

Bruno de Finetti (Ed.)

Mathematical Optimisation in Economics

38

L'Aquila, Italy 1965



Bruno de Finetti (Ed.)

Mathematical Optimisation in Economics

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in L'Aquila, Italy,
August 29-September 7, 1965

 Springer



FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11038-2 e-ISBN: 978-3-642-11039-9
DOI:10.1007/978-3-642-11039-9
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1966
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

3 ciclo - L'Aquila 30 agosto - 7 settembre 1965

"METHODS OF MATHEMATICAL OPTIMIZATION
IN ECONOMICS"

Coordinatore : Bruno de Finetti

B. de FINETTI	: Premessa	pag. I
G. TH. GUILBAUD	: Les equilibres dans les modeles economiques	pag. 1
H. W. KUHN	: Locational problems and mathema- tical programming	pag. 57
M. MORISHIMA	: The multi-sectoral theory of econo- mic growth	pag. 79
B. MARTOS-J. KORNAI	: Experiments in Hungary with industry-wide and economy wide programming	pag. 165
A. PREKOPA	: Probability distribution problems concerning stochastic programming problems	pag. 195
R. FRISCH	: General principles and mathemati- cal techniques of macroeconomic programming. <u>It is hoped that a digest of the lectures 3-8 will be published later .</u>	pag. 223

SPUNTI PER UNA DISCUSSIONE

Je veux seulement présenter quelques réflexions : elles me sont suggérées par des questions reliant entre eux les trois cours que nous suivons, d'autant que les sujets et les tons en sont très différents. Mais je considère comme une circonstance particulièrement heureuse et stimulante que ces cours aient des inspirations si éloignées : fait qui découlait déjà de la différente personnalité des trois orateurs et qui s'est bien révélé dès la première journée par le choix du sujet et l'orientation de chacun d'entre eux. Et nous voyons se développer, jour après jour, trois différents aspects de l'étude mathématique de l'économie. De l'un des côtés extrêmes, M. Guilbaud nous montre, avec son esprit de finesse et sa profondeur, les tâches d'un criticisme mathématique qui se préoccupe de séparer soigneusement ce qui revient à l'économie ou à la mathématique, de séparer les axiomes, les notions et les théories des interprétations empiriques de la réalité économique. De l'autre côté, M. Frisch, prend comme point de départ un criticisme sociologique, portant sur la distinction de buts et d'intérêts entre l'économie descriptive et l'économie normative, entre modèles de développement et modèles de décision, entre limitations technologiques non directement modifiables et limitations administratives qui en principe seraient modifiables, et entre les différentes façons de prendre des décisions, notamment entre les procédés démocratiques et les autres. Pour lui, la mathématique est l'outil qui permet d'indiquer à l'humanité la voie pour surmonter les difficultés économiques provenant de l'insuffisante connaissance des faits et des possibilités et de l'absence de rationalité et de coordination entre les décisions. Enfin, M. Morishima nous montre les types plus poussés de formalisation des études d'économie

II

mathématique par des modèles fort complexes qui témoignent des efforts modernes (auxquels il a apporté des contributions personnelles universellement appréciées) pour maîtriser un ensemble toujours plus riche d'aspects du problème de l'économie.

On voit bien par cette comparaison combien le champ d'application de la mathématique à l'économie est vaste : les études particulières apparaissent - pourrait-on dire- comme des îles séparées par des lacunes qu'il faudrait bien combler, ou dont il faudrait au moins se rendre compte afin que l'attention portée aux questions particulières ne fassent pas perdre de vue l'ensemble.

Ces mots ne signifient nullement une critique à ce qui a été fait dans ce domaine ; ils veulent souligner simplement qu'il y a beaucoup à faire encore, qu'il faut continuer. Continuer, réfléchir, reviser sans cesse, c'est d'ailleurs l'impératif éternel de toute science ; pour ce qui est de l'économie, cette importance d'une réélaboration continuelle a été dûment soulignée comme un des mérites de Pareto dans un article de journal que par hasard j'ai lu tout juste hier : "egli non cessò mai di meditare sulle conclusioni già raggiunte, di metterle in dubbio e di cercar di superarle" (Leo Valiani, "L'Espresso", 5/9/65).

