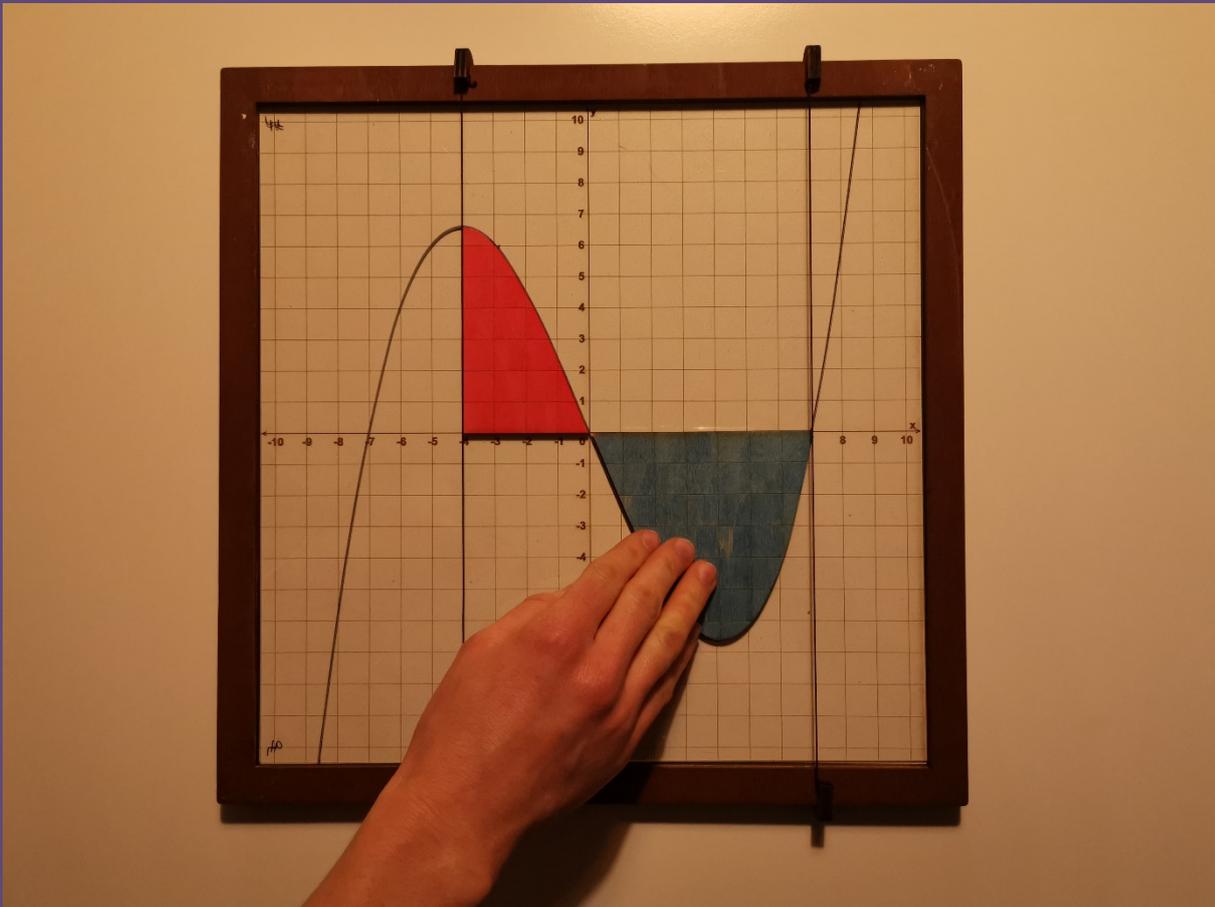


ANNALISA STEINECKE



**BEGREIFEN DER INTEGRALRECHNUNG:
KONZEPTION UND EMPIRISCHE ERPROBUNG
MONTESSORI-PÄDAGOGISCHER LERNMATERIALIEN
ZUR FÖRDERUNG
VIELFÄLTIGER GRUNDVORSTELLUNGEN
EIN ENTWICKLUNGSORIENTIERTES FORSCHUNGSPROJEKT
ZUM INTEGRALBEGRIFF**

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Diversität und Inklusion im Kontext Mathematischer Lehr-Lern-Prozesse

Herausgegeben von
Ralf Benölken, Nina Berlinger und Marcel Veber

Band 3

ANNALISA STEINECKE

**BEGREIFEN DER INTEGRALRECHNUNG:
KONZEPTION UND EMPIRISCHE ERPROBUNG
MONTESSORI-PÄDAGOGISCHER LERNMATERIALIEN
ZUR FÖRDERUNG VIELFÄLTIGER
GRUNDVORSTELLUNGEN**

**EIN ENTWICKLUNGSORIENTIERTES FORSCHUNGSPROJEKT
ZUM INTEGRALBEGRIFF**

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliogra-
fie; detaillierte Informationen sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
<http://www.winterwork.de/>

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf
ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet, ver-
vielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte
und Medien, Münster 2020 - E-Book
ISBN 978-3-95987-138-9

**Begreifen der Integralrechnung:
Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer
Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen**

Ein entwicklungsorientiertes Forschungsprojekt zum Integralbegriff

Der Universität Bayreuth zur Erlangung des Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) vorgelegte Abhandlung

von

Annalisa Steinecke

aus Rosenheim

**Für meinen Opa
Dr. Hans Diemer**

Vorwort der Herausgebenden

Die Dissertationsschrift von Annalisa Steinecke trägt den Titel *„Begreifen der Integralrechnung: Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen. Ein entwicklungsorientiertes Forschungsprojekt zum Integralbegriff“*. Damit fokussiert der vorliegende Band eine Schnittstellenbetrachtung verschiedener Aspekte, die für individualisiertes, aktiv-entdeckendes und konstruktivistisches – somit auch inklusionsorientiertes – Lernen im Mathematikunterricht von höchster Relevanz ist: Tragfähige Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten gelten in der Mathematikdidaktik als einer der, wenn nicht sogar überhaupt als *der* Schlüssel, um Lehr-Lern-Prozesse so anzulegen, dass Lernende eine fachliche Substanz wirklich verstehen und tragfähige Wissensnetzwerke aufbauen können. Eng verbunden hiermit sind Diskussionen um Anschauungsmittel, die in der jüngeren mathematikdidaktischen Forschung nicht bloß als Werkzeug des Lernens, sondern weitaus umfassender als Prozessbestandteil des Lernens im erkenntnistheoretischen Sinne aufgefasst werden. Um in dieser Weise wirken zu können, sind an die Konstruktion eines bestimmten Anschauungsmittels bzw. im Hinblick auf seine Verwendbarkeit in einem spezifischen fachlichen Kontext Fragen zu stellen wie „Ist es der mathematischen Struktur des betrachteten Inhalts angemessen?“, „Trägt es möglichst langfristig und unterstützt es den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder und damit von Grundvorstellungen?“, „Unterstützt es die Genese von Wissensnetzwerken?“ oder auch „Ist seine Haptik so angelegt, dass es z.B. tatsächlich *alle* Lernenden nutzen können, oder dass es z.B. Potenzen zum Grundvorstellungsaufbau von Lernenden mit spezifischen Bedürfnissen aufweist?“ (man denke beispielsweise an Anschauungsmittel für Lernende, deren Sehfähigkeit stark eingeschränkt ist). Im Laufe der Zeit wurden zu vielen mathematischen Inhalten für verschiedene Altersstufen zahlreiche Arbeiten vorgelegt, die aus praktischer Perspektive z.B. die Konstruktion von Anschauungsmittel zu speziellen Inhalten diskutieren oder die aus wissenschaftlicher Sicht den Ertrag eines Anschauungsmittels empirisch beleuchten.

