno di conoscenze di Analisi Funzionale è invitato a consultare l'Appendice A.

### 2.1 Un esempio di problema ellittico: l'equazione di Poisson

Si consideri un dominio (ovvero un insieme aperto)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitato e connesso e sia  $\partial\Omega$  la sua frontiera. Denoteremo con  $\mathbf{x}$  la coppia di variabili spaziali  $(x_1, x_2)$ . Il problema oggetto del nostro esame è

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

dove  $f = f(\mathbf{x})$  è una funzione assegnata e il simbolo  $\Delta$  denota l'operatore laplaciano (1.6) in due dimensioni. La (2.1) è un'equazione ellittica del second'ordine, lineare, non omogenea (se  $f \neq 0$ ). Chiameremo la (2.1) la *formulazione forte* dell'equazione di Poisson. Ricordiamo inoltre che, nel caso in cui  $f = 0$ , l'equazione (2.1) è nota come equazione di Laplace.

Fisicamente  $u$  può rappresentare lo spostamento verticale di una membrana elastica dovuto all'applicazione di una forza specifica pari ad  $f$ , oppure la distribuzione di potenziale elettrico dovuta ad una densità di carica elettrica  $f$ .

Per avere un'unica soluzione, alla (2.1) vanno aggiunte delle opportune condizioni al contorno, occorrono cioè delle informazioni relative al comportamento della soluzione  $u$  sulla frontiera  $\partial\Omega$  del dominio. Si può ad esempio assegnare il valore dello spostamento  $u$  sul bordo

$$u = g \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (2.2)$$

dove  $g$  è una funzione assegnata, e si parlerà in tal caso di un *problema di Dirichlet*. Il caso in cui  $g = 0$  si dice *omogeneo*.

In alternativa si può imporre il valore della *derivata normale* di  $u$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{su } \partial\Omega,$$

essendo  $\mathbf{n}$  la normale uscente ad  $\Omega$  e  $h$  una funzione assegnata. Il problema associato si dice *problema di Neumann* e corrisponde, nel caso del problema della membrana, ad aver imposto la trazione al bordo della membrana stessa. Anche stavolta il caso  $h = 0$  si dirà *omogeneo*.

Si possono infine assegnare su porzioni diverse del bordo del dominio computazionale  $\Omega$ , condizioni di tipo diverso. Ad esempio, supponendo che  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  con  $\overset{\circ}{\Gamma}_D \cap \overset{\circ}{\Gamma}_N = \emptyset$ , si possono imporre le condizioni

$$\begin{cases} u = g & \text{su } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \Gamma_N. \end{cases}$$

Si è utilizzata la notazione  $\overset{\circ}{\Gamma}$  per indicare l'interno di  $\Gamma$ . Si dice in tal caso che il problema associato è di tipo *misto*.

Anche nel caso di Dirichlet omogeneo in cui  $f$  sia una funzione continua in  $\overline{\Omega}$  (la chiusura di  $\Omega$ ), non è detto che il problema (2.1), (2.2) ammetta soluzione regolare. Ad esempio, se  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  e  $f = 1$ ,  $u$  non potrebbe appartenere allo spazio  $C^2(\overline{\Omega})$ . Infatti, se così fosse, avremmo

$$-\Delta u(0, 0) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0, 0) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(0, 0) = 0$$

in quanto le condizioni al bordo imporrebbero  $u(x_1, 0) = u(0, x_2) = 0 \quad \forall x_1 \in [0, 1], \forall x_2 \in [0, 1]$ . Dunque  $u$  non potrebbe verificare l'equazione (2.1), ovvero

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } (0, 1) \times (0, 1).$$

In conclusione, anche se  $f \in C^0(\overline{\Omega})$ , non ha senso in generale cercare una soluzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  di (2.1), (2.2), mentre si hanno maggiori probabilità di trovare una soluzione  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  (uno spazio più grande di  $C^2(\overline{\Omega})$ !).

Siamo pertanto interessati a trovare una formulazione alternativa a quella forte anche perché, come vedremo nella prossima sezione, essa non consente di trattare alcuni casi fisicamente significativi. Ad esempio, non è detto che, in presenza di dati poco regolari, la soluzione fisica stia nello spazio  $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , ma nemmeno in  $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ .

## 2.2 Il problema di Poisson nel caso monodimensionale

Al fine di introdurre la forma debole di un problema differenziale, iniziamo ad occuparci di un problema ai limiti in una dimensione.



