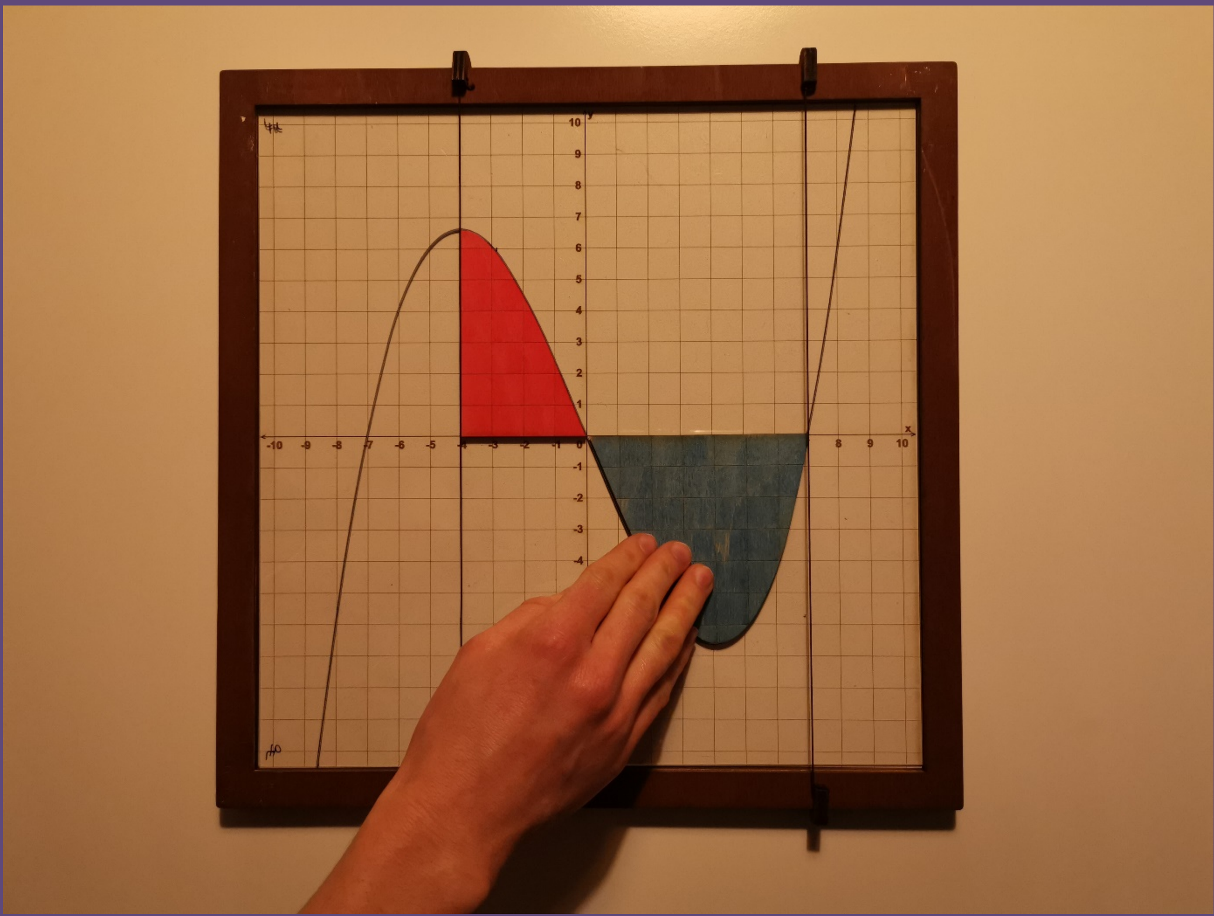
Annalisa Steinecke



Be*greifen* der Integralrechnung: Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen

Ein entwicklungsorientiertes Forschungsprojekt zum Integralbegriff

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse 3

Diversität und Inklusion im Kontext Mathematischer Lehr-Lern-Prozesse

Herausgegeben von
Ralf Benölken, Nina Berlinger und Marcel Veber

Band 3

ANNALISA STEINECKE

BE*GREIFEN* DER INTEGRALRECHNUNG: KONZEPTION UND EMPIRISCHE ERPROBUNG MONTESSORI-PÄDAGOGISCHER LERNMATERIALIEN ZUR FÖRDERUNG VIELFÄLTIGER GRUNDVORSTELLUNGEN