Die vorliegende Arbeit ordnet sich in die zuletzt genannte Blickrichtung ein und nimmt hierfür einen Fokus, der im doppelten Sinne bemerkenswert ist: Zum einen stellt sich die Autorin in die Tradition von Montessori-Materialien und damit in eine Richtung, welche auch die im heutigen Mathematikunterricht verwendeten „Materialien“ auf mannigfache Weise nachhaltig beeinflusst hat. Zum anderen bietet ein Stoff der Sekundarstufe II den Anker der Darlegungen: Natürlich gibt es auch für diese Altersstufe zahlreiche Arbeiten, die sich – auch mit Blick auf das fokussierte Thema Integralrechnung – Konzepten von Grundvorstellungen u.Ä. widmen, doch bietet die Anknüpfung an einen induktiven individuellen Grundvorstellungsaufbau vor dem Hintergrund der schon wissenschaftspropädeutischen Grundausrichtung von Lehrgängen in beispielsweise der gymnasialen Oberstufe einen innovativen Zugang, der auch und gerade in Zeiten von

höchster Bedeutung ist, in denen der Umgang mit Diversität und damit die Frage nach Möglichkeiten, wie tatsächlich *alle* Lernenden individuelle Lernwege beschreiten können, in das Zentrum fachdidaktischer Überlegungen rückt.

Mag es also auf den ersten Blick überraschen, dass in der Reihe „Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse“ eine Dissertationsschrift zu montessori-pädagogischen Lernmaterialien im späten Schulalter erscheint, so ist doch gerade die Implikation einer äußerst konsequenten Individualisierung, einer Hinwendung zum Grundvorstellungsaufbau wie auch zu einem wirklich verständnisorientierten Lernen für den Fokus der Reihe produktiv: Denn es wird die „Suche nach der Nadel im fachdidaktischen Heuhaufen“ angegangen, d.h., die Suche danach, welche didaktischen Zugänge angesichts der Forderung nach unteilbarer Partizipation aller Lernenden am Unterrichtsgeschehen gefunden werden können, um wirklich allen Wege zur Erschließung von Unterrichtsinhalten zu eröffnen.

Der vorliegende Band ist zugleich der dritte in der Reihe „Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse“. Wie den oben skizzierten Ausführungen zu entnehmen ist, setzt er einen Akzent, der theoretische Konzepte, empirische Fundierungen und praktische Implikationen in eine Synthese bringt und der auf diese Weise produktiv zu einem Anspruch beiträgt, den wir im Vorwort des ersten Bandes der Reihe selbst vorgetragen haben: Die Reihe soll nicht lediglich eine Reihe über Vielfalt sein, sondern selbst ein Forum für Vielfalt bieten.

Wir freuen uns sehr, die Arbeit von Annalisa Steinecke in die Reihe aufzunehmen, danken für die konstruktive Zusammenarbeit und wünschen der Schrift viele interessierte Leser*innen verbunden mit dem Wunsch, der auch unsere Gedanken bei der Lektüre der Arbeit inspiriert hat, dass auch (oder trotz) der Herausforderungen eines diversitätsorientierten Mathematikunterrichts Individualisierungen in das Zentrum mathematikdidaktischer Bemühungen rücken, denn: Mathematik (wirklich) zu lernen bedeutet, Mathematik (wirklich) zu verstehen – und hierfür eröffnet der Zugang altbekannte und neue Brücken.

Wuppertal, Münster und Osnabrück im Februar 2020

Ralf Benölken, Nina Berlinger und Marcel Veber

Vorwort

An der Entstehung meiner Dissertationsarbeit, die aus meiner Begeisterung für die enaktiven Lernformen der Montessori-Pädagogik resultiert, haben unheimlich viele Menschen mitgewirkt. Ein besonders herzlicher Dank gilt zunächst Prof. Dr. Volker Ulm, der sich von unserem ersten Dissertationsgespräch am Brombachsee an viele Stunden Zeit für intensive Diskussionen über Grundvorstellungen zum Integralbegriff genommen und mir stets die Freiheit gelassen hat, meine eigenen Überlegungen zu verwirklichen. Gleichmaßen bedanke ich mich von Herzen bei Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal, die durch Ihre motivierenden Anregungen und Ihre konstruktive Kritik ebenfalls ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Bei der handwerklichen Fertigung der montessorischen Lernmaterialien war ich auf Fachleute angewiesen, die meine gedanklichen Entwürfe in konkrete Prototypen umsetzen konnten. Ein großes Dankeschön schulde ich Volker Stefan und Frank Neumann von den Wissenschaftlichen Werkstätten der Universität Bayreuth, Stefan Kujan von „k2ibabs“ für die Gravierung der Plexiglasscheiben und vor allem Manuela und Norbert Warmuth, die bei der technischen Anfertigung meiner Lernmaterialien mehr als einmal das Unmögliche möglich gemacht haben. Die *University of Bayreuth Graduate School* und die im Rahmen der vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten *Qualitätsoffensive Lehrerbildung* haben mein Forschungsprojekt finanziell unterstützt, wofür ich ebenfalls sehr dankbar bin.

In den letzten drei Jahren wurde mir außerdem wertvolle Unterstützung von Sarah Armbrust, Moritz Zehnder und Tom Köcher aus meinem Doktoranden-Kolleg entgegengebracht. Auch Carsten Miller und René Böhner haben sich Zeit für eine Diskussion meiner Ideen genommen und viele inspirierende Vorschläge entwickelt. Für den kontinuierlichen fachlichen Austausch möchte ich mich ganz herzlich bedanken.

Der empirische Teil meines Forschungsprojekts wäre ohne die Schülerinnen und Schüler, die beiden Montessori-Schulen und die involvierten Montessori-Lehrkräfte nicht möglich gewesen; allen Beteiligten danke ich von Herzen für das großartige Engagement und die tatkräftige Unterstützung meines Projekts. Mein besonderer Dank gilt Peter Noack, der sowohl die Entwicklung als auch die schulische Erprobung meiner Materialien intensiv begleitet hat und mir seit vielen Jahren mit Rat und Tat zur Seite steht.