### 2.2.1 Problema di Dirichlet omogeneo

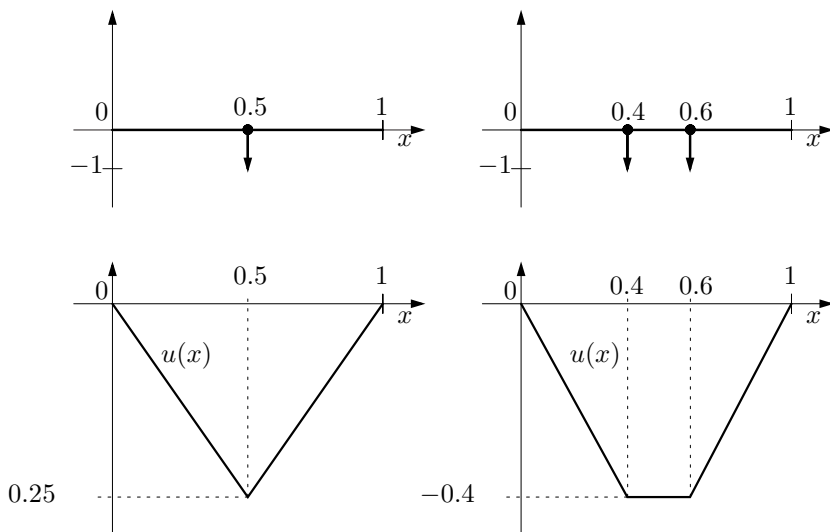
Consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo nel caso monodimensionale:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

In tal caso  $\Omega$  è l'intervallo  $(0, 1)$ . Questo problema governa, ad esempio, la configurazione di equilibrio di un filo elastico con tensione pari ad uno, fissato agli estremi, in regime di piccoli spostamenti e soggetto ad una forza trasversale di intensità  $f$ . La forza compressiva agente sul tratto  $(0, x)$  del filo è

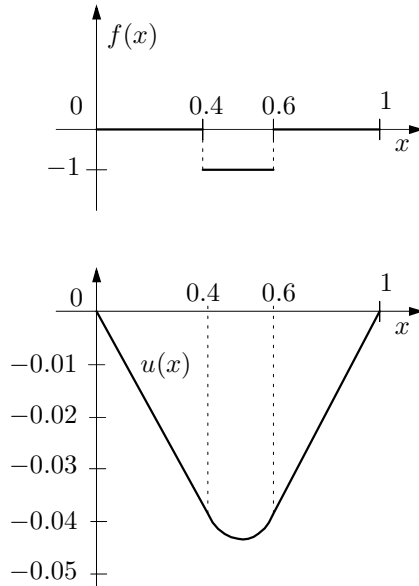
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

La funzione  $u$  descrive lo spostamento verticale del filo rispetto alla posizione di riposo  $u = 0$ .



**Figura 2.1.** A sinistra, viene riportata la configurazione di equilibrio del filo corrispondente al carico unitario concentrato in  $x = 0.5$ , rappresentato nella parte superiore della figura. A destra, quella relativa a due carichi unitari concentrati in  $x = 0.4$  e  $x = 0.6$ , rappresentati sempre nella parte superiore

La formulazione forte (2.3) non è in generale adeguata. Se si considera, ad esempio, il caso in cui il filo elastico sia sottoposto ad un carico concentrato in uno o più punti (in tal caso  $f$  è rappresentabile attraverso delle “delta” di Dirac), la soluzione fisica esiste ed è continua, ma non derivabile. Si vedano i grafici nella Fig. 2.1, dove è considerato il caso di un carico unitario concentrato nel solo punto  $x = 0.5$  (a sinistra)



**Figura 2.2.** Spostamento relativo al carico discontinuo rappresentato nella parte superiore della figura

e nei due punti  $x = 0.4$  e  $x = 0.6$  (a destra). Queste funzioni non possono essere soluzioni della (2.3), in quanto quest'ultima richiederebbe alla soluzione di essere dotata di derivata seconda continua. Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui  $f$  sia una funzione costante a tratti. Ad esempio, nel caso rappresentato in Fig. 2.2 di un carico nullo fuorché nell'intervallo  $[0.4, 0.6]$  in cui esso vale 1, la soluzione analitica è solo di classe  $C^1([0, 1])$ , essendo data da

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{10}x & \text{per } x \in [0, 0.4], \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{25} & \text{per } x \in [0.4, 0.6], \\ -\frac{1}{10}(1-x) & \text{per } x \in [0.6, 1]. \end{cases}$$

Serve dunque una formulazione del problema alternativa a quella forte che consenta di ridurre l'ordine di derivazione richiesto sulla soluzione incognita  $u$ . Passeremo da un problema differenziale del secondo ordine ad uno in forma integrale del primo ordine. Questo problema sarà chiamato la *formulazione debole* del problema differenziale.

Operiamo a tale scopo alcuni passaggi formali nella (2.3), senza preoccuparci a questo stadio del fatto che tutte le operazioni che in essi compariranno siano lecite. Moltiplichiamo innanzitutto l'equazione (2.3) per una *funzione test*  $v$  (per ora arbitraria) ed integriamo sull'intervallo  $(0, 1)$ ,

$$-u''v = fv \Rightarrow -\int_0^1 u''v \, dx = \int_0^1 fv \, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti al primo integrale, con lo scopo di eliminare la derivata seconda, in modo da poter richiedere alla soluzione una minore regolarità. Si trova

$$-\int_0^1 u''v \, dx = \int_0^1 u'v' \, dx - [u'v]_0^1.$$

Essendo  $u$  nota al bordo possiamo considerare solo funzioni test che si annullano agli estremi dell'intervallo, annullando così il contributo dei termini di bordo. In tal modo l'equazione diviene

$$\int_0^1 u'v' \, dx = \int_0^1 fv \, dx. \quad (2.4)$$

Lo spazio delle funzioni test  $V$  dovrà pertanto essere tale che

$$\text{se } v \in V \text{ allora } v(0) = v(1) = 0.$$

Si osservi che la soluzione  $u$ , essendo nulla al bordo ed avendo gli stessi requisiti di regolarità delle funzioni test, verrà cercata anch'essa nello stesso spazio  $V$ .

Restano ora da precisare i requisiti di regolarità cui deve soddisfare lo spazio  $V$ , in modo che tutte le operazioni introdotte abbiano senso. Evidentemente se  $u$  e  $v$  appartenessero a  $C^1([0, 1])$ , avremmo  $u', v' \in C^0([0, 1])$  e quindi l'integrale che compare a primo membro della (2.4) avrebbe senso. Gli esempi di Fig. 2.1 ci dicono però che le soluzioni fisiche potrebbero non essere derivabili con continuità: dobbiamo quindi richiedere una regolarità inferiore. Inoltre, anche quando  $f \in C^0([0, 1])$ , non vi è certezza che il problema ammetta soluzioni nello spazio

$$V = \{v \in C^1([0, 1]) : v(0) = v(1) = 0\}. \quad (2.5)$$

Ciò è imputabile al fatto che tale spazio vettoriale, quando lo si munisce del prodotto scalare

$$(u, v)_1 = \int_0^1 u'v' \, dx, \quad (2.6)$$

non è uno spazio completo, ovvero non tutte le successioni di Cauchy a valori in  $V$  convergono ad un elemento di  $V$ . (Si verifichi per esercizio che (2.6) è effettivamente un prodotto scalare).

Procediamo allora come segue. Ricordiamo la definizione degli spazi  $L^p$  delle funzioni a potenza  $p$ -esima integrabile secondo Lebesgue definiti, per  $1 \leq p < \infty$ , come (si veda l'Appendice A):

$$L^p(0, 1) = \{v : (0, 1) \mapsto \mathbb{R} \text{ t.c. } \|v\|_{L^p(0,1)} = \left( \int_0^1 |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty\}.$$

Dato che si vuole che l'integrale  $\int_0^1 u'v' dx$  sia ben definito, la richiesta minima su  $u'$  e  $v'$  è che il prodotto  $u'v'$  stia in  $L^1(0, 1)$ . A questo proposito, vale la seguente proprietà:

**Proprietà 2.1** *Date due funzioni  $\varphi, \psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , se*

$$\varphi^2, \psi^2 \text{ sono integrabili allora } \varphi\psi \text{ è integrabile}$$

*ossia*

$$\varphi, \psi \in L^2(0, 1) \implies \varphi\psi \in L^1(0, 1).$$

*Dimostrazione.* Se  $\varphi, \psi \in L^2(0, 1)$ , vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$\left| \int_0^1 \varphi(x)\psi(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^2(0,1)} \|\psi\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.7)$$

Essendo  $\|\varphi\|_{L^2(0,1)}, \|\psi\|_{L^2(0,1)} < \infty$  per ipotesi, ciò prova che esiste (finito) anche l'integrale di  $\varphi\psi$ .  $\diamond$

Per dare un significato agli integrali che compaiono nella (2.4) bastano dunque funzioni a quadrato integrabile con derivate a quadrato integrabile. Definiamo pertanto lo *spazio di Sobolev*

$$H^1(0, 1) = \{v \in L^2(0, 1) : v' \in L^2(0, 1)\}.$$

La derivata è da intendere nel senso delle distribuzioni (si veda l'Appendice A). Scegliamo dunque come spazio  $V$  il seguente sottospazio di  $H^1(0, 1)$ ,

$$H_0^1(0, 1) = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\},$$

costituito dalle funzioni di  $H^1(0, 1)$  che sono nulle agli estremi dell'intervallo. Se supponiamo  $f \in L^2(0, 1)$  anche l'integrale a secondo membro della (2.4) ha senso. Il problema (2.3) viene dunque ricondotto al seguente problema integrale,

$$\text{trovare } u \in V : \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V, \quad (2.8)$$

con  $V = H_0^1(0, 1)$ .

**Osservazione 2.1** Lo spazio  $H_0^1(0, 1)$  risulta essere effettivamente la chiusura, rispetto al prodotto scalare (2.6), dello spazio definito nella (2.5).

Le funzioni di  $H^1(0, 1)$  non sono necessariamente derivabili in senso classico, cioè  $H^1(0, 1) \not\subset C^1([0, 1])$ . Ad esempio, funzioni continue a tratti con raccordi a spigolo, appartengono ad  $H^1(0, 1)$ , ma non a  $C^1([0, 1])$ . Sono dunque contemplate anche le soluzioni continue, ma non derivabili, degli esempi precedenti. •

Il problema debole (2.8) risulta equivalente ad un *problema variazionale*, in virtù del seguente risultato:

**Teorema 2.1** *Il problema:*

$$\text{trovare } u \in V : \begin{cases} J(u) = \min_{v \in V} J(v) & \text{con} \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 f v dx, \end{cases} \quad (2.9)$$

è equivalente al problema (2.8), nel senso che  $u$  è soluzione di (2.8) se e solo se  $u$  è soluzione di (2.9).

*Dimostrazione.* Si supponga che  $u$  sia soluzione del problema variazionale (2.9). Allora, ponendo  $v = u + \delta w$ , con  $\delta \in \mathbb{R}$ , si ha che

$$J(u) \leq J(u + \delta w) \quad \forall w \in V.$$

La funzione  $\psi(\delta) = J(u + \delta w)$  è una funzione quadratica in  $\delta$  con minimo raggiunto per  $\delta = 0$ . Pertanto

$$\psi'(\delta) \Big|_{\delta=0} = \frac{\partial J(u + \delta w)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} = 0.$$

Per definizione di derivata si ha

$$\frac{\partial J(u + \delta w)}{\partial \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(u + \delta w) - J(u)}{\delta} \quad \forall w \in V.$$

Consideriamo il termine  $J(u + \delta w)$ :

$$\begin{aligned} J(u + \delta w) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(u + \delta w)']^2 dx - \int_0^1 f(u + \delta w) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u'^2 + \delta^2 w'^2 + 2\delta u'w'] dx - \int_0^1 f u dx - \int_0^1 f \delta w dx \\ &= J(u) + \frac{1}{2} \int_0^1 [\delta^2 w'^2 + 2\delta u'w'] dx - \int_0^1 f \delta w dx. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\frac{J(u + \delta w) - J(u)}{\delta} = \frac{1}{2} \int_0^1 [\delta w'^2 + 2u'w'] dx - \int_0^1 f w dx.$$

Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  ed imponendo che esso si annulli, si ottiene

$$\int_0^1 u'w' dx - \int_0^1 f w dx = 0 \quad \forall w \in V,$$

ovvero  $u$  soddisfa il problema debole (2.8).

Viceversa, se  $u$  è soluzione di (2.8), ponendo  $v = \delta w$ , si ha in particolare che

$$\int_0^1 u' \delta w' dx - \int_0^1 f \delta w dx = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned} J(u + \delta w) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(u + \delta w)']^2 dx - \int_0^1 f(u + \delta w) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dx - \int_0^1 f u dx + \int_0^1 u' \delta w' dx - \int_0^1 f \delta w dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \delta^2 w'^2 dx \\ &= J(u) + \frac{1}{2} \int_0^1 \delta^2 w'^2 dx. \end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \delta^2 w'^2 dx \geq 0 \quad \forall w \in V, \forall \delta \in \mathbb{R},$$

si deduce che

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V,$$

ovvero la  $u$  soddisfa anche il problema variazionale (2.9). ◇

**Osservazione 2.2 (Principio dei lavori virtuali)** Consideriamo nuovamente il problema di studiare la configurazione assunta da un filo di tensione unitaria, vincolato