C'est dans cet esprit que je voudrais développer quelques commentaires qui pourraient être décrits, sans doute trop superficiellement, comme criticisme du criticisme mathématique de M. Guilbaud et criticisme du criticisme sociologique de M. Frisch ; quelques considérations concernant le cours de M. Morishima pourront entrer aussi dans ce cadre.

Je suis tout à fait d'accord avec M. Frisch sur la façon,

III

telle que je l'ai rappelée, de poser les questions ; si j'attache beaucoup d'intérêts et d'importance à l'étude de l'économie et à l'application de la mathématique à l'économie, ce n'est pas seulement pour accroître le patrimoine de travaux scientifiques, mais surtout parce qu'il me semble que la vie économique est fort mal organisée, et les possibilités créées par le progrès très imparfaitement exploitées pour le bien-être des populations, dans les différents régimes et systèmes économiques existants. Il semble bien sûr qu'il suffirait de modifier ces limitations que M. Frisch dit "administratives" pour améliorer la situation dans le monde, et une analyse mathématique est une prémisses nécessaire à ces améliorations.

Mais l'aspect mathématique est quand même étroitement lié à l'aspect social et à l'aspect moral (s'il est permis de prononcer un mot qui semblait devoir être écarté). A qui reviendra le droit et la tâche de prendre les décisions, de pondérer les préférences des différents individus, des générations actuelles et futures ? La réponse de M. Frisch, en faveur de la méthode démocratique, est sans doute la plus séduisante, mais ce mot "démocratique", ne semble pas épuiser la question.

La question qui demeure ouverte est celle de la répartition des champs et des pouvoirs de décision ; la répartition en champs en est l'aspect technologique (et il faut bien souhaiter que la voie tracée par M. Frisch, avec la notion de "canal", ouvre la possibilité d'individualiser un critère de division rationnelle qui évitera les défauts des divisions par industries, par régions, par entreprises, par individus) ; la répartition des pouvoirs en est l'aspect sociologique, et il faut bien s'assurer qu'elle conduit à

IV

un résultat "équitable" (c'est un mot mal définissable, mais on ne peut pas s'en passer et il n'y'a rien de mieux définissable qui semble pouvoir le remplacer.)

La Théorie classique disait qu'il suffirait que chaque individu soit libre de choisir ses actions d'après son intérêt personnel, et l'on voit que cela est dangereux. Mais si les choix de la collectivité sont décidés par les individus qui en font partie, par exemple par une règle de majorité, cela pourrait être aussi dangereux, si le vote de chacun était déterminé par ce même intérêt : la décision collective pourrait être incohérente, ou myope, ou préjudiciable aux intérêts d'une minorité. Il faudrait bien - mais de quelle façon ? - garantir que la décision représente un compromis dans la signification la meilleure du mot, comme M. Frisch le préconise : la situation la meilleure (la seule réellement bonne) serait celle où chaque membre de la collectivité aurait la même connaissance des exigences de tous les autres et le même soin d'en tenir compte en vue d'une décision à prendre de la façon la meilleure, en moyenne, pour tous, comme dans une famille (peut-être dans une famille idéale qui n'existe pas). Pourrait-on donner aux peuples une éducation civique de cette sorte ? et sinon, devrait-on limiter la liberté de choix (par exemple, si la population sous-estimait les nécessités du futur, ou des dangers survenant à long terme etc...) et qui devrait en décider ?

La connexion que je viens de souligner entre l'aspect mathématique de l'individualisation de partitions de canaux ou autres choses suffisamment peu interdépendantes au point de vue technologique afin d'être acceptables comme champs de décisions séparés, et l'aspect social et moral concernant les formes d'intervention des vo-

lontés individuelles, est bien un exemple de connexion qui existe toujours entre tous les aspects de tout problème et de toute théorie de l'economie.