Mein Mann René, der sich mir zuliebe als Nicht-Mathematiker bis in die tiefsten Sphären der Integralrechnung vorgekämpft hat, bereicherte mein Projekt um wertvolle Impulse aus der montessorischen Schulpraxis, löste diverse technische Probleme und bot mir vor allem in der Endspurtphase meiner Promotion einen unermesslichen Rückhalt. Auch von meiner Familie habe ich stets emotionale Unterstützung und großes Vertrauen in meine Fähigkeiten erfahren. Mein Opa Dr. Hans Diemer, dem ich meinen beruflichen Werdegang zu großen Teilen zu verdanken habe, kann die Veröffentlichung dieser Arbeit leider nicht mehr miterleben. Indem er mir die akademischen Arbeitsweisen mit unaufhörlicher Geduld und Zuwendung beigebracht hat, hat er den Grundstein zu meiner Promotion gelegt. Ihm möchte ich diese Arbeit deshalb widmen.

Alle genannten Menschen haben maßgeblich dazu beigetragen, dass ich trotz zwischenzeitlicher Durststrecken und auch nach etlichen Stunden Arbeit nach wie vor für mein Projekt brenne. Herzlichsten Dank dafür!

Annalisa Steinecke



Das Promotionsprojekt wurde im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

Zusammenfassung

Mathematikunterricht zielt darauf ab, dass die Lernenden tragfähige *Grundvorstellungen* zu den mathematischen Begriffen entwickeln, um mit diesen verständnisvoll umgehen zu können. Im Bereich der Integralrechnung, die zu den anspruchsvollsten Themengebieten der Schulmathematik zählt, weisen empirische Studien allerdings immer wieder auf ein unzureichendes Begriffsverständnis und auf grundlegende Defizite im Zusammenhang mit dem Integralbegriff hin. Die Frage, wie Lehr-Lern-Arrangements zur Förderung von Grundvorstellungen zu den zentralen Begriffen der Analysis konkret gestaltet werden können, ist bislang noch weitgehend unerforscht.

Die vorliegende Dissertation setzt an dieser Forschungslücke an und exploriert, wie die Entwicklung vielseitiger Grundvorstellungen zum Integralbegriff im Mathematikunterricht angeregt werden kann. Auf der Grundlage eines eigenständig elaborierten theoretischen Modells wurden vier montessorische Lernmaterialien entwickelt, empirisch erprobt und evaluiert. Im vorliegenden Entwicklungsforschungsprojekt wurden somit zwei konventionell separat agierende Forschungszweige – die Mathematik-Didaktik einerseits und Montessori-Pädagogik andererseits – mit einer hohen Synthesekraft zusammengeführt.

Da aktuell nur wenige empirische Erkenntnisse bezüglich des Forschungsgegenstandes und keinerlei montessorische Lernmaterialien zur Analysis vorliegen, hat die vorliegende Dissertation sowohl in inhaltlicher als auch in forschungsmethodischer Hinsicht Neuland betreten und die Thematik mit innovativen und kreativen Herangehensweisen bearbeitet. Entstanden sind nicht nur praxistaugliche und als lernwirksam evaluierte Lernmaterialien, sondern auch empirische Einsichten in die initiierten Lern- und Vorstellungsentwicklungsprozesse von Lernenden aus der Primarstufe sowie aus der Sekundarstufe II, die im Rahmen von qualitativen Feldstudien gewonnen wurden. Der fokussierte Themenkomplex der Integralrechnung stellt dabei sowohl aus fachlicher als auch aus didaktischer Perspektive eine besondere Herausforderung dar. Insgesamt ergibt sich ein einsichtsvolles und schlüssiges Bild eines konkreten Förderkonzepts, das sich durch seine unmittelbare Übertragbarkeit in die Bildungspraxis auszeichnet. Mathematik-Didaktik und (Montessori-)Pädagogik werden durch die erarbeiteten Forschungsprodukte gleichermaßen bereichert.

Abstract

Mathematics instruction aims at evoking viable *Grundvorstellungen* in students so that they can intelligently use mathematical concepts in various contexts. In the context of integral calculus, which is one of the most sophisticated topics in school mathematics, empirical studies have repeatedly revealed an insufficient understanding and fundamental deficits, however. The question how teaching-learning-arrangements, which support the development of *Grundvorstellungen* on the definite integral, can be designed is still largely unresearched.

The presented thesis tries to close this gap in research and explores instructional possibilities of inducing multiple *Grundvorstellungen* on the integral. Based on an elaborated theoretical model, four Montessori learning materials have been developed, empirically tested and evaluated. Thus, in this development research project two branches of research which conventionally act separately are combined with a high synthesizing power: mathematics education and Montessori education.

Since there only are few empirical findings at hand and no Montessori learning materials for calculus at all, this thesis pioneers not only in its contents but also in its research methodology. The subject matter has been elaborated innovatively and creatively, resulting in applicable and effective learning concepts. Moreover, empirical insights in the initiated processes of concept formation in students are achieved; these insights have been acquired in qualitative field researches on students of the primary education and upper secondary education. The focused topic area of calculus is thereby a particular challenge in both subject-specific and didactic respects. Altogether, this thesis depicts an insightful and convincing educational concept which distinguishes itself by applicational coherence in educational practice. On the whole, the elaborated research products enhance both mathematics education and Montessori education in equal measure.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Darstellung des Forschungsprojekts	4
1 Forschungsfragen, Forschungsziele und Forschungsansatz	4
2 Aufbau der Arbeit	10
II. Theoretischer Bezugsrahmen	13
3 Die Montessori-Pädagogik	13
3.1 Montessorische Grundgedanken	14
3.1.1 Die Personalität des Kindes	14
3.1.2 Das Phänomen der Sensiblen Perioden	15
3.1.3 Polarisierung der Aufmerksamkeit und Normalisierung	16
3.2 Montessorische Bildungspraxis	19
3.2.1 Kosmische Erziehung	19
3.2.2 Die Vorbereitete Umgebung	20
3.2.3 Die Freiarbeit	22
3.2.4 Die Rolle der Lehrkraft	24
3.2.5 Das Montessori-Material	27
4 Die Integralrechnung	34
4.1 Historische Entwicklung und fachliche Klärung der Integralrechnung	34
4.1.1 Historische Entwicklung	35
4.1.2 Fachliche Klärung	39
4.2 Schulmathematische Behandlung der Integralrechnung	45
4.2.1 Historische Entwicklung curricularer Richtlinien zur Integralrechnung ...	45
4.2.2 Propädeutik der Integralrechnung in der Sekundarstufe I	47
4.2.3 Integralrechnung in der Sekundarstufe II	49
4.3 Grundvorstellungen zum Integralbegriff	50
4.3.1 Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen	50
4.3.1.1 Normative und Individuelle Grundvorstellungen	53
4.3.1.2 Primäre und Sekundäre Grundvorstellungen	55
4.3.1.3 Globale und Partielle Grundvorstellungen	56

4.3.2	Normative Grundvorstellungen zum Integralbegriff	57
4.3.2.1	Das Modell von Greefrath et al. (2016)	57
4.3.2.2	Diskussion des Modells von Greefrath et al. (2016).....	65
4.3.2.3	Elaboration des Modells von Greefrath et al. (2016).....	70
4.3.3	Individuelle Grundvorstellungen von Lernenden zum Integralbegriff.....	76
4.3.3.1	Erkenntnisse bezüglich der Flächeninhaltsgrundvorstellung	78
4.3.3.2	Erkenntnisse bezüglich der (Re-)Konstruktions-grundvorstellung.....	85
4.3.3.3	Erkenntnisse bezüglich der Kumulationsgrundvorstellung.....	87
4.3.3.4	Erkenntnisse bezüglich der Mittelwertsgrundvorstellung.....	89
4.3.3.5	Erkenntnisse bezüglich der Stammfunktionsgrundvorstellung.....	90
4.3.3.6	Zusammenfassung typischer Lernphänomene	91
5	Implikationen für das Forschungsprojekt.....	93
5.1	Formulierung von normativen Leitsätzen.....	93
5.2	Formulierung von Design-Prinzipien	95

III. Entwicklung montessorischer Lernmaterialien

zur Integralrechnung.....99

6	Montessori-Material zur Integralrechnung für die Primarstufe	100
6.1	Die Gelben Flächen	101
6.1.1	Beschreibung des Lernmaterials	101
6.1.2	Beschreibung der Materialarbeit	103
6.1.3	Potenziale und Grenzen des Lernmaterials.....	106
6.2	Die Metallenen Einsatzrahmen.....	107
6.2.1	Beschreibung des Lernmaterials	107
6.2.2	Verwendung des Lernmaterials	109
6.2.3	Potenziale und Grenzen des Lernmaterials.....	112
7	Montessori-Material zur Integralrechnung für die Sekundarstufe	114
7.1	Das Rekonstruktionsmaterial.....	116
7.1.1	Beschreibung des Lernmaterials	116
7.1.2	Verwendung des Lernmaterials	118
7.1.3	Potenziale und Grenzen des Lernmaterials.....	125
7.2	Die Roten und Blauen Flächen	126
7.2.1	Beschreibung des Lernmaterials	127
7.2.2	Verwendung des Lernmaterials	129

7.2.3	Potenziale und Grenzen des Lernmaterials	137
8	Resümee und Zwischenfazit	140

IV. Empirische Erprobung der entwickelten

Lernmaterialien145

9	Methodologische Grundlagen der empirischen Untersuchung.....	146
9.1	Das Qualitative Forschungsparadigma.....	147
9.2	Qualitative Schul- und Unterrichtsforschung.....	148
9.3	Gütekriterien für qualitative Forschung	149
10	Methodische Anlage der empirischen Untersuchung	151
10.1	Summarische Darstellung der Untersuchung	151
10.2	Untersuchungsdesign	152
10.3	Ziele und Untersuchungsfragen	154
10.4	Die Doppelfunktion aus Forschen und Lehren	155
10.5	Datenerhebungsmethoden	156
10.5.1	Teilnehmende Beobachtungen.....	158
10.5.2	Mündliche Befragungen	159
10.5.3	Schriftliche Befragungen	161
11	Beschreibung der Teilstudien	163
11.1	Die Teiluntersuchung in der montessorischen Primarstufe.....	163
11.1.1	Das Pädagogische Experiment zur Erprobung der Gelben Flächen	165
11.1.1.1	Lerninhalte und Kompetenzerwartungen.....	166
11.1.1.2	Datenerhebung	166
11.1.2	Die Erprobung der Metallenen Einsatzrahmen.....	169
11.1.2.1	Lerninhalte und Kompetenzerwartungen.....	170
11.1.2.2	Datenerhebung	170
11.2	Die Teiluntersuchung in der montessorischen Sekundarstufe II.....	172
11.2.1	Die Erprobung des Rekonstruktionsmaterials	174
11.2.1.1	Lerninhalte und Kompetenzerwartungen.....	175
11.2.1.2	Datenerhebung	175
11.2.2	Die Erprobung der Roten und Blauen Flächen.....	180
11.2.2.1	Lerninhalte und Kompetenzerwartungen.....	180
11.2.2.2	Datenerhebung	180

V. Analyse und Auswertung der empirischen Daten.....185

12	Methodisches Vorgehen.....	186
12.1	Datenaufbereitung.....	186
12.2	Auswahl der Fokusprobandinnen und -probanden	187
12.3	Datenanalyse und -auswertung	188
13	Fallanalysen zur Teilstudie in der montessorischen Primarstufe	192
13.1	Charakterisierung der Fokusprobandinnen und -probanden.....	192
13.1.1	Aurelie	192
13.1.2	Bianca.....	193
13.1.3	Christoph	193
13.2	Fallanalysen zur Erprobung der Gelben Flächen.....	194
13.2.1	Fallbeispiel Aurelie	194
13.2.1.1	Individuelle Materialarbeit von Aurelie	194
13.2.1.2	Individuelle Lernergebnisse von Aurelie	196
13.2.1.3	Individuelle Rückmeldungen von Aurelie	196
13.2.1.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels	196
13.2.2	Fallbeispiel Bianca	197
13.2.2.1	Individuelle Materialarbeit von Bianca	197
13.2.2.2	Individuelle Lernergebnisse von Bianca	200
13.2.2.3	Individuelle Rückmeldungen von Bianca	203
13.2.2.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels	203
13.2.3	Fallbeispiel Christoph	204
13.2.3.1	Individuelle Materialarbeit von Christoph	204
13.2.3.2	Individuelle Lernergebnisse von Christoph	207
13.2.3.3	Individuelle Rückmeldungen von Christoph.....	209
13.2.3.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels	209
13.3	Fallanalysen zur Erprobung der Metallenen Einsatzrahmen	210
13.3.1	Fallbeispiel Aurelie	210
13.3.1.1	Individuelle Materialarbeit von Aurelie	210
13.3.1.2	Individuelle Lernergebnisse von Aurelie	213
13.3.1.3	Individuelle Rückmeldungen von Aurelie	215
13.3.1.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels	215
13.3.2	Fallbeispiel Bianca	216
13.3.2.1	Individuelle Materialarbeit von Bianca	216

13.3.2.2	Individuelle Lernergebnisse von Bianca.....	218
13.3.2.3	Individuelle Rückmeldungen von Bianca.....	221
13.3.2.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels.....	222
13.3.3	Fallbeispiel Christoph.....	223
13.3.3.1	Individuelle Materialarbeit von Christoph.....	223
13.3.3.2	Individuelle Lernergebnisse von Christoph.....	224
13.3.3.3	Individuelle Rückmeldungen von Christoph.....	227
13.3.3.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels.....	227
14	Fallanalysen zur Teilstudie in der montessorischen Sekundarstufe II.....	228
14.1	Charakterisierung der Fokusprobandinnen und -probanden.....	228
14.1.1	Daria.....	228
14.1.2	Eric.....	229
14.1.3	Faith.....	229
14.2	Fallanalysen zur Erprobung des Rekonstruktionsmaterials.....	230
14.2.1	Fallbeispiel Daria.....	230
14.2.1.1	Individuelle Materialarbeit von Daria.....	230
14.2.1.2	Individuelle Lernergebnisse von Daria.....	234
14.2.1.3	Individuelle Rückmeldungen von Daria.....	238
14.2.1.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels.....	239
14.2.2	Fallbeispiel Eric.....	240
14.2.2.1	Individuelle Materialarbeit von Eric.....	240
14.2.2.2	Individuelle Lernergebnisse von Eric.....	244
14.2.2.3	Individuelle Rückmeldungen von Eric.....	247
14.2.2.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels.....	248
14.2.3	Fallbeispiel Faith.....	249
14.2.3.1	Individuelle Materialarbeit von Faith.....	249
14.2.3.2	Individuelle Lernergebnisse von Faith.....	253
14.2.3.3	Individuelle Rückmeldungen von Faith.....	257
14.2.3.4	Zusammenfassung des Fallbeispiels.....	258
14.3	Fallanalysen zur Erprobung der Roten und Blauen Flächen.....	259
14.3.1	Fallbeispiel Daria.....	259
14.3.1.1	Individuelle Materialarbeit von Daria.....	259
14.3.1.2	Individuelle Lernergebnisse von Daria.....	262
14.3.1.3	Individuelle Rückmeldungen von Daria.....	265

14.3.1.4 Zusammenfassung des Fallbeispiels	266
14.3.2 Fallbeispiel Eric.....	267
14.3.2.1 Individuelle Materialarbeit von Eric	267
14.3.2.2 Individuelle Lernergebnisse von Eric	270
14.3.2.3 Individuelle Rückmeldungen von Eric.....	274
14.3.2.4 Zusammenfassung des Fallbeispiels	275
14.3.3 Fallbeispiel Faith.....	275
14.3.3.1 Individuelle Materialarbeit von Faith.....	275
14.3.3.2 Individuelle Lernergebnisse von Faith.....	278
14.3.3.3 Individuelle Rückmeldungen von Faith	281
14.3.3.4 Zusammenfassung des Fallbeispiels	282
15 Fallübergreifende Analysen zu den Pädagogischen Experimenten	284
15.1 Materialspezifische Auswertung	284
15.1.1 Die Gelben Flächen.....	285
15.1.2 Die Metallenen Einsatzrahmen	285
15.1.3 Das Rekonstruktionsmaterial	286
15.1.4 Die Roten und Blauen Flächen.....	287
15.2 Lernerorientierte Analyse	289
15.2.1 Materialarbeit der Untersuchungsteilnehmenden.....	289
15.2.2 Lernergebnisse der Untersuchungsteilnehmenden.....	291
15.2.3 Rückmeldungen der Untersuchungsteilnehmenden	293

VI. Ergebnisse und Implikationen

der empirischen Untersuchung296

16 Ergebnisse der empirischen Untersuchung.....	296
16.1 Identifikation von Stärken und Schwächen der entwickelten montessorischen Lernmaterialien zur Integralrechnung	297
16.1.1 Evaluation der Gelben Flächen	297
16.1.2 Evaluation der Metallenen Einsatzrahmen.....	298
16.1.3 Evaluation des Rekonstruktionsmaterials	298
16.1.4 Evaluation der Roten und Blauen Flächen.....	299
16.1.5 Evaluation des Materialkanons	299
16.2 Identifikation von Möglichkeiten und Grenzen der montessorischen Materialarbeit im Bereich der Integralrechnung.....	300

16.2.1 Kognitiver Lernbereich.....	300
16.2.2 Psychomotorischer Lernbereich	301
16.2.3 Sozialer Lernbereich	302
16.2.4 Affektiver Lernbereich	303
16.2.5 Zusammenfassende Thesen	304
16.3 Forschungsmethodische Reflexion der empirischen Ergebnisse	305
17 Implikationen der empirischen Untersuchung.....	310
17.1 Weiterentwicklung des montessorischen Materialkanons	
zur Integralrechnung	310
17.1.1 Die Gelben Flächen	311
17.1.2 Die Metallenen Einsatzrahmen.....	311
17.1.3 Das Rekonstruktionsmaterial.....	312
17.1.4 Die Roten und Blauen Flächen	314
17.1.5 Das Schachbrett zum Ableiten und Integrieren	315
17.2 Pädagogisch-didaktische Impulse für einen	
vorstellungs-orientierten Mathematikunterricht zur Integralrechnung	
an Montessori- und Regelschulen	318
VII. Resultate des Forschungsprojekts	322
18 Zusammenfassung der Forschungsprodukte.....	322
19 Reflexion der Forschungsprodukte und Forschungsdesiderata	323
Schlussbetrachtung	326
Literaturverzeichnis.....	328
Eigene Publikationen	341
Eidesstattliche Erklärung	342

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Design-Based Research-Modell nach McKenney und Reeves	9
Abbildung 2: Schematische Übersicht zum Aufbau der Arbeit	12
Abbildung 3: Typischer Klassenraum einer Montessori-Schule.....	20
Abbildung 4: Montessorische Darbietung auf dem Teppich	31
Abbildung 5: Approximation der Kreisfläche.....	35
Abbildung 6: Die Archimedische Spirale	36
Abbildung 7: Approximation des Parabelsegments	37
Abbildung 8: Methoden zur Flächeninhaltsapproximation.....	38
Abbildung 9: Obersumme und Untersumme	41
Abbildung 10: Anschauliche Überlegung zum Ersten Hauptsatz	43
Abbildung 11: Abschätzung der Integralfunktion.....	44
Abbildung 12: Funktionstypen der Schulmathematik.....	48
Abbildung 13: Fläche zwischen Funktionsgraphen	49
Abbildung 14: Rotationskörper	49
Abbildung 15: Aspekte und Grundvorstellungen.....	51
Abbildung 16: Vierphasenmodell zum Aufbau von Grundvorstellungen	52
Abbildung 17: Aspekte, Grundvorstellungen, Concept Definitions und Concept Images	54
Abbildung 18: Die Bedeutung des Concept Image beim Problemlösen	55
Abbildung 19: Strukturierung des Integralbegriffs nach Greefrath et al. (2016).....	57
Abbildung 20: Flächenberechnung mit dem Integral.....	60
Abbildung 21: Beispiel zur Mittelwertsgrundvorstellung.....	63
Abbildung 22: Das bestimmte Integral als Streckenlänge	69
Abbildung 23: Elaboration des Modells von Greefrath et al. (2016).....	70
Abbildung 24: Die Flächeninhaltsgrundvorstellung	71
Abbildung 25: Die (Re-)Konstruktionsgrundvorstellung	72
Abbildung 26: Die Mittelwertsgrundvorstellung (1)	73
Abbildung 27: Die Mittelwertsgrundvorstellung (2)	74
Abbildung 28: Die Kumulationsgrundvorstellung.....	75
Abbildung 29: Stammfunktionsgrundvorstellung zum bestimmten Integral	75
Abbildung 30: Testinstrument zur Überprüfung von Grundvorstellungen	78
Abbildung 31: Grundvorstellungen von Studierenden bzgl. des Integrals	79
Abbildung 32: Bearbeitung von Helen.....	81

Abbildung 33: Concept definitions zum bestimmten Integral	82
Abbildung 34: Prototypische Concept Images zum bestimmten Integral	83
Abbildung 35: Balanceakt bei der Materialentwicklung	95
Abbildung 36: Vorgehen bei der Materialentwicklung	99
Abbildung 37: Montessorische Dreiecke zur Flächenberechnung	101
Abbildung 38: Großes Rechteck der Gelben Flächen	102
Abbildung 39: Referenz-Rechtecke der Gelben Flächen	102
Abbildung 40: Krummlinige Trapeze der Gelben Flächen	102
Abbildung 41: Zerlegte Hilfsfiguren der Gelben Flächen	103
Abbildung 42: Zerlegung und Ergänzung der Gelben Flächen	104
Abbildung 43: Parkettierung der Gelben Flächen	105
Abbildung 44: Anbahnung der Mittelwertsgrundvorstellung	106
Abbildung 45: Montessorische Bruchkreise	107
Abbildung 46: Die Metallenen Einsatzrahmen	108
Abbildung 47: Exhaustion des Parabelsegments	110
Abbildung 48: Die Trapezformel von Gauß	111
Abbildung 49: Kompression der Parabelfläche	113
Abbildung 50: Koordinatenrahmen (exemplarisch)	114
Abbildung 51: Koordinatensystem Typ 1, Typ 2 und Typ 3	115
Abbildung 52: Plexiglasscheibe mit Funktionsgraph (exemplarisch)	115
Abbildung 53: Begrenzer am Koordinatenrahmen (exemplarisch)	116
Abbildung 54: Rote und Blaue Flächenplättchen	117
Abbildung 55: Rote und Blaue Streckenstäbe des Rekonstruktionsmaterials	117
Abbildung 56: Platzierung der Koordinatenrahmen	119
Abbildung 57: Materialarbeit mit dem Rekonstruktionsmaterial – Teil 1	120
Abbildung 58: Materialarbeit mit dem Rekonstruktionsmaterial – Teil 2	121
Abbildung 59: Materialarbeit mit dem Rekonstruktionsmaterial - Teil 3	121
Abbildung 60: Generierter Bestandsgraph	122
Abbildung 61: Rekonstruktion des Bestandes	123
Abbildung 62: Rekonstruktion der Gesamtänderung	124
Abbildung 63: Plexiglasscheiben zu den Roten und Blauen Flächen	127
Abbildung 64: Darstellung der Integralgrenzen (exemplarisch)	127
Abbildung 66: Vorder- und Rückseite der Flächenstücke (exemplarisch)	128
Abbildung 66: Materialarbeit mit den Roten und Blauen Flächen – Teil 1	130

Abbildung 67: Flächenberechnung mit den Roten und Blauen Flächen.....	131
Abbildung 68: Bestimmung der Integralgrenzen mit den Roten und Blauen Flächen .	133
Abbildung 69: Veranschaulichung der Integrationsregeln 1.....	134
Abbildung 70: Veranschaulichung der Integrationsregeln 2.....	135
Abbildung 71: Ermittlung von Flächen zwischen zwei Graphen	136
Abbildung 72: Grundvorstellungen im entwickelten Materialkanon.....	142
Abbildung 73: Aufbau der empirischen Untersuchung.....	151
Abbildung 74: Gelbe Flächen des pädagogischen Experiments	165
Abbildung 75: Metallene Einsatzrahmen des Pädagogischen Experiments	169
Abbildung 76: Drei Exhaustionen des Pädagogischen Experiments	169
Abbildung 78: Vorgehen bei der Analyse der Datensätze	189
Abbildung 78: Fallanalysen zur Teilstudie in der montessorischen Primarstufe.....	192
Abbildung 79: Aurelie bestimmt den Flächeninhalt des Rechtecks	195
Abbildung 80: Aurelie verdoppelt die krummlinigen Trapeze	195
Abbildung 81: Bianca legt die Gelben Flächen aufeinander.....	198
Abbildung 82: Bianca führt die Zerlegungen durch.....	199
Abbildung 83: Bianca zerlegt das krummlinige Trapez.....	199
Abbildung 84: Bianca verdoppelt das krummlinige Trapez	200
Abbildung 85: Bianca entwickelt die Mittelwertsgrundvorstellung	201
Abbildung 86: Bianca ermittelt den Mittelwert	202
Abbildung 87: Christoph zerlegt das krummlinige Trapez	205
Abbildung 88: Christoph führt die horizontale Zerlegung durch.....	205
Abbildung 89: Christoph legt die Flächen aufeinander	206
Abbildung 90: Christoph beschreibt die Zerlegung der Fläche	206
Abbildung 91: Christoph zerlegt das krummlinige Trapez	207
Abbildung 92: Christoph zerschneidet das krummlinige Trapez.....	208
Abbildung 93: Aurelie arbeitet mit den Metallenen Einsatzrahmen.....	211
Abbildung 94: Aurelie vergleicht die Exhaustionen	212
Abbildung 95: Aurelie approximiert das Flächenstück.....	213
Abbildung 96: Exhaustionen von Aurelie und Georg.....	214
Abbildung 97: Bianca vergleicht die Exhaustionen miteinander.....	217
Abbildung 98: Bianca entwickelt eine weitere Exhaustionsstrategie	218
Abbildung 99: Biancas Exhaustion des Flächenstücks	219
Abbildung 100: Exhaustionen von Bianca und Hannah	219

Abbildung 101: Christoph arbeitet mit den Metallenen Einsatzrahmen.....	223
Abbildung 102: Christophs Exhaustion des Flächenstücks	225
Abbildung 103: Approximationen von Christoph und Julia.....	225
Abbildung 104: Fallanalysen zur Teilstudie in der montessorischen Sekundarstufe II	228
Abbildung 105: Daria arbeitet mit dem Rekonstruktionsmaterial	231
Abbildung 106: Darias korrekter Bestandsgraph.....	232
Abbildung 107: Daria ermittelt den Bestand	233
Abbildung 108: Daria ermittelt die Gesamtänderung.....	233
Abbildung 109: Daria ermittelt den Zeitpunkt	234
Abbildung 110: Daria übernimmt das Farbkonzept	236
Abbildung 111: Daria ermittelt die Gesamtänderung.....	237
Abbildung 112: Erics korrekter Bestandsgraph.....	242
Abbildung 113: Eric demonstriert eine eigene Strategie	243
Abbildung 114: Eric ermittelt die Gesamtänderung	246
Abbildung 115: Faith arbeitet mit dem Rekonstruktionsmaterial	250
Abbildung 116: Faiths korrekter Bestandsgraph	251
Abbildung 117: Faith illustriert die Gesamtänderung	253
Abbildung 118: Faith bildet Produktsummen.....	255
Abbildung 119: Faith ermittelt die Gesamtänderung	256
Abbildung 120: Materialarbeit mit den Roten und Blauen Flächen.....	259
Abbildung 121: Darias Bearbeitung der Teilaufgabe 1b).....	260
Abbildung 122: Darias Darstellung der Teilaufgabe 2d).....	261
Abbildung 123: Darias Graph.....	263
Abbildung 124: Darias Bearbeitung der Aufgabe 3	264
Abbildung 125: Erics Bearbeitung der Teilaufgabe 1a)	268
Abbildung 126: Erics Bearbeitung der Teilaufgabe 1c)	269
Abbildung 127: Erics Darstellung der Teilaufgabe 2d).....	270
Abbildung 128: Erics Graph.....	272
Abbildung 129: Faiths Graph	279
Abbildung 130: Faiths Bearbeitung der Aufgabe 3	279
Abbildung 131: Weitentwicklung der Gelben Flächen (exemplarisch)	311
Abbildung 132: Weiterentwicklung der Metallenen Einsatzrahmen (exemplarisch)...	312
Abbildung 133: Weiterentwicklung der Flächenplättchen	313
Abbildung 134: Weiterentwicklung der Streckenstäbe	313

Abbildung 135: Schachbrett zum Ableiten und Integrieren.....	316
Abbildung 136: Darstellung von Funktionstermen im Schachbrett.....	316
Abbildung 137: Exemplarisches Ableiten und Integrieren mit dem Schachbrett.....	317

Hinweis:

Alle Abbildungen, die keinen Quellennachweis führen, sind selbst erstellte Graphiken bzw. selbst aufgenommene Photographien.

Einleitung

Eine wesentliche Voraussetzung für das Treiben sinnhafter Mathematik ist die Ausbildung von tragfähigen *Grundvorstellungen* (vgl. z.B. Bender 1991; vom Hofe 1996; Greefrath et al. 2016a). „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt“ (Greefrath et al. 2016a, S. 17). Im Mathematikunterricht sollten die Schülerinnen und Schüler also vielfältige Grundvorstellungen entwickeln, damit sie den mathematischen Begriffen eine sinntragende Bedeutung beimessen können (vgl. Greefrath et al. 2016a, S. 16).

In den letzten Jahren gab es verstärkte Bemühungen, die individuellen Vorstellungen von Lernenden zu den zentralen Begriffen der Analysis zu ergründen (vgl. z.B. Rösken & Rölka 2007; Jones 2013; Ulm et al. 2018; Serhan 2015); die aus unterrichtspraktischer Sicht entscheidende Frage nach der konkreten Gestaltung von Lernumgebungen, die die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen fördern, ist bislang hingegen noch weitgehend unerforscht. Weigand et al. (2019) formulieren diese Forschungslücke explizit als Desiderat: „Langfristig besteht die Aufgabe darin, Unterrichtssequenzen für die Entwicklung bestimmter Grundvorstellungen zu konzipieren“ (Weigand et al. 2019, in press). Mit der vorliegenden Dissertation wird an diesem Forschungsbedarf angesetzt: Im Zentrum der Aufmerksamkeit steht die Konzeption von Lehr-Lern-Arrangements, die die Entwicklung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff anregen.

„Die Grundidee beim Aufbau von Grundvorstellungen ist, dass *konkrete* Handlungen an geeigneten Materialien zu *gedanklichen* Operationen umgebaut werden“ (Wartha & Schulz 2011, S. 11). Üblich sind Lernformen, die ein derartiges *Verinnerlichen von Handlungen* (vgl. Fricke 1959) anstreben, innerhalb der Montessori-Pädagogik. Schon zu Beginn ihres Wirkens vertrat Maria Montessori die Überzeugung, dass geistiges Wachstum an die Sinneswahrnehmung gebunden ist (vgl. Montessori 1984, S. 133). Sie bezeichnete die Hände als „Werkzeug der menschlichen Intelligenz“ (Montessori 1984, S. 24) und entwickelte spezielle Materialien, in denen die kognitiven Lerninhalte auf ihren „sensumotorischen, konkret fassbaren, be-greifbaren Gehalt“ (Hoverarth & Knauf 1992, S. 9) zurückgeführt sind. Die montessorische Materialarbeit mit gegenständlichen Lernmaterialien birgt also das Potenzial, den Aufbau von anschaulichen Grundvorstellungen anzuregen.

Montessori-pädagogische Bildungseinrichtungen haben in den letzten 25 Jahren einen deutlichen Aufschwung erfahren: Aktuell werden deutschlandweit etwa sieben Montessori-Schulen pro Jahr gegründet, davon durchschnittlich zwei in Bayern. Viele Schulneugründungen entstehen aus Elterninitiativen, die einer gewissen Unzufriedenheit mit dem öffentlichen Schulsystem entspringen. Derzeit finden sich in Deutschland über 400 Schulen, in denen Kinder und Jugendliche nach den Grundsätzen der Montessori-Pädagogik lernen. Dem originären Wirken Maria Montessoris entsprechend konstituieren Primarschulen dabei den Löwenanteil; allerdings gibt es auch über 100 weiterführende Montessori-Schulen, von denen etwa 40 Schulen gymnasiale Bildungswege anbieten. In Bayern bieten aktuell acht Montessori-Schulen die Möglichkeit eines staatlichen Abschlusses der Fachhochschulreife bzw. der fachgebundenen oder allgemeinen Hochschulreife (vgl. Montessori Landesverband Bayern).

Die zahlreichen Neugründungen von Montessori-Sekundarschulen stellen die heutige Montessori-Pädagogik allerdings auch vor neue Herausforderungen: Während Maria Montessori ein breites Angebot an Lernmaterialien für die Primarstufe und die Sekundarstufe I entwickelt hat, gibt es bislang nur wenige montessorische Lernmaterialien für die Sekundarstufe II. Für die Funktionenlehre bzw. für die Analysis stehen bislang keinerlei Montessori-Materialien zur Verfügung. Vor dem Hintergrund der Tatsache, dass geometrische Flächen seit jeher einen zentralen Stellenwert im montessorischen Materialkanon einnehmen, ist das Fehlen von Lernmaterialien zur Integralrechnung besonders bedauerlich.

Das vorliegende Forschungsprojekt widmet sich aus den dargelegten Gründen der Aufgabe, innovative montessori-pädagogische Lernmaterialien zu entwickeln, die eine vorstellungsorientierte Erarbeitung des Integralbegriffs ermöglichen. Die Montessori-Pädagogik steht derartigen Innovationen generell aufgeschlossen gegenüber, denn Montessori selbst hat ihre Pädagogik nicht als starres, unabänderliches Konzept verstanden, sondern schon zu Lebzeiten die Notwendigkeit einer kontinuierlichen Weiterentwicklung betont (vgl. Klein-Landeck 1998, S. 43). Innerhalb der heutigen Montessori-Community herrscht daher weitgehend Konsens darüber, dass sich die Montessori-Pädagogik fortentwickeln muss:

„Eine zeitgemäße Montessori-Pädagogik darf nicht versäumen, pädagogische Entwicklungen und (fach-) didaktische Neuerungen aufzugreifen – soweit sie mit ihren pädagogischen Grundgedanken übereinstimmen. Das kann sowohl bedeuten, überholte Materialien auszurangieren oder den Umgang mit ihnen anzupassen, als auch neu entwickelte Materialien und Aufgabenformate in die Freiarbeit zu integrieren“ (Grindel 2007, S. 275).

Zusammenfassend liegt dem vorliegenden Dissertationsprojekt also ein zweifaches Forschungsinteresse zugrunde:

- Die Montessori-Pädagogik soll um konkrete Lernmaterialien zur Integralrechnung bereichert werden, die in den bestehenden Materialkanon implementiert und im regulären Schulalltag eingesetzt werden können.
- Die Mathematik-Didaktik soll um theoriebasierte und empirische Erkenntnisse hinsichtlich der Entwicklung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff bereichert werden.

Durch die Zusammenführung der beiden Forschungszweige werden Synergieeffekte angestrebt, von denen die Montessori-Pädagogik und die Mathematik-Didaktik gleichermaßen profitieren sollen.

I. Darstellung des Forschungsprojekts

Im Rahmen des Abschnitts I wird einleitend das Erkenntnisinteresse des vorliegenden Forschungsprojekts beschrieben. In Kapitel 1 werden die Forschungsfragen, die verfolgten Ziele und der gewählte Forschungsansatz dargelegt. In Kapitel 2 wird anschließend ein Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben.

1 Forschungsfragen, Forschungsziele und Forschungsansatz

Die vorliegende Dissertation widmet sich der folgenden erkenntnisleitenden Fragestellung:

Wie kann die Entwicklung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff durch den Einsatz von montessorischen Lernmaterialien im Mathematikunterricht gefördert werden?

Ausgehend von dieser Leitfrage werden acht forschungsrelevante Fragestellungen adressiert:

Forschungsrelevante Fragestellungen

1. Welche speziellen Kriterien müssen montessorische Lernmaterialien erfüllen?
2. Welche Grundvorstellungen sollten Lernende zum Integralbegriff ausbilden?
3. Wie können montessorische Lernmaterialien zur Förderung von Grundvorstellungen zum Integralbegriff gestaltet werden?
4. Wie arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit den entwickelten Montessori-Materialien zur Integralrechnung?
 - a) Welche individuellen Materialhandlungen vollziehen die Lernenden bei der Materialarbeit?
 - b) Welche individuellen Lernprozesse erfolgen bei der Beschäftigung mit dem Montessori-Material?
 - c) Welche Schwierigkeiten und Probleme treten bei der Materialarbeit auf?
 - d) Welche Emotionen bringen die Lernenden der Materialarbeit entgegen?
5. Wie sind die kognitiven Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu beurteilen?
 - a) Inwiefern konnten die Kompetenzerwartungen, die der jeweiligen Lerneinheit zugrunde gelegt worden waren, erfüllt werden?
 - b) Inwiefern vermochte die Materialarbeit die Entwicklung individueller Grundvorstellungen zum Integralbegriff anzuregen?
6. Wie bewerten die Schülerinnen und Schüler die entwickelten Montessori-Materialien und die enaktive Materialarbeit?

7. Wie können die prototypischen Montessori-Materialien und die erprobten Lehr-Lern-Arrangements auf der Grundlage der empirischen Erkenntnisse weiterentwickelt bzw. optimiert werden?
8. Welche pädagogisch-didaktischen Handlungsempfehlungen bezüglich der Gestaltung eines grundvorstellungsorientierten Mathematikunterrichts zur Integralrechnung lassen sich aus den empirischen Erkenntnissen für die Montessori- und Regelschulpraxis ableiten?

Die ersten beiden Fragestellungen eröffnen einen theoretischen Bezugsrahmen für den Entwicklungsteil der vorliegenden Arbeit. Hinsichtlich der ersten Fragestellung gilt es die anthropologischen Grundgedanken und die spezifische Lehr- und Lernpraxis der Montessori-Pädagogik zu ergründen. Die Bearbeitung der zweiten Fragestellung erfordert eine eingehende und mehrperspektivische Auseinandersetzung mit dem mathematischen Fachgebiet der Integralrechnung, wobei der schulische Kontext berücksichtigt werden muss. Die dritte Fragestellung umfasst sodann die konkrete Konzeption von prototypischen montessorischen Lernmaterialien auf der Grundlage theoriebasierter Leitgedanken und Design-Prinzipien.

Die entwickelten Montessori-Materialien zur Integralrechnung müssen anschließend empirisch erprobt werden. Der vierte Fragekomplex fokussiert die individuelle Materialarbeit der Lernenden; im Sinne einer ganzheitlichen Betrachtung soll dabei sowohl kognitiven als auch psychomotorischen, affektiven und sozialen Aspekten des Lernens Beachtung geschenkt werden. Der fünfte Fragekomplex bezieht sich auf die Wirksamkeit der Materialarbeit bezüglich der Erfüllung der jeweiligen Kompetenzerwartungen und bezüglich des Aufbaus adäquater Grundvorstellungen zum Integralbegriff. Mit dem sechsten Fragekomplex wird das Feedback der Probandinnen und Probanden berücksichtigt.

Auf der Basis der empirischen Erkenntnisse konzentriert sich die siebte Fragestellung ferner auf die Weiterentwicklung und Optimierung der prototypischen Montessori-Materialien. Die achte Fragestellung zielt abschließend auf die Formulierung pädagogischer-didaktischer Impulse hinsichtlich der unterrichtlichen Behandlung der Integralrechnung ab, die – auch jenseits des montessori-spezifischen Kontexts – einen Beitrag zur Verbesserung der Unterrichtspraxis leisten sollen.

Die Forschungsziele der vorliegenden Arbeit lassen sich weiterhin drei verschiedenen Ebenen zuordnen: