

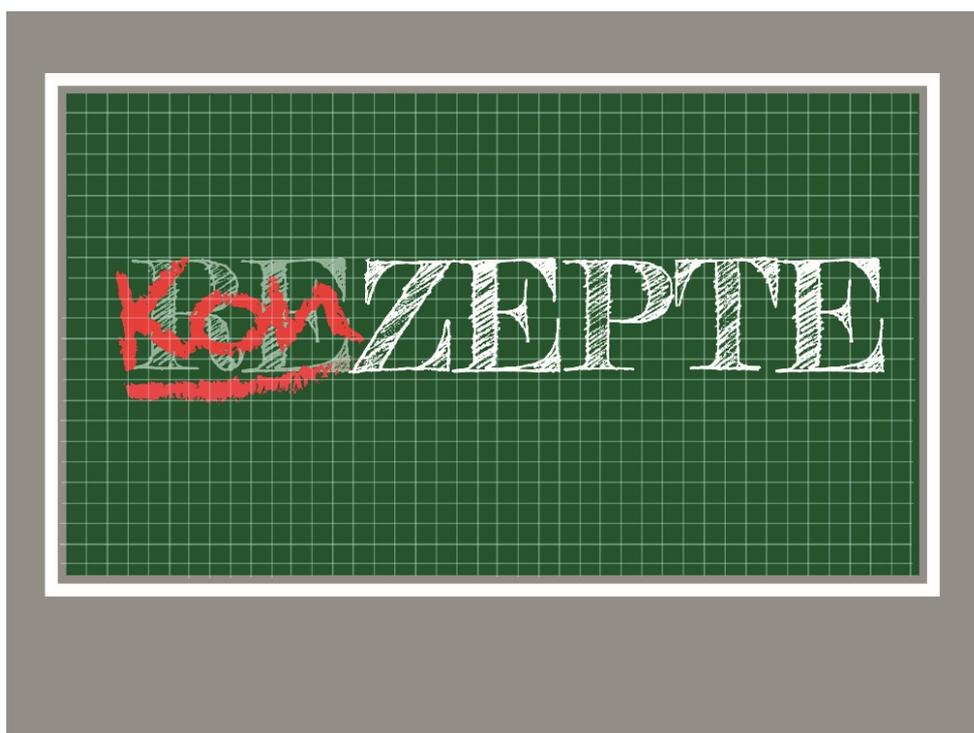
Alexandra Pilgrim, Marianne Nolte
& Tobias Huhmann (Hrsg.)

MATHEMATIKTREIBEN MIT GRUNDSCHULKINDERN

-

KONZEPTE STATT REZEPTE

Festschrift für Günter Krauthausen



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Alexandra Pilgrim, Marianne Nolte
& Tobias Huhmann (Hrsg.)

Mathematiktreiben mit Grundschulkindern

-

Konzepte statt Rezepte

Festschrift für Günter Krauthausen

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar.

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
<http://www.winterwork.de>

Abbildung auf dem Umschlag: Alexandra Eicks
Portrait von Günter Krauthausen: Alexandra Eicks

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2021 – E-Book
ISBN 978-3-95987-162-4
<https://doi.org/10.37626/GA9783959871624.0>

Inhalt

Geleitwort von Marianne Nolte.....	1
Potentiale des virtuellen Zwanzigerfeldes für den Einsatz in der Grundschule und Lehramtsausbildung	5
<i>Dagmar Bönig & Bernadette Thöne</i>	
Würfel mit digitalen Medien – Wo führt das noch hin? Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf Würfelhandlungen	17
<i>Lena Florian & Heiko Etzold</i>	
Lernhindernisse und Lernprozesse verstehen	31
<i>Klaus Hasemann</i>	
Mit merkmalsorientierten Mengenbildern das Denken in Möglichkeiten und Wahrscheinlichkeiten entwickeln	45
<i>Tobias Huhmann & Hartmut Spiegel</i>	
Sensibilisierungsübungen zur "Sprache im Mathematikunterricht"– Thematisierung kommunikativer und kognitiver sprachlicher Hürden durch Reflexion eigener sprachlicher Ressourcen	65
<i>Nora Kühme, Nikola Leufer & Martin Stein</i>	
Die Schönheit der Mathematik digital und analog entdecken	79
<i>Silke Ladel</i>	
Geometrische Aktivitäten in der Grundschule – Und ihre Weiterentwicklung und Vernetzung am Beispiel der Symmetrie.....	93
<i>Jens Holger Lorenz</i>	
Zur Metamorphose mathematischer Arbeits- und Anschauungsmittel – Grundschulkindern verwandeln Dinge in Symbole	105
<i>Katharina Mros & Heinz Steinbring</i>	
Ein guter Unterricht braucht gute Lehrkräfte – Beobachten lernen als Teil des Lehrerprofessionswissens	115
<i>Marianne Nolte & Kirsten Pamperien</i>	

Wieso, weshalb, warum? Vom Beschreiben und Begründen im Mathematikunterricht der Grundschule.....	127
<i>Marcus Nührenbörger & Ralph Schwarzkopf</i>	
Organisation von digital unterstützten Lernprozessen – Erprobung einer substanziellen Lernumgebung zum Aufgabenformat Rechendreieck	137
<i>Alexandra Pilgrim & Bastian Schmitt</i>	
Lehrerbildung mit der Praxis – Lehrerbildung für die Praxis.....	153
<i>Christof Schreiber</i>	
Forschermittel im Arithmetikunterricht der Primarstufe	163
<i>Christoph Selter</i>	
Differenzieren müsste man können ... Anmerkungen zu einem immer neuen Thema	175
<i>Thomas Trautmann</i>	
Tablet-Apps zwischen K.O. und O.K.	183
<i>Daniel Walter & Roland Rink</i>	
Mathematik aus der Sache heraus – Wie viel Mathematik steckt im Kräuterbeet?.....	197
<i>Nicole Wellensiek</i>	
Strichrechnungen und Punktrechnungen in der Grundschule – Eine strukturgeometrische didaktische Analyse.....	211
<i>Erich Ch. Wittmann</i>	

Für Prof. Dr. Günter Krauthausen



Geleitwort von Marianne Nolte

Dieses Buch ist Herrn Prof. Dr. Günter Krauthausen anlässlich des Eintritts in den Ruhestand gewidmet. Nach seinem Studium des Grundschullehramts mit den Fächern Mathematik, Deutsch und Sport arbeitete er elf Jahre als Grundschullehrer und zehn Jahre als Fachseminarleiter für Mathematik, bevor er 1990 an die Universität Dortmund an das Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts abgeordnet wurde. Seit dem Wintersemester 1996/97 hat er eine Professur für Didaktik der Mathematik mit dem Schwerpunkt mathematischer Anfangsunterricht, heute fachdidaktisches Grundlagenstudium Mathematik genannt, am Fachbereich Erziehungswissenschaft inne. Von der großen Vielzahl seiner Veröffentlichungen sei hier nur auf einige eingegangen.¹

Seine Erfahrungen als Grundschullehrer und in der Lehrerbildung als Fachseminarleiter haben Günter Krauthausens spätere Tätigkeit als Hochschullehrer entscheidend geprägt. Das Interesse an den Kindern und ihren Denkwegen wird z.B. in seinem Projekt zu Lieblingszahlen (Projekt»LieZah«) deutlich, für das er im Rahmen des Wettbewerbs "Kopf und Zahl" zum Wissenschaftsjahr 2008 ausgezeichnet wurde. Von Anfang an betont er in seinen Veröffentlichungen und auch in seinen Lehrveranstaltungen die Bedeutung hoher professioneller Kompetenzen

¹ Für weitere Hinweise auch zu seinem beruflichen Werdegang siehe <http://www.krauthausenh.de/index.html>

für die Unterrichtsqualität im Mathematikunterricht. Studierende in ihrer Entwicklung zu unterstützen ist ihm wichtig, auch wenn es für manche hart erscheint, seine Anforderungen zu erfüllen. „Man erhält, was man einfordert“ ist ein ihm wichtiges Motto, mit dem er auf die Qualitätssicherung in der Ausbildung bedacht ist. Wie viel sie bei „Krauti“ – wie ihn manche Studierende liebevoll nennen – gelernt haben, konnte ich in unserer Zusammenarbeit immer wieder erfahren. Das wird auch vielen Studierenden bewusst, wenn sie als Lehrkraft mit dem Alltag konfrontiert werden. Einige nehmen auch nach dem Studium noch Kontakt auf und bedanken sich, nachdem sie Unterrichtserfahrung gesammelt haben.

Ihm ist dabei immer bewusst, dass Entscheidungen in der Ausbildung zukünftiger Lehrkräfte langfristig Auswirkungen auf die Kinder haben. Deshalb beachtet er das Zusammenspiel zwischen Kind und Lehrkraft sowie Theorie und Praxis. „Forschungsgestützte Praxis“ ist für ihn das wesentliche Element, das er an verschiedenen Stellen in der Aus- und Weiterbildung immer wieder einfordert. 2011 bekam Günter Krauthausen den Lehrpreis für Lehrleistungen an der Fakultät für Erziehungswissenschaft, Psychologie und Bewegungswissenschaft (epb) für herausragende und innovative Lehrleistungen für die Veranstaltung „Vorlesung zum Fachdidaktischen Grundlagenstudium Mathematik“.

Prägend für seine Arbeit in seinen Veranstaltungen, Vorträgen und Veröffentlichungen ist der Ansatz des Projekts „mathe 2000“; in Dortmund wurde er Mitglied dieser Arbeitsgruppe. Mit den Handbüchern „Produktive Rechenübungen“ und den Schulbüchern des Programms fand dieser Ansatz zwar weite Verbreitung, aber die theoretische Fundierung über diese Medien hinaus in eine Mathematikdidaktik für die Grundschule einzubetten, ist das Verdienst von Günter Krauthausen und Petra Scherer, die die ersten drei Auflagen² des Lehrbuchs „Einführung in die Mathematikdidaktik“ gemeinsam veröffentlichten. Diese Zusammenarbeit führte zu grundlegenden Veröffentlichungen zur „natürlichen Differenzierung“, die insbesondere mit der Umsetzung eines inklusiven Mathematikunterrichts aufzeigt, wie Schüler*innen unterschiedlichster Potenziale von einer gemeinsamen Aufgabenstellung profitieren können. Ein Beispiel für die Veröffentlichungen bietet das Buch „Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule“ von 2014.

Seine Arbeit genießt auch international Anerkennung. Beispielsweise führten ihn seine Vortragsreisen oft in die Schweiz. Einmal im Jahr nach Hawaii war nicht nur dem Besuch seiner Freunde Neil und Beth Pateman geschuldet, denen es leider nicht möglich ist, sich mit einem Beitrag zu beteiligen. Er forschte dort ebenfalls zur Umsetzung seiner didaktischen Überlegungen und führte Erprobungen in Schulklassen durch.

Ein besonderes Interesse Günter Krauthausens gilt dem Einsatz „Neuer Medien“, wie digitale Medien in der Anfangszeit genannt wurden. Deren Verwendung im

² Die vierte Auflage wurde von ihm allein herausgegeben.

Mathematikunterricht war bereits Thema seiner Dissertation zum Dr. phil. bei Prof. Dr. Renate Schulz-Zander (Schulentwicklungsforschung) und Prof. Dr. Erich Wittmann (Mathematikdidaktik) 1994 an der Universität Dortmund. Das Thema seiner Dissertation lautet „Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern: Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule“. Die Forschung an digitalen Medien wird von ihm bis heute weitergeführt. Es entstanden grundlegende Veröffentlichungen, von denen hier nur einige genannt werden sollen, wie „Tablets im Grundschulunterricht - Fachliches Lernen, Medienpädagogik und informatische Bildung“ gemeinsam mit Kerstin Michalik, Claus Krieger und Florian Jastrow, u. a. (2020). Mitherausgeberin ist auch Alexandra Pilgrim, die zur Zeit mit ihm gemeinsam zu diesem Thema forscht. Ebenfalls grundlegend ist das Buch von 2012 „Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule“. Wie die konkrete Umsetzung der theoretischen Diskussionen in die konzeptionelle Entwicklung digitaler Medien aussehen kann, zeigen Günter Krauthausens Softwareentwicklungen. Für die CDs zum Blitzrechnen wurde er 1997 mit dem Deutschen Bildungssoftwarepreis »digita 97« für die 1. und 2. Klasse ausgezeichnet und für die 3. und 4. Klasse 1998 nominiert. Er erhielt das EduMedia-Siegel für exemplarische Bildungsmedien 2006 als Autor der Software »Zahlenforscher«, wurde für den Softwarepreis Giga-Maus 2006 und für den Deutschen Bildungssoftwarepreis »digita 2008« nominiert.

Auch für seinen beruflichen Alltag (und für den seiner Kolleg*innen) ist Günter Krauthausen die Verwendung digitaler Medien wichtig. So überzeugte er seine Kolleg*innen mit der Einführung von Computern von deren Nützlichkeit auch am eigenen Arbeitsplatz und sorgte so für die ersten Computer in der Mathematikdidaktik an der Universität Dortmund.

Auch in seinen Vorlesungen und Vorträgen, in denen ihm eine hohe „Bühnen“-Präsenz zugeschrieben wird, zeigt Günter Krauthausen, was Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien ermöglichen. Es ist immer eine große Freude seinen Vorträgen zuzuhören, die animiert und animierend sind.

Seine große Aufgeschlossenheit gegenüber technischen Medien wird von einer kritischen Bewertung des Nutzens für das Lernen begleitet. Gerade im Zuge des digitalen Wandels sind technische Neuerungen nicht immer ein Gewinn gegenüber althergebrachten Werkzeugen. Das wird in seinen Veröffentlichungen sehr überzeugend deutlich.

Was sagen seine Kolleg*innen über Günter Krauthausen: Er ist ein sehr gut strukturierter und zuverlässiger Kollege, der sehr viel für die didaktische Forschung und für die praktische Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts getan hat. Er drängt sich nicht in den Vordergrund, aber vertritt seine Standpunkte und Ziele mit Argumenten und weiß mit einer realistischen und pragmatischen Sichtweise sowie anschaulichen Beispielen zu überzeugen.

Wie sehr Günter Krauthausen als Forscher anerkannt und als Mensch geschätzt wird, zeigen die vielen Beiträge in diesem Buch.

Hamburg im Februar 2021,

Marianne Nolte

Potentiale des virtuellen Zwanzigerfeldes für den Einsatz in der Grundschule und Lehramtsausbildung

Dagmar Bönig & Bernadette Thöne

Das Zwanzigerfeld ist als Arbeitsmittel im mathematischen Anfangsunterricht weit verbreitet. Der Umgang mit diesem Arbeitsmittel spielt eine zentrale Rolle im arithmetischen Lernprozess von Kindern. Mit Blick auf die Überwindung zählenden Rechnens stellen gerade die dazu im Unterricht angebotenen Aufgaben und die Diskussion ihrer Bearbeitung im Unterrichtsgespräch ein entscheidendes Qualitätskriterium dar (Schipper 2009; Röhr 2002). Aufgrund der Vielfalt möglicher Aktivitäten gehaltvoller Aufgabenstellungen postuliert Krauthausen bereits 2012 einen evtl. Nutzen der virtuellen Variante. Im vorliegenden Beitrag skizzieren wir ausgehend von den theoretischen Potentialen des virtuellen Zwanzigerfeldes Ergebnisse aus empirischen Erprobungen der App mit Grundschulkindern, um am Ende einen kurzen Ausblick auf den Einsatz im Rahmen der Lehramtsausbildung zu werfen.

Unsere Überlegungen zum Einsatz der App „Zwanzigerfeld“ (Urff o. J.) im Mathematikunterricht orientieren sich an der Prämisse, dass die virtuelle Version ergänzend zur physischen Variante genutzt wird (Krauthausen 2012; Rink/Walter 2020). Bei beiden Varianten kristallisieren sich sowohl fachdidaktische Potentiale als auch Grenzen ihres Einsatzes heraus. So können z.B. Plättchen auf dem physischen Zwanzigerfeld auf beliebige Felder gelegt werden – eine wesentliche Voraussetzung, um sich im Unterricht über die Vor- und Nachteile unterschiedlicher Darstellungen austauschen zu können. Bei der App „Zwanzigerfeld“ gibt es diesbezüglich deutliche Einschränkungen, es werden nur strukturierte Plättchendarstellungen zugelassen, was sich jedoch im Hinblick auf die Überwindung zählenden Rechnens für einige Schülerinnen und Schüler auch als wertvolle Hilfe erweisen kann. Im Folgenden werden die fachdidaktischen Potentiale der App aus theoretischer wie empirischer Perspektive herausgearbeitet. Darauf aufbauend lassen sich dann fachdidaktisch fundierte Lernumgebungen für den Einsatz im Unterricht entwickeln.

Das virtuelle Zwanzigerfeld

Das Zwanzigerfeld ist ein gängiges Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht, welches Kinder beim Aufbau mentaler Vorstellungsbilder und operativer Rechenstrategien unterstützen und auf diese Weise zur Ablösung vom zählenden Rechnen beitragen soll. Mit der App „Zwanzigerfeld“ wird das Arbeitsmittel in eine digitale Version überführt. Es werden dabei wie bei der physischen Entsprechung keine Aufgaben vorgegeben.

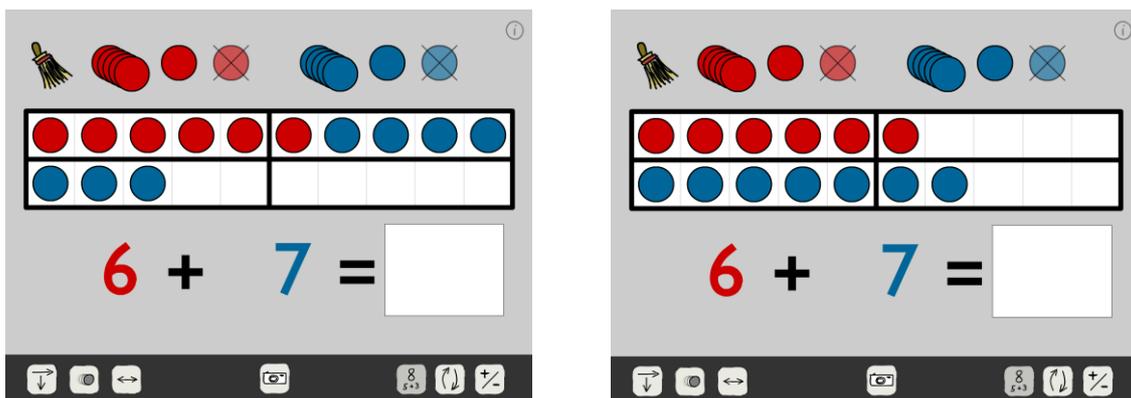


Abbildung 1: beispielhafte Darstellung von $6 + 7$ am virtuellen Zwanzigerfeld
(links: zeilenauffüllend, rechts: zeilenweise untereinander)

Nachfolgend beschränken wir uns auf die Erläuterung zentraler Funktionen der App, eine ausführliche Beschreibung findet sich im Leitfaden zum Zwanzigerfeld (Bönig/Walter 2020). Per Knopfdruck können analog zur physischen Variante rote und blaue Plättchen gelegt und weggenommen werden. Durch einen Klick auf den „Fünferstapel“ können fünf Plättchen (nahezu) gleichzeitig gelegt werden. Über die App wird zudem eine automatische Strukturierung der gelegten Plättchen nach der „Kraft der 5“ (Krauthausen 1995) gesteuert, die bei Bedarf deaktiviert werden kann. Dabei werden rote vor blauen Plättchen dargestellt. Per Knopfdruck kann zwischen einer zeilenauffüllenden Darstellung und einer getrennten Darstellung roter und blauer Plättchen zeilenweise untereinander gewechselt werden (s. Abb. 1). Darüber hinaus ist die Plättchendarstellung mit der symbolischen Darstellung synchronisiert und vernetzt: Eine Veränderung der Anzahl gelegter Plättchen zieht die sofortige Anpassung des zugehörigen Zahlensatzes nach sich und umgekehrt.

Mit der App lassen sich auch Subtraktionsaufgaben legen, die dabei auftauchenden Herausforderungen werden im Teilkapitel zu den Erprobungen der App thematisiert.

Fachdidaktische Potentiale des virtuellen Zwanzigerfeldes

Im Folgenden beleuchten wir – gemäß dem Grundsatz Krauthausens vom Primat der Fachdidaktik (Krauthausen 2012) bei der Auswahl digitaler Anwendungen im Mathematikunterricht – zunächst fachdidaktisch relevante Potentiale des virtuellen Zwanzigerfeldes (vgl. Walter 2018; Rink/Walter 2020). Inwiefern sich diese beim Einsatz der App mit Grundschülerinnen und Grundschulern tatsächlich als wirkungsvoll erweisen, wird dann im darauf folgenden Abschnitt diskutiert.

Passung zwischen Handlung und mentaler Operation

Das Handeln mit Materialien ist im Grundschulalter eine wesentliche Phase im mathematischen Lernprozess. Langfristig gesehen muss es Kindern gelingen von diesen Handlungen zu abstrahieren und entsprechende Operationen geistig auszuführen. Dieser Abstraktionsprozess ist für einige Kinder schwierig, er kann aber

im Unterricht unterstützt werden, wenn die am Material ausgeführten Handlungen strukturell zur angestrebten mentalen Operation passen (Schipper 2009, S. 302).

Im Fall des virtuellen Zwanzigerfeldes ist es z.B. möglich 9 Plättchen nicht einzeln zu legen, sondern mit zwei Klicks zweimal fünf Plättchen simultan zu erzeugen und im Anschluss ein Plättchen zu löschen. In der physischen Variante können zwar auch zwei z.B. durch Klebestreifen verbundene Fünferstreifen gelegt werden. Das Wegnehmen eines Plättchens aus einem Streifen erfordert aber ein Eintauschen des Streifens in einzelne Plättchen und ist damit tendenziell „weiter weg“ von der intendierten mentalen Operation.

Synchronität und Vernetzung der Darstellungsebenen

Handlungen mit Material und bildliche Darstellungen können den Aufbau von Vorstellungsbildern befördern, wenn es gelingt diese mit der mathematischen Symbolebene sinnvoll zu verknüpfen (z.B. Lorenz 2009). Empirisch belegt ist, dass eine solche Verknüpfung von Darstellungsformen gerade Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen schwer fällt (z.B. Moser Opitz 2007). Die gleichzeitige Nutzung verschiedener Darstellungsformen (hier z.B. die virtuell ikonische Form der Plättchendarstellung und die symbolische Notation des zugehörigen Zahlensatzes) und deren interaktiv miteinander verknüpftes Verändern stellen ein Alleinstellungsmerkmal digitaler Medien dar, welches die für die Darstellungswechsel notwendigen kindlichen Verstehensprozesse sinnvoll unterstützen kann.

„Für das Mathematiklernen mit digitalen Medien ist es entscheidend, dass verschiedene Repräsentationsmodi nicht nur simultan dargestellt und vom Lernenden wiederum lediglich ‚abgelesen‘ werden. Vielmehr sollten digitale Medien so eingesetzt werden, dass die Vernetzung der Darstellungsebenen von den Schülerinnen und Schülern auch ‚gedacht‘ werden, indem Auswirkungen der Veränderungen einer Darstellung auf die jeweils anderen vorausgesagt, analysiert und hinterfragt werden können.“ (Walter 2018, S. 49)

Ladel (2009) schreibt in ihrem Modell der externen Repräsentationsformen der Handlung am realen Feld und der virtuellen Handlung einen enaktiven Charakter zu, so dass hier zunächst von einem intramodalen Transfer ausgegangen werden kann. Der intermodale Transfer kommt dann bei der Nutzung der unterschiedlichen Anordnungsmöglichkeiten der Plättchen zum Zuge.

Strukturierungshilfen

Mit Blick auf die Ablösung vom zählenden Rechnen sind strukturierte Zahldarstellungen von besonderer Relevanz. Das virtuelle Zwanzigerfeld bietet hier eine automatisierte Strukturierung an (s. oben) und unterstützt damit die quasi-simultane Anzahlerfassung. Diese Fähigkeit gilt als wesentliche Voraussetzung zur Überwindung zählenden Rechnens.

Verlagerung der kognitiven Beanspruchung

Der Einsatz digitaler Medien kann die kognitive Belastung der Lernenden in bestimmten Bereichen reduzieren. So sind die motorischen Abläufe beim virtuellen Zwanzigerfeld weniger komplex als bei der physischen Form (vgl. Urff 2014). Dies macht die digitale Variante gerade für Kinder mit Schwierigkeiten im Bereich der Feinmotorik attraktiv. Es können zudem Aufgaben gestellt werden, bei denen das Ermitteln von Teilergebnissen an die App abgegeben werden kann. So ist es bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten z.B. bei operativen Übungen möglich, die nonverbal-symbolische Ebene zu nutzen um dann auf die Veränderungen der Aufgaben und ihre Auswirkung auf die Ergebnisse fokussieren zu können.

Erprobung des virtuellen Zwanzigerfeldes in der Grundschule

Im Rahmen des von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Verbundprojekts „Digitales Lernen Grundschule“ (2016 - 2019) haben Studierende die App Zwanzigerfeld in empirischen Erkundungen vorwiegend mit einzelnen Grundschulkindern (Kl. 1 und 2) erprobt. Diese Kinder hatten zuvor im Unterricht schon ausführlich mit dem physischen Zwanzigerfeld gearbeitet.

„Zu glauben, der PC könne auch diese Grundlegungsphase mit ihren fundamentalen Lehr- und Lernaktivitäten sachgerecht übernehmen und damit die konkrete Handlung am physischen Material ersetzen, überschätzt die Möglichkeiten technischer ›Intelligenz‹ und wird nicht zuletzt auch der didaktischen Verantwortung von Lehrpersonen nicht gerecht.“ (Krauthausen 2012, S. 224)

Völlig konform zu Krauthausens Empfehlung die App bei Kindern mit gezieltem Übungsbedarf einzusetzen (Krauthausen 2012, S. 224), haben Studierende insgesamt 23 Schülerinnen und Schüler aus verschiedenen Klassen ausgewählt, die zum Beginn der Förderung überwiegend zählend rechneten. Der Umgang der Kinder mit dem physischen Zwanzigerfeld wurde dabei vor Beginn der Förderung in Form einer Standortbestimmung (Sundermann/Selter 2013) erhoben.

Die Ergebnisse der Studie von Walter (2018) belegen bereits, dass zählend rechnende Kinder die theoretischen Potentiale des virtuellen Zwanzigerfeldes nicht automatisch nutzen. Für die Fördersitzungen wurden daher fachdidaktisch begründete Aufgaben zur Überwindung zählenden Rechnens entwickelt, die zugleich die oben beschriebenen Potentiale der App adressieren.

Die folgende Zusammenfassung zentraler Ergebnisse basiert auf den in den Abschlussarbeiten dieser Studierenden dokumentierten Analysen der Förderungen und orientiert sich an der oben gewählten Reihenfolge der Potentiale.

Zur Passung zwischen Handlung und mentaler Operation

Vereinzelt nutzten Kinder den Fünferstapel zum Legen von Plättchen bereits nach der ersten Einführung in das virtuelle Zwanzigerfeld, in den meisten Fällen allerdings erst nach längerer Übung. Aufgabenstellungen wie „Versuche die Anzahl von 7 Plättchen mit möglichst wenigen Klicks zu legen“ sind dabei geeignet die

Kinder für die Nutzung des simultanen Legens von fünf Plättchen zu sensibilisieren. Am Ende der Förderung haben deutlich mehr Kinder beim Darstellen der Summanden am Zwanzigerfeld eigenständig davon Gebrauch gemacht. Dabei werden Fünferstapel auch beim Legen von Aufgaben mit Zehnerübergang wie z.B. $9 + 4$ genutzt, was beim Verwenden des physischen Zwanzigerfelds nur möglich wäre, wenn Fünferstreifen zerschnitten werden dürften. Marta schlägt sogar ein solches Abtrennen zum Legen der 4 nach Abschluss der Förderung für die Arbeit mit dem Fünferstreifen am realen Zwanzigerfeld vor.

Zur Synchronität und Vernetzung der Darstellungsebenen

Die Ergebnisse von Walter (2018) bestätigen, dass erst eine gemeinsame Erarbeitung dazu führen kann, dass Kinder von diesem Potential im Sinne einer zunehmenden Abkehr vom zählenden Rechnens profitieren. Daher wurden gezielt Aufgabenstellungen zur Thematisierung des Darstellungswechsels konstruiert. So wurden Kinder gebeten Änderungen vorherzusagen, die durch bestimmte Handlungen hervorgerufen werden, wie z.B. „Was passiert mit dem Zahlensatz, wenn Du ein rotes Plättchen hinzufügst?“ oder umgekehrt Handlungen vorzuschlagen, die zu einer vorgegebenen Änderung führen („Was musst Du machen, damit sich der Zahlensatz $6 + 2$ zu $5 + 3$ verändert?“). Einige Reaktionen von Kindern insbesondere zu Beginn der Förderung verweisen deutlich darauf, dass die Auswirkungen keineswegs selbstverständlich vorhergesagt werden, wie das folgende Fallbeispiel (s. Abb. 2) belegt:

I	Was würde mit den Zahlen (<i>gelegt sind drei rote und zwei blaue Plättchen</i>) passieren, wenn man jetzt ein blaues Plättchen dazutut?
S	Drei
I	Wo sind dann drei?
S	Da (<i>zeigt auf die Stelle auf dem Feld, wo das neue Plättchen erscheinen wird</i>).
I	Ja, und was würde hier unten passieren? (<i>zeigt auf die symbolische Darstellung der Aufgabe</i>)
S	Unten?
I	Was würde bei den Zahlen passieren?
S	(<i>schweigt</i>)
I	Würde sich da überhaupt etwas verändern?
S	Ja nein weiß ich nicht.

Abbildung 2: Was passiert, wenn Du ein blaues Plättchen hinzufügst?

(I: Interviewerin; S: Schülerin)

Auch hier bedarf es einer längeren Übungsphase, die sich am Ende aber – zumindest bei etlichen Kindern – auszahlt. So löste Ella in der Standortbestimmung zu Beginn der Förderung Aufgaben mit Zehnerübergang zählend. Während sie anfangs der Meinung war, dass „die Zahlen nicht zu den Plättchen passen“, verhalten die Fragen zum Darstellungswechsel Ella im Verlauf der Förderstunden dazu

symbolische und ikonische Ebene miteinander zu verknüpfen. Mit Abschluss der Förderung war sie in der Lage das Zwanzigerfeld auch als Argumentationsmittel zu nutzen. So legte sie bei der Aufgabe $7 + 7$ die Plättchen zeilenweise untereinander (s. Abb. 3):

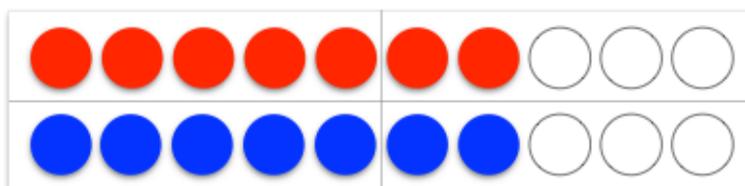


Abbildung 3: Ella legt $7 + 7$ am physischen Zwanzigerfeld

Sie begründete ihr Ergebnis 14 dann folgendermaßen: „Weil da sind 4 (*schiebt die 4 Plättchen jenseits der vertikalen Trennlinie etwas zurück*) und noch 10 dazu (*umkreist die übrigen 10 Plättchen*), sind 14.“

Während Lina zu Beginn der Förderung Aufgaben mit Zehnerübergang nur zählend rechnete, konnte sie die Aufgabe $9 + 4$ in der letzten Fördersitzung unter Nutzung der Fünferbündel mit wenigen Klicks legen. Lina erläuterte zu ihrem Ergebnis 13: „Ich hab erstmal 10 gerechnet plus 4 sind 14 und dann nur noch einen weniger, also wegnehmen, weil ich ja $9 + 4$ rechne“ und kann dies auch am Plättchenbild demonstrieren.

Das Potential der Vernetzung der Darstellungsebenen erwies sich in der überwiegenden Zahl von Fördersitzung als besonders lernförderlich. Selbstverständlich lassen sich die verwendeten Aufgabenstellungen auch mit der physischen Variante realisieren. Sie sind aber in der praktischen Umsetzung deutlich schwerfälliger, während die virtuelle Variante hier ein zügiges Erkunden erlaubt. Als bedeutsam stellte sich insbesondere die Interaktion der Kinder mit der Interviewerin heraus, die beharrlich die Verbindungen zwischen den verschiedenen Darstellungen thematisierte.

Strukturierungshilfen

In der Standortbestimmung zum Umgang mit dem physischen Zwanzigerfeld nutzten einige Kinder Legeweisen, die eine quasi-simultane Erfassung der Plättchenanzahlen bzw. ein Erkennen der gestellten Aufgabe erschweren. So wurden Lücken im Feld gelassen, bei der Darstellung von Aufgaben nur eine Farbe genutzt oder rote und blaue Plättchen nicht getrennt voneinander gelegt. Ella verwendete z.B. aus ästhetischen Gründen vorwiegend rote Plättchen bzw. manchmal auch rote und blaue Plättchen, damit es „schön bunt“ ist. Nach Abschluss der Förderung tauchten vergleichbare Argumente nicht mehr auf, sie hatte den Nutzen der farblichen Sortierung des virtuellen Zwanzigerfelds so verinnerlicht, dass sie dies auch auf das Legen von Plättchen in der physischen Variante übertrug. Sie stellte bei der Aufgabe $8 + 8$ beide Summanden mit Plättchen untereinander dar, verschob aber für die Summenbestimmung zwei blaue Plättchen in die obere Reihe („damit ich das besser erkennen kann“).

Wie Ella nutzten die meisten Kinder beim virtuellen Zwanzigerfeld die zeilenfüllende Darstellung, auch wenn sie zuvor beide Summanden untereinander darstellten, um deren Anzahl der Plättchen leichter zu erkennen. Das legt die Vermutung nahe, dass die zeilenfüllende Variante im Mathematikunterricht der interviewten Kinder vielleicht häufiger thematisiert wurde. Da wir über den Unterricht keine zusätzlichen Informationen haben, kann dies aber nicht abschließend geklärt werden. In der späteren Erprobung der App mit einer Halbgruppe eines ersten Schuljahres hatten die Kinder am realen Zwanzigerfeld verschiedene Legeweisen intensiv thematisiert. Hier nutzten einige Kinder die Darstellung der Summanden in getrennten Zeilen und ermittelten das Ergebnis auch ohne umzuschalten. So erläuterte Pablo zur Aufgabe $6 + 4$ (s. Abb. 4): „Hier sind 9 und dann noch 1 – zehn.“

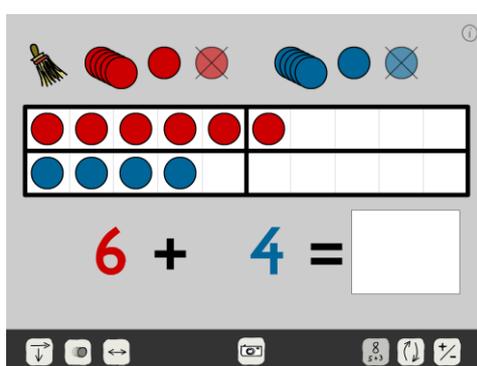


Abbildung 4: Pablo legt $6 + 4$ am virtuellen Zwanzigerfeld

Auch wenn im Verlauf der Förderung viele Kinder eine nicht zählende Form der Anzahlbestimmung nutzten, geschah dies nicht bei allen Kindern. Insbesondere für Schülerinnen und Schüler, die bereits beim Umgang mit dem physischen Zwanzigerfeld massive Schwierigkeiten zeigten, hätte zumindest der Förderzeitraum ausgeweitet werden müssen.

Verlagerung der kognitiven Beanspruchung

Gerade in der Förderung von neun Kindern, denen der Förderschwerpunkt geistige Entwicklung zugeordnet wurde, offenbarte sich eine kognitive Entlastung durch die App. Dies betraf insbesondere zwei Kinder, die aufgrund motorischer Einschränkungen Probleme hatten die Plättchen im physischen Zwanzigerfeld genau zu platzieren.

Mit einer Gruppe von vier Kindern erprobte eine Studentin das Bearbeiten operativer Päckchen. Dies wäre unter Nutzung des physischen Zwanzigerfeldes sicher kaum möglich gewesen, da drei Kinder zu Beginn der Förderung bereits Probleme beim korrekten Darstellen von Zahlen auf dem realen Zwanzigerfeld hatten u.a., weil sie sich immer wieder verzählten. Hier konnte der Blick auf die nonverbale symbolische Ebene helfen die gelegte Anzahl roter und blauer Plättchen sofort zu kontrollieren. Die App ermöglichte ihnen so gezielter auszuprobieren, wie eine

Zahl bzw. Aufgabe verändert werden musste um eine gewünschte Zahl bzw. Aufgabe zu erhalten, da sie die Auswirkungen der Veränderung mit Blick auf den Zahlensatz ablesen konnten.

Schwierigkeiten beim Einsatz der App

Am virtuellen Zwanzigerfeld können auch Subtraktionsaufgaben gelegt werden. Veränderungen am Minuenden werden wie bei der Addition vorgenommen, der Subtrahend kann aber nur durch das Antippen einzelner Plättchen auf den gewünschten Wert eingestellt werden. Virtuell weggenommene Plättchen werden dann im Zwanzigerfeld mit einem Kreuz markiert (s. Abb. 5). Dieser Veränderungsprozess wird nicht animiert.

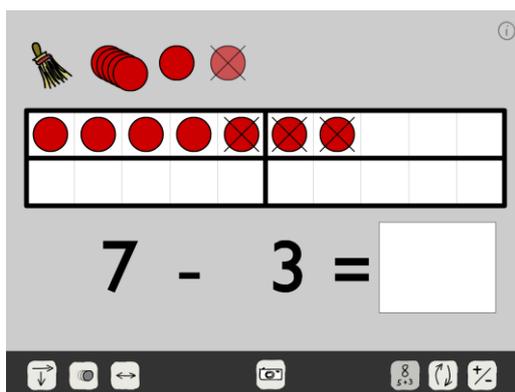


Abbildung 5: beispielhafte Darstellung von $7 - 3$ am virtuellen Zwanzigerfeld

Aufgrund dieser Herausforderungen wurde in der Förderung nur die Addition fokussiert.

Das Ergebnis einer Rechenaufgabe kann durch kurzes Antippen oder Verschieben des weißen Fensters sichtbar gemacht werden. Diese Problematik griff Ines in unserer Klassenerprobung von sich aus auf: „Dann möchte ich diese Aufgabe so schnell erledigen und dann klick ich da drauf und dann lern‘ ich gar nichts.“ In der Einzelförderung ließ sich ein solches Vorgehen gut kontrollieren, beim Einsatz der App im Klassenunterricht muss mit den Kindern im Gespräch geklärt werden, dass diese Option nur zur eigenen Überprüfung von Ergebnissen genutzt wird.

Darüber hinaus ergeben sich aufgrund technischer Probleme zuweilen Fehler in der Animation und bei der Passung zwischen ikonischer und symbolischer Ebene, für Beispiele sei an dieser Stelle auf Bönig/Walter 2020 verwiesen.

Für Verwirrung sorgte zudem bei einzelnen Kindern die zeilenweise Darstellung bei Aufgaben mit 0 als erstem Summanden. Während die blauen Plättchen bei zeilenauffüllender Darstellung in der oberen Zeile liegen, werden sie bei zeilenweiser Darstellung in der unteren Zeile angezeigt (s. Abb. 6).

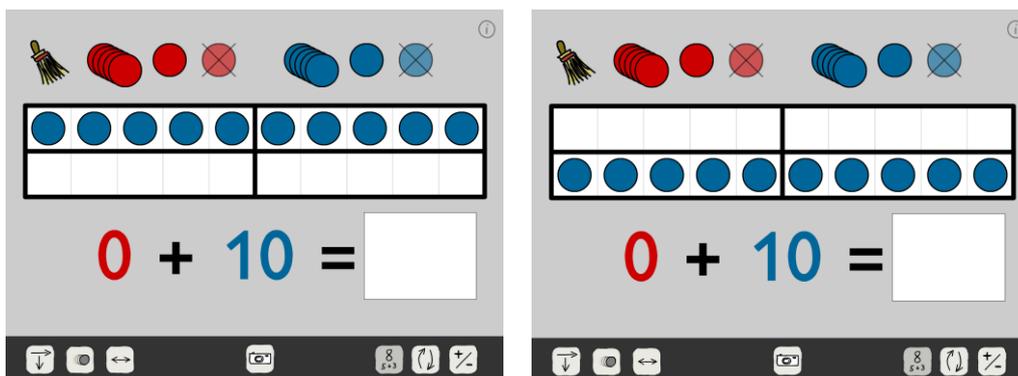


Abbildung 6: beispielhafte Darstellung von $0 + 10$ am virtuellen Zwanzigerfeld (links zeilenauffüllend, rechts nach Umschalten in die zeilenweise Darstellung)

Ansonsten waren die meisten Kinder beim Einsatz der App hoch motiviert, auch wenn Ella nach sechs Fördersitzungen in der abschließenden Standortbestimmung am realen Zwanzigerfeld frohlockte: „Oh ja, endlich mal wieder Plättchen zum Anfassen.“ Auch die Kinder, denen der Förderschwerpunkt geistige Entwicklung zugeordnet wurde, gingen hoch motiviert an die Arbeit, wengleich die vielen Funktionen und Felder der App für einige auch ein hohes Ablenkungspotential darstellten.

Zum Einsatz des virtuellen Zwanzigerfeldes im Klassenunterricht

Auf Basis der in den Interviews mit einzelnen Kindern gemachten Erfahrungen haben wir eine kurze Unterrichtseinheit (5 Stunden) mit Aufgabenstellungen zur Nutzung der App in einer ersten Klasse erprobt. Wir haben uns dabei auf eine Halbgruppe der Klasse beschränkt, um den Umgang einzelner Kinder mit dem virtuellen Zwanzigerfeld besser beobachten zu können. Darüber hinaus sind die für den mathematischen Lernprozess wichtigen Gespräche über die Bearbeitung der Aufgaben mit weniger Kindern leichter zu realisieren. Die Unterrichtseinheit wurde in der zweiten Hälfte des ersten Schuljahres durchgeführt, die Schülerinnen und Schüler hatten bis zu dem Zeitpunkt mit der physischen Variante im Unterricht gearbeitet. In den Fördersitzungen hat sich die explizite Thematisierung und gemeinsame Erarbeitung der Potentiale als bedeutsames Element in der Unterstützung mathematischer Lernprozesse erwiesen, so dass die Bearbeitung passender Aufgaben (wie oben bereits zu den Fördersitzungen beschrieben) und die reflektierende Diskussion über die Bearbeitung den Schwerpunkt der Unterrichtseinheit bildete. Insgesamt verlief die Unterrichtseinheit sehr positiv, in der kleinen Gruppe von 10 Kindern konnte zudem leicht beobachtet und individuell unterstützt werden. Auch hier wurde schnell deutlich, dass die Synchronität und Vernetzung der Darstellungsebenen zwar durch gezielte Aufgabenstellungen fokussiert werden muss. Die Kinder konnten dann aber gerade in den unterrichtlichen Gesprächen Darstellungen am Zwanzigerfeld nicht nur für das Errechnen, sondern auch für anschauliches Begründen nutzen (wie z.B. beim Finden aller Zerlegungen einer Zahl oder der Erkundung von Zusammenhängen bei operativen Aufgabenserien).

Einsatz der App in der Lehramtsausbildung

Diese und andere im Projekt „Digitales Lernen Grundschule“ erprobten Apps sind inzwischen verpflichtender Gegenstand in der Ausbildung von Grundschullehrerinnen und -lehrern an der Universität Bremen. Sie sind im Studium in die fachdidaktischen Module integriert, in denen die durch die App angesprochenen Themenfelder behandelt werden (vgl. Bönig/Thöne 2019). Das virtuelle Zwanzigerfeld wird im Kontext der Diskussion um didaktische Arbeitsmittel in einer Seminarsitzung der Grundlagenveranstaltung erprobt und analysiert. Hier gelang es Studierenden erst in Ansätzen die entsprechenden Potentiale auf fachdidaktischer Ebene herauszuarbeiten. Zu Beginn wurde der Einsatz der App insbesondere aus motivationalen oder organisatorischen Gründen (Plättchen können nicht verlorengehen) favorisiert, manche Studierende unterstellten implizit den Ersatz der virtuellen durch die physische Variante – ein guter Anlass um diese Position kritisch zu hinterfragen. Darüber hinaus führte gerade der Einsatz von Vignetten, die aus der oben beschriebenen Erprobung der App im Klassenunterricht entstanden sind, zum Anstoß einer produktiven Fokussierung auf die Auseinandersetzung mit den fachdidaktischen Potentialen der App. Neben einer Vignette zu den verschiedenen Legeweisen von Schülerinnen und Schülern am virtuellen Zwanzigerfeld (Bönig/Thöne 2019, S. 41) wurde ein Ausschnitt zum Vorgehen zweier Kinder bei der Suche nach allen Zerlegungen der Zahl 15 gezeigt (s. Abb. 7).

Im ersten Schuljahr sollen Kinder alle Zerlegungen der Zahl 15 finden. Dazu können sie auch das virtuelle Zwanzigerfeld nutzen.

- a) Überlegen Sie zunächst mögliche Vorgehensweisen von Kindern.
- b) Für das Finden aller Möglichkeiten könnten Kinder auch das physische Zwanzigerfeld nutzen. Welche Chancen sehen Sie im Nutzen der virtuellen bzw. physischen Version?
- c) Wie unterscheiden sich die Vorgehensweisen von Nils und Alena (dazu werden kurze Videoausschnitte gezeigt)?
 - **Nils** notiert beginnend mit $0 + 15 = 15$ durch gegensinniges Verändern der Summanden um 1 alle Zerlegungen.
 - **Alena** bearbeitet die Aufgabe ausgehend von $10 + 5$ unter Nutzung der App und gewinnt die nächsten Aufgaben durch sukzessives virtuelles Wenden eines roten Plättchens.

Abbildung 7: Vignette zum Zerlegen von Zahlen am virtuellen Zwanzigerfeld

In der Semindiskussion zu c) wurde herausgearbeitet, dass die grundlegende Idee beim Vorgehen von Nils und Alena dieselbe ist, die Kinder allerdings unterschiedliche Darstellungsformen nutzen und sich Alenas Bearbeitung auch für die Diskussion im Unterrichtsgespräch gut als Veranschaulichung des Vorgehens von Nils eignet.

Auch wenn sich die Einschätzung des Einsatzes digitaler Medien während der Sitzung etwas ausdifferenzierte, wäre im Rahmen der fachdidaktischen Grundlagenveranstaltung eine vertiefte inhaltliche Auseinandersetzung – so wie sie Krauthausen (2012, S. 225) mit überaus sinnvollen Aufgabenvorschlägen anregt – nur unter Verzicht auf andere zentrale Inhalte möglich gewesen. Mit Blick auf die Kompetenzentwicklung von Studierenden erscheint es uns sinnvoller, eine solche Vertiefung im Rahmen eines zusätzlichen Seminarangebots im späteren Studienverlauf (vgl. Krauthausen/Pilgrim 2019) oder in Form von Abschlussarbeiten zu realisieren. Eine solche Ausweitung wäre aber auch für andere fachdidaktisch relevante Themenbereiche (z.B. Sprachförderung, inklusiver Unterricht) notwendig, was wiederum eine Erhöhung des Anteils fachdidaktischer Studieninhalte voraussetzt – zumindest, wenn man entsprechende Angebote als verbindlich für alle Studierende vorsieht.

Fazit

Die Ausbreitung des Coronavirus hat Forderungen nach einer Verstärkung der Nutzung digitaler Medien im Bildungsbereich noch einmal deutlichen Schwung verliehen. Inzwischen werden auch Grundschulen vielerorts mit Tablets ausgestattet. Aber ihr Einsatz kann für die mathematische Lernentwicklung von Kindern langfristig nur dann gewinnbringend sein, wenn die entsprechenden Anwendungen gemäß dem „Primat der Fachdidaktik“ (Krauthausen 2012) beleuchtet werden. Aufbauend auf den Analysen von Walter (2018) haben wir in diesem Beitrag die fachdidaktischen Potentiale der App „Zwanzigerfeld“ aufgezeigt und ihren Nutzen vor allem in Fördersettings mit einzelnen Grundschulkindern erprobt. Die Ergebnisse geben Anlass zu der Hoffnung, dass sich der Einsatz der App auch in bestimmten Unterrichtssituationen lohnt. Dies setzt aber eine Verzahnung von Wissen um medienspezifische Eigenheiten mit fachdidaktisch-konzeptionellem Hintergrundwissen bei den Lehrkräften voraus. Dies sollte dann sinnvollerweise bereits in der universitären Lehramtsausbildung angebahnt werden.

Bianca Fröhlich, Anja Härtel, Christina Munsberg, Nadine Pletl, Jonathan von Ostrowski und Daniela Werner danken wir ganz herzlich für Ihre Erprobung des virtuellen Zwanzigerfelds mit Grundschulkindern. Ihre Ergebnisse sind maßgeblich in diesen Artikel eingeflossen.

Literatur

Bönig, D./Thöne, B. (2019): Digitale Medien in der universitären Lehramtsausbildung – konzeptionelle Überlegungen und Umsetzungsmöglichkeiten. In: D. Walter/R. Rink, Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik. Konzeptionelles und Beispiele für die Primarstufe. Münster: WTM Verlag, S. 37-49

- Bönig, D./Walter, W. (2020): Virtuelles Zwanzigerfeld. Eine App zur Darstellung von Additions- und Subtraktionsaufgaben. https://pikas-digi.dzlm.de/sites/pikasdg/files/uploads/Unterricht/Zwanzigerfeld/um_zwanzigerfeld.pdf (letzter Zugriff am 21.09.20)
- Krauthausen, G. (1995): Die „Kraft der fünf“ und das denkende Rechnen. In: E. Ch. Wittmann/G.N. Müller (Hg.), Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule, S. 81-108
- Krauthausen, G. (2012): Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum
- Krauthausen, G./Pilgrim, A. (2019): Digitale Medien in der fachdidaktischen Lehramtsausbildung – Erfahrungen aus Lehrangeboten zu einem Verbundprojekt. In: D. Walter/ R. Rink, Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik. Konzeptionelles und Beispiele für die Primarstufe. Münster: WTM Verlag, S. 13-35
- Lorenz, J.H. (2009): Zur Relevanz des Repräsentationswechsels für das Zahlenverständnis und erfolgreiche Rechenleistungen. In: A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hg.), Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim/Basel/Berlin: Beltz, S. 230-247
- Ladel, S. (2009): Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz. Hamburg: Verlag Dr. Kovač
- Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt
- Rink, R./Walter, D. (2020): Digitale Medien im Matheunterricht. Ideen für die Grundschule. Berlin: Cornelsen
- Röhr, M. (2002): Kommunikation anregen – Verstehen fördern. Beispiele aus dem Mathematikunterricht. Grundschulunterricht, H. 1, S. 4-8
- Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Westermann
- Sundermann, B./Selter, Ch. (2013): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Gute Aufgaben. Differenzierte Arbeiten. Ermutigende Rückmeldung. Berlin, 4. Aufl.: Cornelsen Scriptor
- Urff, C. (2014): Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen. Berlin: Mensch und Buch Verlag
- Urff, C. (o. J.): Virtuelles Zwanzigerfeld. <http://www.lernsoftware-mathematik.de/?p=503> (letzter Zugriff am 27.09.2020)
- Walter, D. (2018): Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernern zu Beginn des zweiten Schuljahres. Wiesbaden: Springer Spektrum

Würfel mit digitalen Medien – Wo führt das noch hin? Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf Würfelhandlungen

Lena Florian & Heiko Etzold

Dieser Beitrag wird ein Spagat – zwischen alt und neu, zwischen virtuell und real, zwischen Theorie und Praxis. Als Fundament dieses Beitrags dienen Holzwürfel, die zu kleinen Bauwerken werden und so ein bedeutsamer Bestandteil des Geometrieunterrichts sind. Kontakt zwischen Günter Krauthausen und uns entstand im Rahmen des Verbundprojektes „Digitales Lernen Grundschule“, das die Deutsche Telekom Stiftung von 2017 bis 2019 für sechs Hochschulen förderte – unter anderem auch die Universitäten in Hamburg und Potsdam. Dabei entstand (in Potsdam durch Heiko Etzold) die iPad-App „Klötzchen“, für die (u. a. in Hamburg durch Günter Krauthausen und Alexandra Pilgrim) vielfältige Unterrichtsszenarien entwickelt wurden. Die App wiederum bot (Lena Florian in Potsdam) Anlass, eine Virtual-Reality-Umgebung zu Würfelbauwerken zu entwickeln. Da stehen sie nun: Die echten Holzwürfel, die Klötzchen in der iPad-App und die Kuben im virtuellen Raum. Und stehen diese nebeneinander? Werden virtuelle Würfel bald dafür sorgen, dass wir uns keine Splitter mehr einziehen? Ist es von Bedeutung, ob ich nun raues Holz, einen glatten Bildschirm oder einen VR-Controller mit vielen Knöpfen anfasse, um meisterhafte Würfelbauwerke zu erschaffen? Derartigen Fragen möchten wir in unserem Beitrag auf den Grund gehen. Wir betrachten vor allem die Handlungen, die mit Würfeln beim Bauen in den verschiedenen Medien möglich und sinnvoll sind. Wir untersuchen, inwieweit dies geometrisches Verständnis fördern kann. Und nicht zuletzt wollen wir Lehrerinnen und Lehrern Anregungen geben, wie mathematisch wünschenswerte Handlungen von Schülerinnen und Schülern im jeweiligen Medium aufgebaut, diagnostiziert und unterstützt werden können und damit ein vielfältiger, differenzierender Unterricht ermöglicht werden kann.

Würfel(bei)spiele – Die Nutzung von Würfelbauwerken im Mathematikunterricht

Die Arbeit mit Würfelbauwerken erfreut sich insbesondere im Mathematikunterricht der Grundschule großer Beliebtheit. Das liegt unter anderem daran, dass Würfel so vielfältige Möglichkeiten bieten, Raumvorstellung zu fördern, wie kaum ein anderes Material. Schon Freudenthal (1971) beschrieb die Problematik, dass wir, obwohl wir ständig von Raum umgeben sind, oft die Bedeutung der Räumlichkeit vergessen. Dabei wissen wir mittlerweile, dass eine gute Raumvorstellung eng verknüpft ist mit Rechenfähigkeiten (Graß & Krammer 2018), mit dem Erfolg in MINT-Disziplinen (Uttal et al. 2013) und sogar mit dem Schriftspracherwerb (Rüsseler et al. 2005). Auch das Verständnis geometrischer Grundlagen beruht auf dem Erkennen von räumlichen Zusammenhängen und Beziehun-

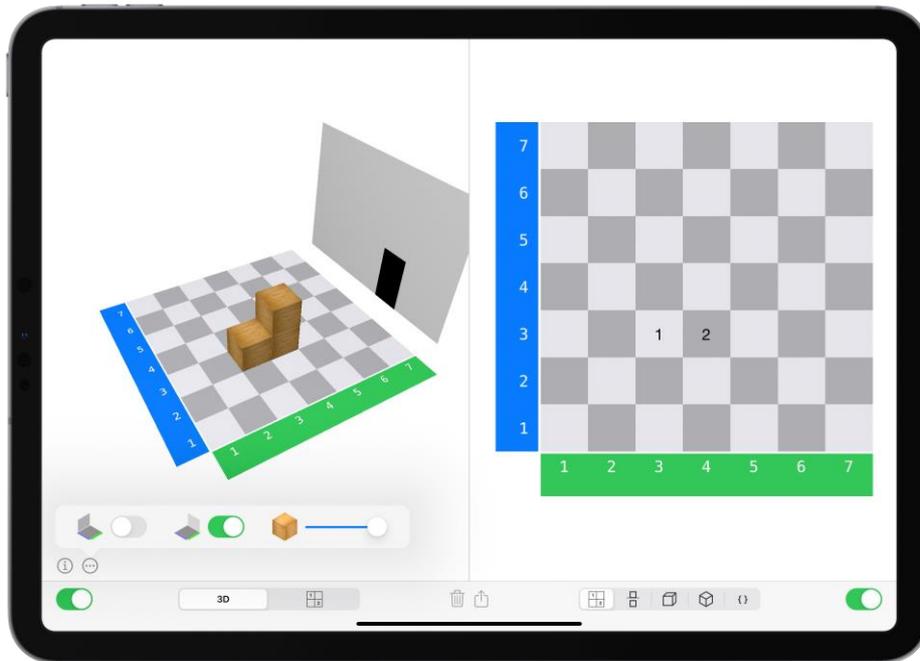
gen und somit auf Raumvorstellung (Besuden 1999). Die Bedeutung der Förderung von Raumvorstellung im Mathematikunterricht ist also weithin bekannt (vgl. auch Maier 1999, S. 315 – 322; Reinhold 2019).

Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu fördern, sind Würfelbauwerke vor allem deshalb geeignet, weil sie die visuelle Wahrnehmung fördern (Frostig nach Eichler & Gleißberg 2019, S. 48). Konkret üben Kinder bei der Arbeit mit Würfeln die Hand-Auge-Koordination, die Wahrnehmung der Deckungsgleichheit von Würfel Flächen und die visuelle Gliederung. Wahrnehmungskonstanz und Figur-Grund-Wahrnehmung ermöglichen es den Kindern zu erkennen, dass Würfel verdeckt oder nur teilweise sichtbar sein können, sowie Teile von Würfelbauwerken als Einheit zu erfassen (Eichler & Gleißberg 2019). Das alles sind Grundlagen zur Ausbildung einer anschlussfähigen Raumvorstellung. Typische Aufgabenformate aus dem Mathematikunterricht ergeben sich aus dem Ziel, diese zu fördern, zum Beispiel beim Ergänzen von Würfelgebäuden zu einem Quader oder dem Ermitteln der Anzahl von Würfeln eines Gebäudes. Dabei werden mittlerweile nicht nur reale, sondern auch digitale Holzwürfel genutzt (bspw. Krauthausen & Pilgrim 2018; Bönig & Thöne 2018; Thöne & Bönig 2020). Es scheint naheliegend, dass virtuelle Würfel bestimmte Erfahrungen, wie die Hand-Auge-Koordination, nicht *ersetzen* können. Aber bestehen hier vielleicht andere, interessante *Ergänzungen*?

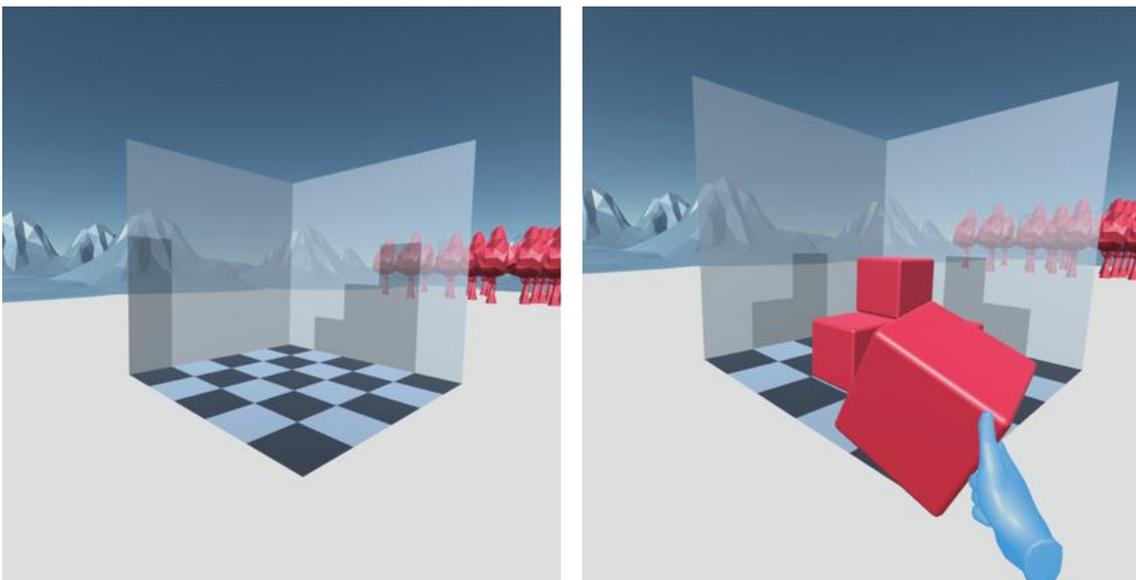
Blick auf das Werkzeug

Lehrerinnen und Lehrer stehen nicht selten vor der Wahl, mit welchen Werkzeugen sie einen bestimmten Unterrichtsinhalt unterstützen. Im Zusammenhang mit Würfelbauwerken können echte Holzwürfel dienen, ggf. auch mit einer Schattenbox, als digitale Werkzeuge gehen wir auf die von uns entwickelten Anwendungen *Klötzchen* (Etzold 2020a) und *CubelingVR* (Florian 2021) ein. Statt von einem *Werkzeug* werden wir im Folgendem von einem *Artefakt* sprechen. Wir wollen damit, angelehnt an die Instrumentelle Genese (Rabardel 2002), zum Ausdruck bringen, dass es sich um ein künstlich geschaffenes Hilfsmittel handelt, das erst durch seinen zielgerichteten Einsatz im Mathematikunterricht den Charakter eines Werkzeuges erhält, also erst dann zum Vermittler zwischen Schülerin bzw. Schüler und dem mathematischen Objekt wird.

Klötzchen. In der für iPads (sowie Macs und mit eingeschränktem Funktionsumfang auch iPhones) verfügbaren App *Klötzchen* liegen jeweils zwei Darstellungen eines Würfelbauwerks nebeneinander, es besteht u. a. eine Auswahl aus 3D-Ansicht, Bauplan und Zwei-/Dreitafelprojektion. In der 3D-Ansicht ist es möglich, die Schattenprojektionen der Würfel darzustellen. Werden in der 3D-Ansicht oder im Bauplan Würfel hinzugefügt oder entfernt, so passen sich alle anderen Darstellungen entsprechend unmittelbar an. Eine Handreichung für Lehrerinnen und Lehrer steht als offene Bildungsressource online zur Verfügung (Etzold 2020b), die App selbst kann im Apple App-Store kostenfrei heruntergeladen werden (Etzold 2020a).

Abb. 1: *Klötzchen* als iPad-App

CubelingVR. Die Anwendung *CubelingVR* ist eine VR-basierte Umgebung, die für die Oculus Quest entwickelt wurde. VR steht für *Virtual Reality* – also eine vollständig computergenerierte, dreidimensionale virtuelle Welt. Im Gegensatz zu *Klötzchen* begeben sich die Schülerinnen und Schüler mit *CubelingVR* mithilfe eines Head Mounted Displays (HMD, eine sogenannte VR-Brille) in eine immersive Umgebung, in der ihnen Würfel als dreidimensionale Objekte zur Verfügung stehen. Immersion beschreibt den Grad an Realitätsillusion durch technische Systeme wie ein HMD. Je mehr Sinneskanäle von einem Medium angesprochen werden, umso eher fühlt sich eine Person in der virtuellen Welt präsent (Hofer 2016).

Abb. 2: *CubelingVR* mit vorgegebenen bzw. dynamischen Schattenbildern