EIN ENTWICKLUNGSORIENTIERTES FORSCHUNGSPROJEKT ZUM INTEGRALBEGRIFF

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

ISBN 978-3-95987-138-9

Be*greifen* der Integralrechnung:
Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen

Ein entwicklungsorientiertes Forschungsprojekt zum Integralbegriff

Der Universität Bayreuth zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) vorgelegte Abhandlung

von

Annalisa Steinecke

aus Rosenheim

Für meinen Opa

Dr. Hans Diemer

Vorwort der Herausgebenden

Die Dissertationsschrift von Annalisa Steinecke trägt den Titel „*Begreifen der Integralrechnung: Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen. Ein entwicklungsorientiertes Forschungsprojekt zum Integralbegriff*“. Damit fokussiert der vorliegende Band eine Schnittstellenbetrachtung verschiedener Aspekte, die für individualisiertes, aktiv-entdeckendes und konstruktivistisches – somit auch inklusionsorientiertes – Lernen im Mathematikunterricht von höchster Relevanz ist: Tragfähige Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten gelten in der Mathematikdidaktik als einer der, wenn nicht sogar überhaupt als *der* Schlüssel, um Lehr-Lern-Prozesse so anzulegen, dass Lernende eine fachliche Substanz wirklich verstehen und tragfähige Wissensnetzwerke aufbauen können. Eng verbunden hiermit sind Diskussionen um Anschauungsmittel, die in der jüngeren mathematikdidaktischen Forschung nicht bloß als Werkzeug des Lernens, sondern weitaus umfassender als Prozessbestandteil des Lernens im erkenntnistheoretischen Sinne aufgefasst werden. Um in dieser Weise wirken zu können, sind an die Konstruktion eines bestimmten Anschauungsmittels bzw. im Hinblick auf seine Verwendbarkeit in einem spezifischen fachlichen Kontext Fragen zu stellen wie „Ist es der mathematischen Struktur des betrachteten Inhalts angemessen?“, „Trägt es möglichst langfristig und unterstützt es den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder und damit von Grundvorstellungen?“, „Unterstützt es die Genese von Wissensnetzwerken?“ oder auch „Ist seine Haptik so angelegt, dass es z.B. tatsächlich *alle* Lernenden nutzen können, oder dass es z.B. Potenzen zum Grundvorstellungsaufbau von Lernenden mit spezifischen Bedürfnissen aufweist?“ (man denke beispielsweise an Anschauungsmittel für Lernende, deren Sehfähigkeit stark eingeschränkt ist). Im Laufe der Zeit wurden zu vielen mathematischen Inhalten für verschiedene Altersstufen zahlreiche Arbeiten vorgelegt, die aus praktischer Perspektive z.B. die Konstruktion von Anschauungsmittel zu speziellen Inhalten diskutieren oder die aus wissenschaftlicher Sicht den Ertrag eines Anschauungsmittels empirisch beleuchten.

Die vorliegende Arbeit ordnet sich in die zuletzt genannte Blickrichtung ein und nimmt hierfür einen Fokus, der im doppelten Sinne bemerkenswert ist: Zum einen stellt sich die Autorin in die Tradition von Montessori-Materialien und damit in eine Richtung, welche auch die im heutigen Mathematikunterricht verwendeten „Materialien“ auf mannigfache Weise nachhaltig beeinflusst hat. Zum anderen bietet ein Stoff der Sekundarstufe II den Anker der Darlegungen: Natürlich gibt es auch für diese Altersstufe zahlreiche Arbeiten, die sich – auch mit Blick auf das fokussierte Thema Integralrechnung – Konzepten von Grundvorstellungen u.Ä. widmen, doch bietet die Anknüpfung an einen induktiven individuellen Grundvorstellungsaufbau vor dem Hintergrund der schon wissenschaftspropädeutischen Grundausrichtung von Lehrgängen in beispielsweise der gymnasialen Oberstufe einen innovativen Zugang, der auch und gerade in Zeiten von höchster Bedeutung ist, in denen der Umgang mit Diversität und damit die Frage nach Möglichkeiten, wie tatsächlich *alle* Lernenden individuelle Lernwege beschreiten können, in das Zentrum fachdidaktischer Überlegungen rückt.

Mag es also auf den ersten Blick überraschen, dass in der Reihe „Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse“ eine Dissertationsschrift zu montessori-pädagogischen Lernmaterialien im späten Schulalter erscheint, so ist doch gerade die Implikation einer äußerst konsequenten Individualisierung, einer Hinwendung zum Grundvorstellungsaufbau wie auch zu einem wirklich verständnisorientierten Lernen für den Fokus der Reihe produktiv: Denn es wird die „Suche nach der Nadel im fachdidaktischen Heuhaufen“ angegangen, d.h., die Suche danach, welche didaktischen Zugänge angesichts der Forderung nach unteilbarer Partizipation aller Lernenden am Unterrichtsgeschehen gefunden werden können, um wirklich allen Wege zur Erschließung von Unterrichtsinhalten zu eröffnen.

Der vorliegende Band ist zugleich der dritte in der Reihe „Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse“. Wie den oben skizzierten Ausführungen zu entnehmen ist, setzt er einen Akzent, der theoretische Konzepte, empirische Fundierungen und praktische Implikationen in eine Synthese bringt und der auf diese Weise produktiv zu einem Anspruch beiträgt, den wir im Vorwort des ersten Bandes der Reihe selbst vorgetragen haben: Die Reihe soll nicht lediglich eine Reihe über Vielfalt sein, sondern selbst ein Forum für Vielfalt bieten.

Wir freuen uns sehr, die Arbeit von Annalisa Steinecke in die Reihe aufzunehmen, danken für die konstruktive Zusammenarbeit und wünschen der Schrift viele interessierte Leser*innen verbunden mit dem Wunsch, der auch unsere Gedanken bei der Lektüre der Arbeit inspiriert hat, dass auch (oder trotz) der Herausforderungen eines diversitätsorientierten Mathematikunterrichts Individualisierungen in das Zentrum mathematikdidaktischer Bemühungen rücken, denn: Mathematik (wirklich) zu lernen bedeutet, Mathematik (wirklich) zu verstehen – und hierfür eröffnet der Zugang altbekannte und neue Brücken.

Wuppertal, Münster und Osnabrück im Februar 2020

Ralf Benölken, Nina Berlinger und Marcel Veber

Vorwort

An der Entstehung meiner Dissertationsarbeit, die aus meiner Begeisterung für die enaktiven Lernformen der Montessori-Pädagogik resultiert, haben unheimlich viele Menschen mitgewirkt. Ein besonders herzlicher Dank gilt zunächst Prof. Dr. Volker Ulm, der sich von unserem ersten Dissertationsgespräch am Brombachsee an viele Stunden Zeit für intensive Diskussionen über Grundvorstellungen zum Integralbegriff genommen und mir stets die Freiheit gelassen hat, meine eigenen Überlegungen zu verwirklichen. Gleichermaßen bedanke ich mich von Herzen bei Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal, die durch Ihre motivierenden Anregungen und Ihre konstruktive Kritik ebenfalls ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Bei der handwerklichen Fertigung der montessorischen Lernmaterialien war ich auf Fachleute angewiesen, die meine gedanklichen Entwürfe in konkrete Prototypen umsetzen konnten. Ein großes Dankeschön schulde ich Volker Stefan und Frank Neumann von den Wissenschaftlichen Werkstätten der Universität Bayreuth, Stefan Kujan von „k2ibabs“ für die Gravierung der Plexiglasscheiben und vor allem Manuela und Norbert Warmuth, die bei der technischen Anfertigung meiner Lernmaterialien mehr als einmal das Unmögliche möglich gemacht haben. Die *University of Bayreuth Graduate School* und die im Rahmen der vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten *Qualitätsoffensive Lehrerbildung* haben mein Forschungsprojekt finanziell unterstützt, wofür ich ebenfalls sehr dankbar bin.

In den letzten drei Jahren wurde mir außerdem wertvolle Unterstützung von Sarah Armbrust, Moritz Zehnder und Tom Köcher aus meinem Doktoranden-Kolleg entgegengebracht. Auch Carsten Miller und René Böhner haben sich Zeit für eine Diskussion meiner Ideen genommen und viele inspirierende Vorschläge entwickelt. Für den kontinuierlichen fachlichen Austausch möchte ich mich ganz herzlich bedanken.

Der empirische Teil meines Forschungsprojekts wäre ohne die Schülerinnen und Schüler, die beiden Montessori-Schulen und die involvierten Montessori-Lehrkräfte nicht möglich gewesen; allen Beteiligten danke ich von Herzen für das großartige Engagement und die tatkräftige Unterstützung meines Projekts. Mein besonderer Dank gilt Peter Noack, der sowohl die Entwicklung als auch die schulische Erprobung meiner Materialien intensiv begleitet hat und mir seit vielen Jahren mit Rat und Tat zur Seite steht.

Mein Mann René, der sich mir zuliebe als Nicht-Mathematiker bis in die tiefsten Sphären der Integralrechnung vorgekämpft hat, bereicherte mein Projekt um wertvolle Impulse aus der montessorischen Schulpraxis, löste diverse technische Probleme und bot mir vor allem in der Endspurtphase meiner Promotion einen unermesslichen Rückhalt. Auch von meiner Familie habe ich stets emotionale Unterstützung und großes Vertrauen in meine Fähigkeiten erfahren. Mein Opa Dr. Hans Diemer, dem ich meinen beruflichen Werdegang zu großen Teilen zu verdanken habe, kann die Veröffentlichung dieser Arbeit leider nicht mehr miterleben. Indem er mir die akademischen Arbeitsweisen mit unaufhörlicher Geduld und Zuwendung beigebracht hat, hat er den Grundstein zu meiner Promotion gelegt. Ihm möchte ich diese Arbeit deshalb widmen.

Alle genannten Menschen haben maßgeblich dazu beigetragen, dass ich trotz zwischenzeitlicher Durststrecken und auch nach etlichen Stunden Arbeit nach wie vor für mein Projekt brenne. Herzlichsten Dank dafür!

Annalisa Steinecke

Kulturelle und fachliche Diversität
Qualitätsoffensive
Lehrerbildung

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Das Promotionsprojekt wurde im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

Zusammenfassung

Mathematikunterricht zielt darauf ab, dass die Lernenden tragfähige *Grundvorstellungen* zu den mathematischen Begriffen entwickeln, um mit diesen verständnisvoll umgehen zu können. Im Bereich der Integralrechnung, die zu den anspruchsvollsten Themengebieten der Schulmathematik zählt, weisen empirische Studien allerdings immer wieder auf ein unzureichendes Begriffsverständnis und auf grundlegende Defizite im Zusammenhang mit dem Integralbegriff hin. Die Frage, wie Lehr-Lern-Arrangements zur Förderung von Grundvorstellungen zu den zentralen Begriffen der Analysis konkret gestaltet werden können, ist bislang noch weitgehend unerforscht.

Die vorliegende Dissertation setzt an dieser Forschungslücke an und exploriert, wie die Entwicklung vielseitiger Grundvorstellungen zum Integralbegriff im Mathematikunterricht angeregt werden kann. Auf der Grundlage eines eigenständig elaborierten theoretischen Modells wurden vier montessorische Lernmaterialien entwickelt, empirisch erprobt und evaluiert. Im vorliegenden Entwicklungsforschungsprojekt wurden somit zwei konventionell separat agierende Forschungszweige – die Mathematik-Didaktik einerseits und Montessori-Pädagogik andererseits – mit einer hohen Synthesekraft zusammengeführt.

Da aktuell nur wenige empirische Erkenntnisse bezüglich des Forschungsgegenstandes und keinerlei montessorische Lernmaterialien zur Analysis vorliegen, hat die vorliegende Dissertation sowohl in inhaltlicher als auch in forschungsmethodischer Hinsicht Neuland betreten und die Thematik mit innovativen und kreativen Herangehensweisen bearbeitet. Entstanden sind nicht nur praxistaugliche und als lernwirksam evaluierte Lernmaterialien, sondern auch empirische Einsichten in die initiierten Lern- und Vorstellungsentwicklungsprozesse von Lernenden aus der Primarstufe sowie aus der Sekundarstufe II, die im Rahmen von qualitativen Feldstudien gewonnen wurden. Der fokussierte Themenkomplex der Integralrechnung stellt dabei sowohl aus fachlicher als auch aus didaktischer Perspektive eine besondere Herausforderung dar. Insgesamt ergibt sich ein einsichtsvolles und schlüssiges Bild eines konkreten Förderkonzepts, das sich durch seine unmittelbare Übertragbarkeit in die Bildungspraxis auszeichnet. Mathematik-Didaktik und (Montessori-)Pädagogik werden durch die erarbeiteten Forschungsprodukte gleichermaßen bereichert.

Abstract

Mathematics instruction aims at evoking viable *Grundvorstellungen* in students so that they can intelligently use mathematical concepts in various contexts. In the context of integral calculus, which is one of the most sophisticated topics in school mathematics, empirical studies have repeatedly revealed an insufficient understanding and fundamental deficits, however. The question how teaching-learning-arrangements, which support the development of *Grundvorstellungen* on the definite integral, can be designed is still largely unresearched.

The presented thesis tries to close this gap in research and explores instructional possibilities of inducing multiple *Grundvorstellungen* on the integral. Based on an elaborated theoretical model, four Montessori learning materials have been developed, empirically tested and evaluated. Thus, in this development research project two branches of research which conventionally act separately are combined with a high synthesizing power: mathematics education and Montessori education.

Since there only are few empirical findings at hand and no Montessori learning materials for calculus at all, this thesis pioneers not only in its contents but also in its research methodology. The subject matter has been elaborated innovatively and creatively, resulting in applicable and effective learning concepts. Moreover, empirical insights in the initiated processes of concept formation in students are achieved; these insights have been acquired in qualitative field researches on students of the primary education and upper secondary education. The focused topic area of calculus is thereby a particular challenge in both subject-specific and didactic respects. Altogether, this thesis depicts an insightful and convincing educational concept which distinguishes itself by applicational coherence in educational practice. On the whole, the elaborated research products enhance both mathematics education and Montessori education in equal measure.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Hinweis:

Alle Abbildungen, die keinen Quellennachweis führen, sind selbst erstellte Graphiken bzw. selbst aufgenommene Fotographien.

Einleitung

Eine wesentliche Voraussetzung für das Treiben sinnhafter Mathematik ist die Ausbildung von tragfähigen *Grundvorstellungen* (vgl. z.B. Bender 1991; vom Hofe 1996; Greefrath et al. 2016a). „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt“ (Greefrath et al. 2016a, S. 17). Im Mathematikunterricht sollten die Schülerinnen und Schüler also vielfältige Grundvorstellungen entwickeln, damit sie den mathematischen Begriffen eine sinntragende Bedeutung beimessen können (vgl. Greefrath et al. 2016a, S. 16).

In den letzten Jahren gab es verstärkte Bemühungen, die individuellen Vorstellungen von Lernenden zu den zentralen Begriffen der Analysis zu ergründen (vgl. z.B. Rösken & Rölka 2007; Jones 2013; Ulm et al. 2018; Serhan 2015); die aus unterrichtspraktischer Sicht entscheidende Frage nach der konkreten Gestaltung von Lernumgebungen, die die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen fördern, ist bislang hingegen noch weitgehend unerforscht. Weigand et al. (2019) formulieren diese Forschungslücke explizit als Desiderat: „Langfristig besteht die Aufgabe darin, Unterrichtssequenzen für die Entwicklung bestimmter Grundvorstellungen zu konzipieren“ (Weigand et al. 2019, in press). Mit der vorliegenden Dissertation wird an diesem Forschungsbedarf angesetzt: Im Zentrum der Aufmerksamkeit steht die Konzeption von Lehr-Lern-Arrangements, die die Entwicklung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff anregen.

„Die Grundidee beim Aufbau von Grundvorstellungen ist, dass *konkrete* Handlungen an geeigneten Materialien zu *gedanklichen* Operationen umgebaut werden“ (Wartha & Schulz 2011, S. 11). Üblich sind Lernformen, die ein derartiges *Verinnerlichen von Handlungen* (vgl. Fricke 1959) anstreben, innerhalb der Montessori-Pädagogik. Schon zu Beginn ihres Wirkens vertrat Maria Montessori die Überzeugung, dass geistiges Wachstum an die Sinneswahrnehmung gebunden ist (vgl. Montessori 1984, S. 133). Sie bezeichnete die Hände als „Werkzeug der menschlichen Intelligenz“ (Montessori 1984, S. 24) und entwickelte spezielle Materialien, in denen die kognitiven Lerninhalte auf ihren „sensumotorischen, konkret fassbaren, be-greifbaren Gehalt“ (Hoverarth & Knauf 1992, S. 9) zurückgeführt sind. Die montessorische Materialarbeit mit gegenständlichen Lernmaterialien birgt also das Potenzial, den Aufbau von anschaulichen Grundvorstellungen anzuregen.

Montessori-pädagogische Bildungseinrichtungen haben in den letzten 25 Jahren einen deutlichen Aufschwung erfahren: Aktuell werden deutschlandweit etwa sieben Montessori-Schulen pro Jahr gegründet, davon durchschnittlich zwei in Bayern. Viele Schulneugründungen entstehen aus Elterninitiativen, die einer gewissen Unzufriedenheit mit dem öffentlichen Schulsystem entspringen. Derzeit finden sich in Deutschland über 400 Schulen, in denen Kinder und Jugendliche nach den Grundsätzen der Montessori-Pädagogik lernen. Dem originären Wirken Maria Montessoris entsprechend konstituieren Primarschulen dabei den Löwenanteil; allerdings gibt es auch über 100 weiterführende Montessori-Schulen, von denen etwa 40 Schulen gymnasiale Bildungswege anbieten. In Bayern bieten aktuell acht Montessori-Schulen die Möglichkeit eines staatlichen Abschlusses der Fachhochschulreife bzw. der fachgebundenen oder allgemeinen Hochschulreife (vgl. Montessori Landesverband Bayern).

Die zahlreichen Neugründungen von Montessori-Sekundarschulen stellen die heutige Montessori-Pädagogik allerdings auch vor neue Herausforderungen: Während Maria Montessori ein breites Angebot an Lernmaterialien für die Primarstufe und die Sekundarstufe I entwickelt hat, gibt es bislang nur wenige montessorische Lernmaterialien für die Sekundarstufe II. Für die Funktionenlehre bzw. für die Analysis stehen bislang keinerlei Montessori-Materialien zur Verfügung. Vor dem Hintergrund der Tatsache, dass geometrische Flächen seit jeher einen zentralen Stellenwert im montessorischen Materialkanon einnehmen, ist das Fehlen von Lernmaterialien zur Integralrechnung besonders bedauerlich.

Das vorliegende Forschungsprojekt widmet sich aus den dargelegten Gründen der Aufgabe, innovative montessori-pädagogische Lernmaterialien zu entwickeln, die eine vorstellungsorientierte Erarbeitung des Integralbegriffs ermöglichen. Die Montessori-Pädagogik steht derartigen Innovationen generell aufgeschlossen gegenüber, denn Montessori selbst hat ihre Pädagogik nicht als starres, unabänderliches Konzept verstanden, sondern schon zu Lebzeiten die Notwendigkeit einer kontinuierlichen Weiterentwicklung betont (vgl. Klein-Landeck 1998, S. 43). Innerhalb der heutigen Montessori-Community herrscht daher weitgehend Konsens darüber, dass sich die Montessori-Pädagogik fortentwickeln muss:

> „Eine zeitgemäße Montessori-Pädagogik darf nicht versäumen, pädagogische Entwicklungen und (fach-) didaktische Neuerungen aufzugreifen – soweit sie mit ihren pädagogischen Grundgedanken übereinstimmen. Das kann sowohl bedeuten, überholte Materialien auszurangieren oder den Umgang mit ihnen anzupassen, als auch neu entwickelte Materialien und Aufgabenformate in die Freiarbeit zu integrieren“ (Grindel 2007, S. 275).

Zusammenfassend liegt dem vorliegenden Dissertationsprojekt also ein zweifaches Forschungsinteresse zugrunde:

- Die Montessori-Pädagogik soll um konkrete Lernmaterialien zur Integralrechnung bereichert werden, die in den bestehenden Materialkanon implementiert und im regulären Schulalltag eingesetzt werden können.

- Die Mathematik-Didaktik soll um theoriebasierte und empirische Erkenntnisse hinsichtlich der Entwicklung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff bereichert werden.

Durch die Zusammenführung der beiden Forschungszweige werden Synergieeffekte angestrebt, von denen die Montessori-Pädagogik und die Mathematik-Didaktik gleichermaßen profitieren sollen.

I. Darstellung des Forschungsprojekts

Im Rahmen des Abschnitts I wird einleitend das Erkenntnisinteresse des vorliegenden Forschungsprojekts beschrieben. In Kapitel 1 werden die Forschungsfragen, die verfolgten Ziele und der gewählte Forschungsansatz dargelegt. In Kapitel 2 wird anschließend ein Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben.

1 Forschungsfragen, Forschungsziele und Forschungsansatz

Die vorliegende Dissertation widmet sich der folgenden erkenntnisleitenden Fragestellung:

Wie kann die Entwicklung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff durch den Einsatz von montessorischen Lernmaterialien im Mathematikunterricht gefördert werden?

Ausgehend von dieser Leitfrage werden acht forschungsrelevante Fragestellungen adressiert:

Forschungsrelevante Fragestellungen

1. Welche speziellen Kriterien müssen montessorische Lernmaterialien erfüllen?
2. Welche Grundvorstellungen sollten Lernende zum Integralbegriff ausbilden?
3. Wie können montessorische Lernmaterialien zur Förderung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff gestaltet werden?
4. Wie arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit den entwickelten Montessori-Materialien zur Integralrechnung?
   a) Welche individuellen Materialhandlungen vollziehen die Lernenden bei der Materialarbeit?
   b) Welche individuellen Lernprozesse erfolgen bei der Beschäftigung mit dem Montessori-Material?
   c) Welche Schwierigkeiten und Probleme treten bei der Materialarbeit auf?
   d) Welche Emotionen bringen die Lernenden der Materialarbeit entgegen?
5. Wie sind die kognitiven Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu beurteilen?
   a) Inwiefern konnten die Kompetenzerwartungen, die der jeweiligen Lerneinheit zugrunde gelegt worden waren, erfüllt werden?
   b) Inwiefern vermochte die Materialarbeit die Entwicklung individueller Grundvorstellungen zum Integralbegriff anzuregen?
6. Wie bewerten die Schülerinnen und Schüler die entwickelten Montessori-Materialien und die enaktive Materialarbeit?

7. Wie können die prototypischen Montessori-Materialien und die erprobten Lehr-Lern-Arrangements auf der Grundlage der empirischen Erkenntnisse weiterentwickelt bzw. optimiert werden?
8. Welche pädagogisch-didaktischen Handlungsempfehlungen bezüglich der Gestaltung eines grundvorstellungsorientierten Mathematikunterrichts zur Integralrechnung lassen sich aus den empirischen Erkenntnissen für die Montessori- und Regelschulpraxis ableiten?

Die ersten beiden Fragestellungen eröffnen einen theoretischen Bezugsrahmen für den Entwicklungsteil der vorliegenden Arbeit. Hinsichtlich der ersten Fragestellung gilt es die anthropologischen Grundgedanken und die spezifische Lehr- und Lernpraxis der Montessori-Pädagogik zu ergründen. Die Bearbeitung der zweiten Fragestellung erfordert eine eingehende und mehrperspektivische Auseinandersetzung mit dem mathematischen Fachgebiet der Integralrechnung, wobei der schulische Kontext berücksichtigt werden muss. Die dritte Fragestellung umfasst sodann die konkrete Konzeption von prototypischen montessorischen Lernmaterialien auf der Grundlage theoriebasierter Leitgedanken und Design-Prinzipien.

Die entwickelten Montessori-Materialien zur Integralrechnung müssen anschließend empirisch erprobt werden. Der vierte Fragekomplex fokussiert die individuelle Materialarbeit der Lernenden; im Sinne einer ganzheitlichen Betrachtung soll dabei sowohl kognitiven als auch psychomotorischen, affektiven und sozialen Aspekten des Lernens Beachtung geschenkt werden. Der fünfte Fragekomplex bezieht sich auf die Wirksamkeit der Materialarbeit bezüglich der Erfüllung der jeweiligen Kompetenzerwartungen und bezüglich des Aufbaus adäquater Grundvorstellungen zum Integralbegriff. Mit dem sechsten Fragekomplex wird das Feedback der Probandinnen und Probanden berücksichtigt.

Auf der Basis der empirischen Erkenntnisse konzentriert sich die siebte Fragestellung ferner auf die Weiterentwicklung und Optimierung der prototypischen Montessori-Materialien. Die achte Fragestellung zielt abschließend auf die Formulierung pädagogischer-didaktischer Impulse hinsichtlich der unterrichtlichen Behandlung der Integralrechnung ab, die – auch jenseits des montessori-spezifischen Kontexts – einen Beitrag zur Verbesserung der Unterrichtspraxis leisten sollen.

Die Forschungsziele der vorliegenden Arbeit lassen sich weiterhin drei verschiedenen Ebenen zuordnen: