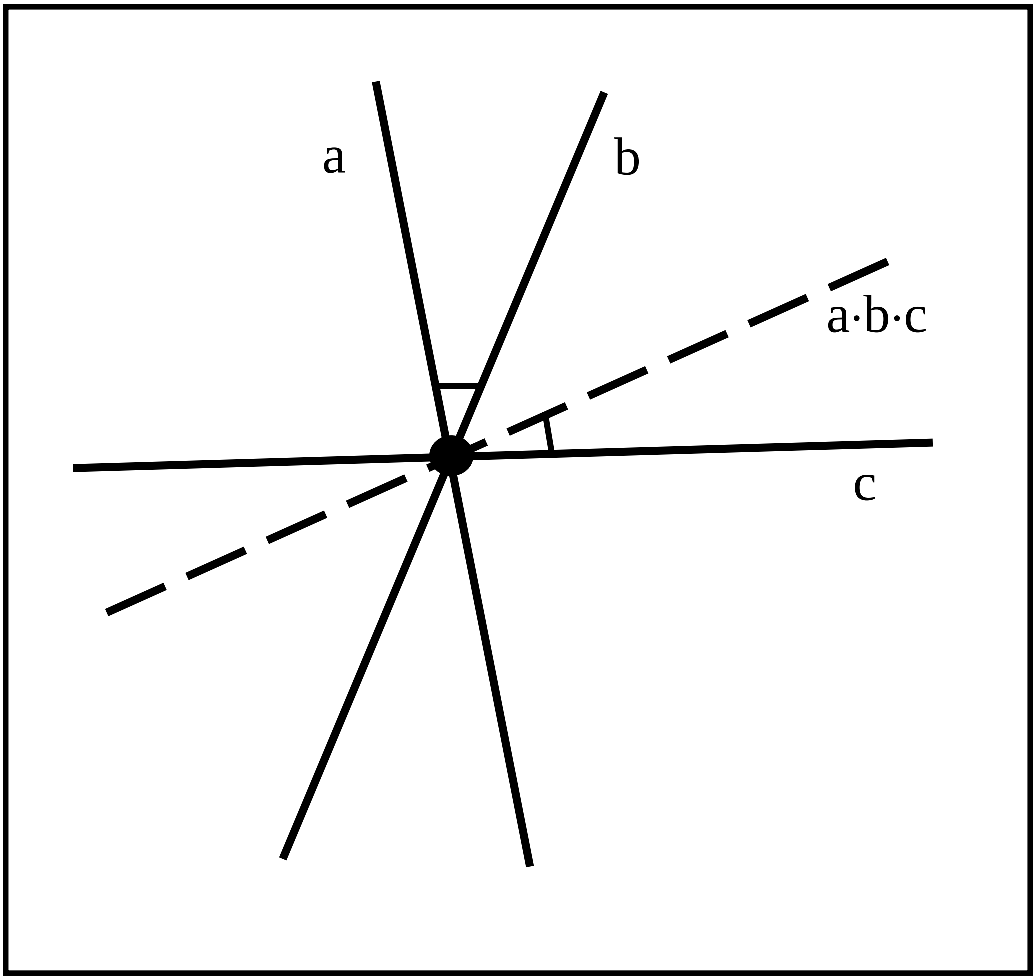
Helmut Karzel & Günter Graumann

Gruppentheoretische Begründung metrischer Ebenen

modernisierte und ergänzte Fassung

einer Vorlesungsausarbeitung aus den 1960er Jahren



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

3
scripta didactica mathematica

scripta didactica mathematica

Herausgegeben von
Gilbert Greefrath und Martin Stein

Band 3

GRUPPENTHEORETISCHE BEGRÜNDUNG METRISCHER EBENEN

Ausarbeitung
der von
Helmut Karzel
im WS 1962/63 an der Universität Hamburg gehaltenen Vorlesung
mit Ergänzungen aus dem Proseminar des SS 1963
Unter der Leitung von Prof. Karzel ausgearbeitet von
Günter Graumann

Von Prof. Dr. Günter Graumann
überarbeitete und ergänzte Fassung
Bielefeld 2017

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.edition-winterwork.de/

ISBN 978-3-95987-058-0

Vorwort

Nach der Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien im 19. Jahrhundert und dem Wechsel des Bildes von Mathematik zur Lehre von Strukturen erfolgte eine Begründung der klassischen euklidischen Geometrie in moderner axiomatischer Fassung im Jahre 1899 durch David Hilbert in seinem Buch „Grundlagen der Geometrie“. Danach beschäftigten sich mehrere Mathematiker mit Verallgemeinerungen der klassischen euklidischen und nicht-euklidischen Geometrien.

J. Hjelmslev verwendete 1907 in seiner stetigkeitsfreien Begründung von Geometrie als erster das Hilfsmittel der Spiegelungen. Ein weiterer Impuls in der Beschäftigung mit der Begründung metrischer Geometrien, allein basierend auf Inzidenz, Senkrecht und Kongruenz, erfolgte in den 1930er Jahren durch K. Reidemeister, wobei an Stelle der Kongruenz der Begriff der Geraden-spiegelung als Grundbegriff gewählt wurde. A. Schmidt hat dann 1943 als Erster neben der Begründung durch Spiegelungen den Dreispiegelungssatz unter die Axiome aufgenommen.

Hieran knüpfte in den 1950er Jahren F. Bachmann an, der sich auch in den 1930er Jahren schon mit diesem Gebiet beschäftigt hatte. Aus seinem 1951 veröffentlichten Artikel „Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“ und seiner 1952/53 gehaltenen Vorlesung zu diesem Thema entstand das 1956 erstmals veröffentlichte Buch „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“, welches alle fundamentalen Gedanken für unsere Thematik enthält. Im Vorwort des Buches heißt es u.a.

„Für die gewohnte euklidische Ebene und auch für die klassischen nicht-euklidischen Ebenen kann man leicht folgende Tatsachen feststellen: Den Punkten und den Geraden entsprechen eindeutig die Spiegelungen an den Punkten und die Spiegelungen an den Geraden, also involutorische Elemente der Bewegungs-gruppe. Geometrische Beziehungen wie die Inzidenz von Punkten und Geraden und die Orthogonalität von Geraden lassen sich durch gruppentheoretische Relationen zwischen den zugehörigen Spiegelungen wiedergeben. Daher kann man geometrische Sätze in Sätze über Spiegelungen und Spiegelungsprodukte über-setzen.
Man wird so dazu geführt, die Spiegelungen zum Gegenstand geometrischer Betrachtung zu machen, und in der Bewegungsgruppe „*Geometrie der Spiegelungen*“ zu betreiben. Faßt man die Spiegelungen selbst als geometrische Gegenstände, nämlich als neue „Punkte“ und „Geraden“ auf, so kann man für sie geometrische Beziehungen wie „Inzidenz“ und „Orthogonalität“ durch gruppentheoretische Relationen so definieren, dass der neue Bereich ein treues Abbild der ursprünglich gegebenen Punkte und Geraden mit ihrer Inzidenz, Orthogonalität usw. ist.“

H. Karzel hat aufbauend auf die Ideen von F. Bachmann und einem Artikel über „Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik“ seines Doktorvaters E. Sperner in der zweiten Hälfte der 1950er Jahre die gruppentheoretische Begründung metrischer Geometrien weiter entwickelt und sogenannte Lotkerngeometrien bzw. Geometrien mit echtem Zentrum mit aufgenommen. Die algebraische Beschreibung dieser Geometrien zeichnet sich dadurch aus, dass der zugehörige Körper die Charakteristik 2 hat. In den Jahren 1962 und 1963 hat H. Karzel dann in einer Vorlesung mit anschließendem Proseminar eine zusammenfassende Darstellung des gruppentheoretischen Aufbaus aller möglichen ebenen metrischen Geometrien dargestellt. Hierüber wurde kurz danach in Zusammenarbeit von H. Karzel und G. Graumann eine Vorlesungsausarbeitung erstellt, die die Grundlage für das vorliegende Buch darstellt.

In den letzten 50 Jahren wurden auch Verallgemeinerungen auf drei und mehr Dimensionen vorgenommen und vor allem wurden besondere Typen metrischer Geometrie genauer untersucht und in Beziehung zu besonderen Eigenschaften der zugehörigen algebraischen Struktur gesetzt. Am Grundgedanken des gruppentheoretischen Aufbaus ebener metrischer Geometrien hat sich aber kaum etwas geändert, so dass der vorliegende Text weiterhin aktuell ist.

In der vorliegenden Fassung wurden gegenüber der Vorlesungsausarbeitung von 1963/64 einige Anordnungen von Sätzen verändert und es wurden zur Unterstützung des Verständnisses erläuternde Anmerkungen, die Bezug auf die anschauliche euklidische Geometrie nehmen, hinzugefügt. Außerdem wurden mehrere Beweise ausführlicher dargelegt.

Das Buch wendet sich an interessierte Mathematiker und Mathematikerinnen sowie Studierende der Mathematik. Insbesondere ist es geeignet für Lehrende und Studierende des Lehramts an Gymnasien als mathematischer Hintergrund der Abbildungsgeometrie wie sie im Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I und in der Vektorgeometrie der Sekundarstufe II vorkommt.

Bielefeld / Wessling, 2017 Günter Graumann / Helmut Karzel

Inhaltsübersicht

1 Gruppen mit involutorischem Erzeugendensystem

Alle metrischen Ebenen, d.h. alle ebenen geometrischen Strukturen mit einer Kongruenzrelation und einer Orthogonalrelation, können begründet werden durch die von ihren Achsenspiegelungen erzeugte Gruppe, wobei der sog. Dreispiegelungssatz das Fundament bildet. Eine solche Gruppe kann allgemein charakterisiert werden als Gruppe mit einem Erzeugendensystem, wobei alle Elemente des Erzeugendensystems involutorisch sind.

Bevor wir uns mit der allgemeinen Gruppenebene beschäftigen werden vorweg einige Definitionen und Sätze einer Gruppe mit inovlutorischem Erzeugendensystem zusammengestellt.

<u>Grundgebilde</u>: Wir gehen aus von einer
Gruppe G(·) mit einem nicht-leeren Erzeugendensystem E,
dessen sämtliche Elemente **involutorisch**[1] sind.

<u>Bezeichnungen</u>: Die Elemente von **E** bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben und die Elemente von **G** mit kleinen griechischen Buchstaben; das Verknüpfungszeichen in **G**(·) lassen wir in der Regel weg und schreiben die Elemente nur nacheinander.

Die Ausgangsbedingungen sind also:

(G 0) a) **G**(·) ist eine Gruppe.[2]
b) **E** ist Erzeugendensystem von **G**,
d.h. jedes $\gamma \in$ **G** kann als endliches Produkt von Elementen aus **E** dargestellt werden.
c) **E** $\neq \emptyset$.
d) Alle Elemente von **E** sind involutorisch,
d.h. $x \in$ **E** $\Rightarrow$ x inv (d.h. $x^2 = 1$ und $x \neq 1$).

1.1 Grundlegende Aussagen für Gruppen mit involutorischem Erzeugendensystem

Wir stellen jetzt zunächst einige Folgerungen heraus, die sich allein aus (G 0) ergeben.

<u>Satz 1.1</u>: **G** enthält mindestens zwei Elemente.

---

[1] Ein Element γ einer Gruppe heißt **involotorisch**, wenn $\boldsymbol{\gamma^2 = 1}$ **und** $\boldsymbol{\gamma \neq 1}$. Damit gleichwertig ist, dass γ die Ordnung 2 hat oder dass $\gamma = \gamma^{-1} \neq 1$ gilt.
Wenn ein Element γ aus **G** involutorisch ist, so schreiben wird kurz „**γ inv**".
[2] Eine Gruppe ist bekanntlich ein Verknüpgfungsgebilde, das abgeschlossen und assoziativ ist sowie ein neutrales Element und zu jedem Element ein inverses Element hat.
Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass eine Gruppe verschiedene Erzeugendensysteme haben kann; unser Grundgebilde ist also immer ein Paar (**G**,**E**).

Beweis: Da in **G** mindestens das Element 1 existiert und mindestens ein $x \in \mathbf{E}$, das involutorisch ist (d.h. $x \neq 1$), enthält G mindestens zwei verschiedene Elemente.

Satz 1.2: Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inv und $\xi = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, dann ist $\xi^{-1} = x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1$.

Beweis: $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n) \cdot (x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot (x_n \cdot x_n) \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot 1 \cdot (x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot (x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1)$ da das Assoziativgesetz gilt und $x_n \cdot x_n = 1$ ist wegen „x_n inv“. Entsprechend reduziert sich das Produkt weiter bis $x_1 \cdot x_1$.

Satz 1.3: Ist $x, y \in \mathbf{E}$, dann gilt: xy inv $\Leftrightarrow$ $xy = yx$ und $x \neq y$.

Beweis: Nach Satz 1.2 gilt $(xy)^{-1} = yx$. Damit ergibt sich xy inv $\Leftrightarrow xy = yx$ und $xy \neq 1$. Durch Multiplikation der Ungleichung von rechts mit y folgt dann $xyy = x \neq y$ wegen $y \in \mathbf{E}$, also $y^2 = 1$.

Satz 1.4: Ist $x, y, w \in \mathbf{E}$, dann gilt: xyw inv $\Leftrightarrow wxy$ inv $\Leftrightarrow ywx$ inv $\Leftrightarrow xwy$ inv $\Leftrightarrow yxw$ inv $\Leftrightarrow wyx$ inv.

Beweis: xyw inv $\Leftrightarrow xyw \cdot xyw = 1$ und $xyw \neq 1 \Leftrightarrow w(xywxyw)w = ww = 1$ und $w(xyw)w \neq 1$, d.h. $wxywxyww = wxywxy = 1$ und $wxyww = wxy \neq 1$, was wxy inv bedeutet. Also gilt: xyw inv $\Leftrightarrow wxy$ inv. Weiterhin sind aufgrund der Multiplikation der Gleichung $(wxy)^2 = 1$ bzw. der Ungleichung $wxy \neq 1$ von rechts und links mit y die Beziehungen äquivalent zu $ywxywx = 1$ und $ywx \neq 1$ (d.h. ywx inv). xwy, yxw, wyx inv ist jeweils mit einer der bisherigen Beziehungen gleichwertig, da $xwy = (ywx)^{-1} = ywx$, $yxw = (wxy)^{-1} = wxy$, $wyx = (xyw)^{-1} = xyw$ nach Satz 1.2 gilt, folgt der Rest der Behauptung.

1.2 Abbildungen in Gruppen mit involutorischem Erzeugendensystem

Definition: Ist $\alpha \in \mathbf{G}$, so definieren wir eine Abbildung $\overline{\alpha}: \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ durch $\overline{\alpha}$ **(ξ) = α·ξ·α⁻¹** für alle $\xi \in \mathbf{G}$.
Die Menge aller Abbildungen $\overline{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbf{G}$ nenen wir $\overline{\mathbf{G}}$.

Satz 1.5: Jede Abbildung $\overline{\alpha}$ ist ein Automorphismus der Gruppe $\mathbf{G}(\cdot)$, d.h. sie ist bijektiv von $\mathbf{G}(\cdot)$ in sich und $\overline{\alpha}(\gamma \cdot \delta) = \overline{\alpha}(\gamma) \cdot \overline{\alpha}(\delta)$.

Beweis: Zunächst ist $\alpha \cdot \xi \cdot \alpha^{-1}$ ein eindeutig bestimmtes Element von **G**. Ist $\zeta \in \mathbf{G}$ ein beliebig gegebenes Element von **G**, dann folgt mit $\alpha^{-1} \cdot \zeta \cdot \alpha = \gamma$, dass $\zeta = \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1} = \overline{\alpha}(\gamma)$ ist, womit ein eindeutig bestimmtes Urbild von ζ gegeben ist. Die Abbildung $\overline{\alpha}$ ist also bijektiv. Weiterhin gilt $\overline{\alpha}(\gamma \cdot \delta) = \alpha \cdot \gamma \delta \cdot \alpha^{-1} = \alpha \cdot \gamma \cdot (\alpha^{-1} \alpha) \cdot \delta \cdot \alpha^{-1} = (\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}) \cdot (\alpha \cdot \delta \cdot \alpha^{-1}) = \overline{\alpha}(\gamma) \cdot \overline{\alpha}(\delta)$.

Satz 1.6: a) Die Zuordnung $\alpha \to \overline{\alpha}$ von $\mathbf{G}(\cdot) \to \overline{\mathbf{G}}(\circ)$ ist ein Homomorphismus, wobei „ $\circ$ “ die Hintereinanderausführung von Abbildungen der Form $\overline{\alpha} \circ \overline{\beta}(\xi) = \overline{\alpha}(\overline{\beta}(\xi))$ beschreibt, d.h. es gilt:

$(\alpha\cdot\beta) \to \overline{\alpha} \circ \overline{\beta}$ bzw. $\overline{\alpha\cdot\beta} = \overline{\alpha} \circ \overline{\beta}$ für beliebige $\alpha, \beta \in$ **G**.

b) Es ist $\overline{\alpha}$ = Id (identische Abbildung) genau dann, wenn α zum Zentrum **Z** von **G** gehört, d.h. wenn $\alpha\cdot\xi = \xi\cdot\alpha$ für alle $\xi \in$ **G** gilt.

c) $\overline{\mathbf{G}}(\circ)$ ist isomorph zur Faktorgruppe **G**$(\cdot)/$**Z**$(\cdot)$.

Beweis: a) Für ein beliebiges $\xi \in$ **G** gilt: $\overline{\alpha\cdot\beta}(\xi) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\xi\cdot(\alpha\cdot\beta)^{-1} = (\alpha\cdot\beta)\cdot\xi\cdot(\beta^{-1}\cdot\alpha^{-1}) = \alpha\cdot(\beta\cdot\xi\cdot\beta^{-1})\cdot\alpha^{-1} = \overline{\alpha}(\beta\cdot\xi\cdot\beta^{-1}) = \overline{\alpha}(\overline{\beta}(\xi)) = (\overline{\alpha}\circ\overline{\beta})(\xi)$, d.h. $\overline{\alpha\cdot\beta} = \overline{\alpha}\circ\overline{\beta}$.
b) Aufgrund von Multiplikation der Gleichung von rechts mit α für ein beliebiges $\xi \in$ **G** ergb sich: $\alpha\cdot\xi\cdot\alpha^{-1} = \xi \Leftrightarrow \alpha\cdot\xi = \xi\cdot\alpha$, d.h. $\alpha \in$ **Z**.
c) Sei γ ein beliebiges Element von **G**. Für jedes Element δ der Nebenklasse $\gamma\cdot$**Z** (d.h. $\delta = \gamma\cdot\zeta$ mit $\zeta \in$ **Z**) ist dann $\overline{\delta}(\xi) = \overline{\gamma\cdot\varsigma}(\xi) = \overline{\gamma}(\overline{\varsigma}(\xi)) = \overline{\gamma}(\xi)$ für jedes $\xi \in$ **G** nach Satz 1.6a und 1.6b. Umgekehrt ist $\delta \notin \gamma\cdot$**Z**, so ist $\overline{\delta}(\xi) \neq \overline{\gamma}(\xi)$ da andernfalls $\overline{\gamma}^{-1}\cdot\overline{\delta}(\xi) = \xi$ für alle $\xi \in$ **G** wäre und damit $\overline{\gamma}^{-1}\cdot\overline{\delta}$ = Id und nach Satz 1.6b also $\gamma^{-1}\cdot\delta \in$ **Z** im Widerspruch zu $\delta \notin \gamma\cdot$**Z**.
Hiermit ergibt sich nun, dass jeder Abbildung $\overline{\alpha} \in \overline{G}$ umkehrbar eindeutig eine Nebenklasse $\alpha\cdot$**Z** und jeder Nebenklasse $\alpha\cdot$**Z** umkehrbar eindeutig eine Abbildung $\overline{\alpha}$ entspricht. Wegen Satz 1.6a überträgt sich dabei die Verknüpfung der Abbildung auf die Multiplikation der Nebenklassen, d.h. $\overline{G}(\circ)$ ist isomorph der Menge der Nebenklassen $\gamma\cdot$**Z**, d.h. der Faktorgruppe **G**/**Z**.

<u>Satz 1.7</u>: Für alle x, y $\in$ **E** gilt: $(xy)^2 = 1 \Leftrightarrow xy = yx \Leftrightarrow \overline{x}(y) = y \Leftrightarrow \overline{y}(x) = x$.

Beweis: Wegen x,y $\in$ **E** (also xx = 1 oder $x^{-1} = x$ bzw. yy = 1 oder $y^{-1} = y$) ergibt sich durch Multiplikation von rechts zuerst mit y und dann mit x, dass xyxy = 1 gleichbedeutend mit xy = yx ist. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit x von rechts bzw. y von links folgt dann xy = yx $\Leftrightarrow$ xyx = y bzw. xy = yx $\Leftrightarrow$ yxy = x. Also gilt xy = yx $\Leftrightarrow$ $\overline{x}(y) = y$ und xy = yx $\Leftrightarrow$ $\overline{y}(x) = x$. Ergänzend sei angemerkt, dass nach Satz 1.3 für x $\neq$ y die Gleichung xy = yx gleichbedeutend mit (xy inv) ist.

<u>Satz 1.8</u>: Für beliebige $\alpha, \gamma \in$ **G** gilt: γ inv $\Leftrightarrow$ $\overline{\alpha}(\gamma)$ inv.

Beweis: γ inv $\Leftrightarrow$ $\gamma^2 = 1$ und $\gamma \neq 1$ $\Leftrightarrow \alpha\gamma^2\alpha^{-1} = \alpha\cdot 1\cdot\alpha^{-1} = 1$ und $\alpha\gamma\alpha^{-1} \neq 1$ $\Leftrightarrow \alpha\gamma\alpha^{-1}\cdot\alpha\gamma\alpha^{-1} = 1$ und $\alpha\gamma\alpha^{-1} \neq 1$, d.h $\overline{\alpha}(y)\cdot\overline{\alpha}(y) = 1$ und $\overline{\alpha}(y) \neq 1$, also $\overline{\alpha}(y)$ inv.

<u>Satz 1.9</u>: Für jedes a $\in$ **E** mit a $\notin$ **Z** ist die Abbildung $\overline{a}$ involutorisch, d.h. $\overline{a}^2$ = Id und $\overline{a} \neq$ Id.

Beweis: Zunächst ist $\overline{a}^2(\xi) = a^2\xi a^{-2} = \xi$ wegen $a^2 = 1 = a^{-2}$ für alle $\xi \in$ **G**, d.h. $\overline{a}^2$ = Id. Wäre nun $\overline{a}$ = Id, so würde $\overline{a}(\xi) = a\xi a = \xi$ gelten, d.h. $a\xi = \xi a$ für alle $\xi \in$ **G**. Also wäre a $\in$ **Z** im Widerspruch zur Voraussetzung.

<u>Satz 1.10</u>: Für jedes $\alpha \in$ **G** und jedes a $\in$ **E** gilt $\overline{\alpha}(a)$ inv.

Beweis: Wegen a $\in$ **E** gilt a inv. Nach Satz 1.8 folgt dann die Behauptung.