Cela ne veut pas dire que les distinctions ne sont pas admissibles, ni qu'elles sont inutiles ; il faut seulement se garder d'aller trop loin. Les distinctions sont utiles comme artifice pour fixer l'attention sur un aspect indépendamment des autres momentanément négligés, mais non pour l'ériger en quelque chose d'autonome et d'autosuffisant. Cette exigence, unique avec ses deux faces opposées, de distinguer et de connecter les différents aspects, est présente à chaque pas.

De ce fait, je suis parfaitement d'accord aussi avec M. Guilhaud lorsqu'il souligne l'intérêt qu'il y a à se demander ce qui ressort aux mathématiques, quels sont les axiomes ou hypothèses dont dépendent logiquement des conclusions, etc.... Tout cela est fort utile, pas seulement pour le mathématicien qui a et doit avoir le souci de préciser les passages dont il est responsable en les distinguant des prémisses reçues de l'extérieur comme point de départ et des interprétations qui seront données à l'extérieur comme point d'arrivée, mais aussi pour l'économiste qui doit en juger et en faire application avec sagesse.

Et je suis d'autant plus d'accord avec lui qu'il souligne - comme il vient de le faire ce matin⁽⁰⁾ - la liaison que ces aspects mathématiques ont avec les questions sociales et morales dont il nous a promis de parler, en faisant allusion à ces grands esprits : Condorcet , Rousseau, Cournot - avec lesquels on sent bien qu'il est familiarisé. Supprimer ces liaisons ce serait dessécher nos études.

⁽⁰⁾ Ces allusions ne se trouvent pas dans le texte reproduit ici .

VI

Mais, malheureusement, l'effet de l'emploi de la mathématique n'est pas toujours si bien interprété : la mathématique jouit en effet d'une réputation d'exactitude et d'infailibilité si extraordinaire que tout ce qu'elle manipule semble souvent être considéré de ce fait transformé en or de vérité absolue, comme s'il avait été touché par le roi Midas. C'est de ce fait par exemple, que la notion de prix semble se présenter et s'imposer avec une interprétation intrinsèque et générale, donnant une signification à la "valeur" de quantités quelconques de marchandises, tandis que cela découle, au point de vue mathématique, de la simplification de considérer une fonction linéaire et de l'habitude à des faits "administratifs". En réalité la définition n'a de sens que dans le voisinage d'un point, et, en dehors de ce voisinage, il faudrait considérer seulement les variétés d'indifférence.

On peut illustrer cette remarque, qui s'applique à toute théorie plus perfectionnée, même en se bornant au schéma très primitif d'Isnard que M. Guilbaud nous a présenté. Le passage de la situation initiale à la finale pourrait bien se produire de maintes façons, soit par des échanges successifs à des prix différents, ou par des transferts gratuits. Chercher un prix unique sous-jacent pourrait ne pas dire grand-chose, et il pourrait même se faire que les prix d'équilibre dans la situation finale soient tels qu'ils empêchent la transaction, soit au point de vue d'un producteur, soit à celui des consommateurs. Si par exemple l'un des trois individus avait eu la chance de faire d'une récolte très bonne de son produit, il ne pourrait que le céder gratuitement aux deux autres sans pouvoir se procurer les biens qu'ils produisent. Et, de l'autre côté, il n'y a pas moyen d'assurer les quantités indispensables des biens essentiels à la population sans

VII

recours, parfois, à un rationnement au lieu d'un fonctionnement du système de prix. Sur une échelle beaucoup plus large, il semble bien que c'est de faits de ce genre que dépendent les difficultés de certaines catégories (comme les agriculteurs) ou des pays sous-développés qui se trouvent en situation de faiblesse dans leurs rapports avec les catégories ou pays plus industrialisés (comme il est décrit par exemple par Hla Myint⁽¹⁾ et Galbraith⁽²⁾, qui montrent la nécessité d'une "counterbalancing power"), mais dont je ne connais pas d'analyses mathématiques. Dans ce même ordre d'idées (ou de négligences) on néglige avec facilité la question des "économies extérieures": des coûts que les conventions "administratives" ou traditionnelles ne font pas payer à celui qui en est la cause et qui en tire un profit.

C'est bien de situations de ce genre, qui donnent lieu à des problèmes, qu'il faudrait s'occuper surtout; mais il semble cependant que c'est le contraire qui a plus d'attrait, notamment le souci de prouver rigoureusement que tout est "lapallissade" si l'on néglige ce qui ne l'est pas.

On considère, par exemple, des modèles, pour lesquels on démontre l'existence d'un équilibre, ou la validité de telle ou telle autre propriété. Naturellement, la définition même du modèle, ou des

(1) Hla Myint - An interpretation of economic backwardness, Oxford economic papers, Vol 6, n. 2, 1954, pp. 132-163; trad. ital. dans F. Caffé, *Economisti moderni*, Garzanti ed., 1962.

(2) John Galbraith - The affluent society, Hamish - Hamilton, London, 1958.

VIII

restrictions ou axiomes ultérieurement introduits, montrent bien que les conclusions sont valables sous des hypothèses particulières, en général très loin d'être réalistes, et souvent choisies expressément pour arriver à cette conclusions. Par le dit effet de la réputation des mathématiques, il semble bien souvent, dans cette situations, que l'on pense que les conclusions sont mathématiquement vraies et donc telles même dans la vie pratique, sans se soucier des hypothèses de départ; tandis qu'il fallait examiner ce qui se passe lorsque ces restrictions ne sont pas valables.

On est ainsi conduit maintes fois à se souvenir du P. Saccheri, qui avait presque découvert les géométries non-euclidiennes, mais qui a fait tout effort possible pour s'empêcher d'y parvenir, en écartant comme déraisonnables les conséquences des hypothèses qui auraient caractérisé la géométrie de Bolyai et celle de Lobatchevski. Dans notre cas de l'économie, la chose est bien plus dangereuse, car elle revient à suggérer des visions trop limitées, simplifiées et optimistes sur l'ensemble des problèmes : ces insuffisances conduisent généralement à conclure avec M. Pangloss que tout va au mieux dans le meilleur des mondes possibles, ou, peut-être, que cela serait vrai si seulement on admettait le "laisser faire, laisser passer" comme dirait un M. Pangloss de droite, ou bien si seulement on acceptait de planifier comme dirait un M. Pangloss de gauche (qui pourrait penser - comme dans le cas mentionné par M. Frisch⁽¹⁾ - qu'il s'agit tout simplement de se donner le vecteur des consommations désirées

(1)

Dans le memorandum sur la "Méthode des canaux" Oslo.

et de faire l'inversion d'une matrice).⁽¹⁾

Même les exposés mathématiques semblent parfois vouloir suggérer l'idée que la mathématique a le pouvoir de rendre facile ce qui est complexe ; et cela est vrai dans les limites du raisonnable, mais si on les dépasse cela veut dire que l'on n'a pas affronté le problème : on l'a seulement eludé. Il ne faut pas se borner aux choses claires et commodées pour montrer qu'on peut les mathématiser de façon très claire et très commode, et prouver qu'il suffit de négliger ou d'écarter ce qui ne plaît pas pour accepter ou justifier ce qui semble raisonnable ; il faut pousser l'analyse jusqu'à considérer toute situation incommode, en voir les raisons, en chercher les principes pour corriger ce qu'il faudrait corriger.

Malheureusement, il semble bien que la tendance naturelle de toute chose c'est de se dérouler de la façon la plus mauvaise possible si on ne s'efforce pas de l'en empêcher : je crois que l'expérience vécue par nous tous à notre siècle confirme tout-à-fait celle de Candide au siècle de Voltaire. Et pour empêcher cette tendance du mieux que nous le pouvons, il ne suffit pas de choisir une formule magique ou autre, un schéma idéologique ou autre, mais d'extraire de tout point de vue, d'examiner et d'essayer ce qui peut être approprié dans les différents problèmes et situations. On ne peut pas penser, pour faire une image, qu'il suffit de confier tout à des dispositifs basés sur l'hypothèse que le frottement n'existe pas, ni à des

(1) Les considérations à ce sujet ont été développées davantage par l'auteur dans un article écrit à la suite du 1^{er} Congrès de l'Econometric Society (Rome, sept., 1965) : B. de Finetti, "Econometristi allo spettroscopio", La rivista trimestrale, Roma, 1965.

mécanismes "parfaits" en espérant qu'aucune défaillance (qui pourrait causer des désastres) ne se produira jamais.

Lorsqu'on passe au cas des modèles plus complexes, il s'avère que, lorsqu'un modèle est à la mode, les hypothèses et les objectifs qu'il envisage apparaissent hors de discussion : par exemple, que le but de l'expansion la plus rapide possible de la production soit l'objectif naturel et que les hypothèses implicites sont des assumptions mathématiques dont il n'y a rien à dire. C'est avec plaisir que j'ai pu caractériser si bien, par M. Morishima, les hypothèses du modèle de von Neumann : un modèle où les travailleurs sont considérés comme des animaux élevés pour produire du travail et les capitalistes sont des automates au service de la production. Et c'est curieux : je viens d'apprendre ces jours-ci qu'une réalisation conforme à cette image a été exploitée, tout près d'ici, sur l'autre versant du Gran Sasso : il y a un élevage de singes dressés pour la récolte des olives, dans des endroits où la main d'oeuvre humaine coûterait trop chère.

Mais quand même, le modèle de von Neumann est bien intéressant, et c'est intéressant de remarquer, comme l'a fait M. Koopmans⁽¹⁾, comment un modèle si peu réaliste dans son point de départ peut s'avérer puissant comme outil d'étude sous des hypothèses raisonnables ; j'attends avec intérêt de voir comment M. Morishima va rattacher ces questions au "Turnpike theorem" qu'il a annoncé nous exposer demain. Car c'est de cette façon qu'il est instructif de voir les choses, et non du point de vue formaliste qui néglige la considération

(1) Tjalling C. Koopmans, "Economic growth at a maximal rate", Qu. J. of Econ. LXXVIII (1964) 355-394.

XI

des buts effectifs du bien-être de la collectivité.

Toutes les théories, les méthodes, les modèles peuvent être utiles, mais leur utilité n'est bien assurée et bien fondée sinon lorsqu'elles arrivent à faire partie d'une vision d'ensemble tendant à embrasser l'économie toute entière ; vision qui ne semble pouvoir se baser sur d'autre fondement que celle que l'on appelle "l'économie du bien-être" , ou , selon la dénomination la plus universellement connue, la "Welfare Economics" .

B. de Finetti

3 Sett. 1965

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

G. Th. GUILBAUD

QUELQUES REFLEXIONS MATHEMATIQUES
sur
LES EQUILIBRES ECONOMIQUES

Corso tenuto all'Aquila dal 30 agosto al 7 settembre
1965

QUELQUES REFLEXIONS MATHEMATIQUES

sur

LES EQUILIBRES ECONOMIQUES

par

G.. Th. Guilbaud

1 LE MODELE D'ISNARD

Selon Schumpeter (History of Economic Analysis) le premier auteur qui a tenté une définition mathématique de l'EQUILIBRE est ISNARD sans son Traité des Richesses (1781) "qui attend encore dans l'histoire de la science économique la situation qui lui est due" (celle de précurseur de Walras).

Il s'agit de montrer comment les valeurs se constituent à partir des quantités disponibles et des besoins. Dans l'échange entre deux agents économiques, c'est clair : si l'on échange tant de litres de vin contre tant de mesures de blé, les termes mêmes de cet échange définissent le rapport en question. Ce qui importe c'est la généralisation, pour laquelle l'expression mathématique est nécessaire.

Commençons par un exemple numérique, à la manière ancienne. Trois personnes possèdent respectivement 20 setiers, 25 barils, 30 quintaux.

Tableau initial :

		I	II	III
(Ti)	S	20	--	--
	B	--	25	--
	Q	--	--	30

Imaginons qu'un échange préalable d'informations et un débat conduise les trois personnes à souhaiter (tels sont les "besoins") la

réalisation du tableau final :

		I	II	III
	S	9	6	5
(Tf) :	B	7	15	3
	Q	2	4	24

Alors sont déterminés des prix, non pas comme des nombres absolus, mais des rapports au sens arithmétique du mot.

Soient en effet s , b , q , les valeurs unitaires pour les trois marchandises; il suffit d'écrire la balance des comptes :

$$20 s = 9 s + 7 b + 2 q$$

$$25 b = 6 s + 15 b + 4 q$$

$$30 q = 5 s + 3 b + 24 q$$

Système de trois équations qu'on "résoudra" même sans grandes connaissances d'algèbre et l'on trouve :

$$\frac{s}{12} = \frac{b}{14} = \frac{q}{17}$$

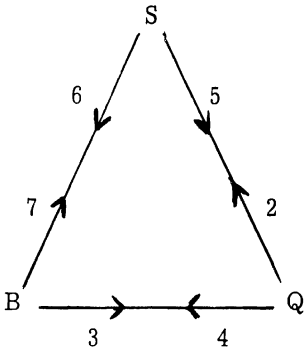
ce qui donne les proportions désirées entre les valeurs .

Deux données : (Ti) et (Tf) , c'est à dire la répartition des marchandises avant et après l'échange. C'est d'ailleurs seulement ce qu'on peut appeler leur différence (Tf - Ti) qui intervient :

-11	+ 7	+ 2	
+ 6	- 10	+ 4	(dT = Tf - Ti)
+ 5	+ 3	- 6	

et qui permet d'écrire l'équilibre des valeurs :

$$\begin{cases} 11 s = 7 b + 2 q \\ 10 b = 6 s + 4 q \\ 6 q = 5 s + 3 b \end{cases}$$



$$\begin{cases} 6 s + 5 s = 7 b + 2 q \\ 7 b + 3 b = 6 s + 4 q \\ 4 q + 2 q = 5 s + 3 b \end{cases}$$

Le réseau des échanges

Comptabilité en valeur

Le fait mathématique à mettre en évidence : cette procédure réussit ! Réussit-elle toujours ?

D'abord le dire abstraitement : un tableau carré de nombres positifs (entiers dans notre exemple, en tous cas rationnels), complété dans la diagonale par des nombres négatifs calculés par l'addition en colonne. Des équations s'en déduisent. Donnent-elles toujours une solution acceptable ?

Existence de multiplicateurs (positifs) qu'on puisse interpréter comme des prix.

Quelqu'un qui ne sait pas la démonstration comprend-il la thèse économique ? et qui sait des mathématiques comprend-il mieux les phénomènes économiques ?

Description mathématique du problème posé ;

On donne deux tableaux carrés, indiquant l'un la répartition initiale, l'autre la finale . Par exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 11 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 7 & 2 \\ \hline 6 & 0 & 4 \\ \hline 5 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

et l'on demande de trouver des multiplicateurs (qui seront interprétés comme des prix) :

a, b, c, ...

tels que :

$$\begin{array}{rcl} 11 a & = & 7 b + 2 c \\ 10 b & = & 6 a + 4 c \\ 6 c & = & 5 a + 3 b \end{array}$$

qu'on écrira plus commodément sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On demande, non pas seulement de résoudre, c'est à dire calculer effectivement, mais d'étudier en général la possibilité d'un tel calcul, en accordant une attention toute particulière au fait que, dans notre interprétation économique, les multiplicateurs seront des prix et doivent être positifs .

Le langage vectoriel est le plus commode ; il s'agit de trouver des

multiplicateurs (scalaires) $a, b, c, \dots$ tels que :

$$a \begin{pmatrix} -11 \\ +6 \\ +5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} +7 \\ -10 \\ +3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} +2 \\ +4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le problème général est donc le suivant : étant donné un ensemble de vecteurs, existe-t-il une combinaison linéaire à coefficients positifs qui soit égale au vecteur zéro ?

2 ESPACES VECTORIELS ET CONES

Les colonnes de nombres (rationnels) que manipule notre comptabilité sont des vecteurs, c'est à dire des objets qui obéissent aux axiomes bien connus des espaces vectoriels (il y a un vecteur zéro, on sait additionner deux vecteurs, cette addition constitue l'ensemble en groupe abélien, il y a des homothéties, etc...) .

Etant donnée une collection quelconque (ici elle sera toujours finie) de vecteurs d'un tel espace, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs constitue un sous-espace vectoriel (ou variété linéaire). Si parmi les combinaisons linéaires on sélectionne celles dont aucun coefficient n'est négatif on obtient une partie du susdit sous-espace, partie que l'on nomme cône.

Ainsi à partir d'une famille de vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ on constitue deux ensembles :

$L(V_1, V_2, \dots, V_n)$ ou $L(V_i)$ = espace engendré
linéairement par les V_i

$K(V_1, V_2, \dots, V_n)$ ou $K(V_i)$ = cône engendré
positivement par les V_i

On a évidemment : $K \subset L$, tout cône est une partie de l'espace
correspondant.

Mais il peut arriver qu'un cône soit non pas une vraie partie d'espace,
mais un espace tout entier. Il est facile de construire des exem-
ples. Ainsi les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

engendrent linéairement un espace. Adjoignons à ces trois vecteurs,
un quatrième :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors tout vecteur de l'espace peut être écrit comme combinaison
linéaire positive de ces quatre vecteurs. Si les trois coordonnées
sont positives, les trois premiers suffisent. Sinon, comme par exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on effectue le remplacement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dont tous les coefficients sont positifs .

Etablissons, en général , la proposition suivante :

Tout espace est un Cône

Soit L l'espace engendré linéairement par les vecteurs :
 $X_1, X_2, \dots, X_n$. Adjoignons le vecteur X_0 défini par :

$$X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n = \text{Zéro}$$

Ce vecteur appartient évidemment à l'espace L .

Et considérons le cône K engendré par $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Il est clair que : $K \subset L$. Mais on a aussi : $L \subset K$; Soit en effet X un vecteur quelconque de L .

$X \in L$: signifie qu'il existe des coefficients P_i tels que :

$$X = \sum P_i X_i$$

Si tous les P_i sont positifs, on a $X \in K$. Sinon considérons le plus petit coefficient : $-P_0$ (il est négatif) et écrivons

$$X = X + P_0 (X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

ou bien :

$$X = P_0 X_0 + (P_1 + P_0) X_1 + \dots + (P_n + P_0) X_n$$

qui présente X comme combinaison linéaire des vecteurs :
 $X_0, X_1, \dots, X_n$. Mais puisque :

$$- P_0 \leq P_i \quad \text{pour tous les } i \in \{1, \dots, n\}$$

tous les coefficients $P_i + P_0$ sont positifs.

Donc $X \in K$.

On verra sans peine qu'on aurait pu remplacer la somme X_0 par une combinaison linéaire quelconque à coefficients négatifs (et non forcément égaux à -1) pourvu qu'aucun ne soit nul. Inversement, si un espace est positivement engendré par une collection de vecteurs, tout vecteur X de cet espace est égal à une combinaison positive (à coefficients non tous nuls) et il en est de même du vecteur $-X$, donc également de leur somme $X - X = \text{Zéro}$. Ainsi le vecteur Zéro peut être représenté comme combinaison linéaire positive (à coefficients non tous nuls). Ainsi:

La condition nécessaire et suffisante pour que le cône K engendré positivement par une collection de vecteurs soit identique à l'espace engendré linéairement est qu'il existe une combinaison linéaire positive qui soit identiquement nulle (aucun coefficient ne doit être nul).

Nous retrouvons ici notre problème : on donne une collection de vecteurs, existe-t-il une combinaison linéaire positive qui soit identiquement nulle ? Et rappelons la signification "comptable" : étant donné un schéma d'échanges de biens, existe-t-il des prix assurant la balance des comptes (un équilibre en "valeur") ?

Il sera commode d'appeler "Cône aplati" un cône identique à l'espace engendré.

Notons au passage qu'il existe des cônes, qui sans être aplatis, contiennent des sous-espaces linéaires : on les nomme des "Coins" (anglais : wedges). Un demi-plan, un angle plan, un angle dièdre en fournissent des illustrations élémentaires. Pour un coin il existe aussi une combinaison positive identiquement nulle, mais certains coefficients sont nuls. Enfin notons que parmi les coins figurent, comme cas extrêmes, les demi-espaces.

(Un cône qui n'est pas un coin peut être dit "saillant").

Il peut être intéressant de présenter un algorithme permettant de décider si un système de vecteurs engendre positivement un vrai cône, ou bien s'il engendre tout l'espace.

Dans le premier cas, les théorèmes de séparation bien connus affirment l'existence d'un opérateur linéaire f tel que :

$$f(x_i) > 0$$

pour chacun des vecteurs x_i donnés. ...

On va donc, étant donné des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, chercher par tâtonnements une forme f pour laquelle tous les résultats soient positifs.

Du même coup nous résoudrons le problème suivant : classification de vecteurs en deux classes.

Des vecteurs x , une forme f ; les fx sont des scalaires ; les vecteurs seront classés selon que fx est positif ou négatif.

Si l'on donne deux classes, les vecteurs x et les vecteurs y - il s'agit de trouver une forme f telle que les fx soient positifs et les fy négatifs.

Il revient au même (à cause de la linéarité) de chercher une f telle que fz soit toujours positif en rassemblant dans une même classe z : les (x) et les $(-y)$. .

Le problème principal est donc :

Etant donné un ensemble de vecteurs, trouver une forme qui, appliquée à ces vecteurs donne des scalaires tous positifs.

Schéma d'un algorithme : on essaie un f , s'il ne convient pas, c'est-à-dire s'il donne un résultat scalaire négatif pour quelqu'un des vecteurs soumis à l'épreuve, on doit modifier f . Cette modification sera, bien entendu, fonction du vecteur rebelle : il faut donc établir une correspondance entre vecteurs x et corrections Df , c'est-à-dire entre deux espaces vectoriels en dualité. Le plus simple sera de choisir une correspondance linéaire : mais faire correspondre linéairement à tout vecteur x une forme Df (c'est-à-dire une opération qui transforme tout vecteur v en un scalaire s), c'est finalement faire correspondre à une paire de vecteurs (x,v) un scalaire s . Et cette correspondance doit être bilinéaire, c'est-à-dire linéaire pour x comme pour v .

On va donc travailler dans un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire qui à toute paire de vecteurs fait correspondre un scalaire. Lorsque cette opération est symétrique et positive, on peut l'appeler "produit scalaire" - et elle donne à l'espace vectoriel une structure géométrique ("euclidienne" ou "préhilbertienne"); on y trouve des longueurs (ou normes) par les carrés scalaires et des cosinus (ou coefficients de corrélation) grâce à la célèbre inégalité (de Cauchy, Schwarz et Buniakovski) :

$$(x.y) (x.y) \leq (x.x) (y.y)$$

Décrivons maintenant, sur un exemple très rudimentaire (choisi pour pouvoir effectuer tous les calculs à la main en peu de temps), un algorithme particulièrement simple .

3 ALGORITHME

Vecteurs donnés $x = (0, 1, 0, 1)$
 $y = (1, \overline{1}, \overline{1}, 1)$
 $z = (\overline{1}, 0, 0, \overline{1})$
 $w = (0, \overline{1}, \overline{1}, 1)$

Critère : (si T_v est positif, conserver l'opérateur T , sinon
remplacer T par $T + v$)