

Giovanni Vittorio Pallottino

Il rumore elettrico



Dalla fisica alla progettazione



UNITEXT

Collana di Fisica e Astronomia

A cura di:

Michele Cini
Stefano Forte
Massimo Inguscio
Guida Montagna
Oreste Nicosini
Franco Pacini
Luca Peliti
Alberto Rotondi

Giovanni Vittorio Pallottino

Il rumore elettrico

Dalla fisica alla progettazione

 Springer

GIOVANNI VITTORIO PALLOTTINO
Dipartimento di Fisica
Università di Roma La Sapienza

Contenuti integrativi al presente volume possono essere consultati su <http://extras.springer.com>,
password 978-88-470-1985-0

UNITEXT- Collana di Fisica e Astronomia

ISSN print edition: 2038-5730

ISSN electronic edition: 2038-5765

ISBN 978-88-470-1985-0

ISBN 978-88-470-1986-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-88-1986-7

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>.
Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

© Springer-Verlag Italia 2011

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art.68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n.108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org.

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Copertina: Simona Colombo, Milano
Impaginazione: CompoMat S.r.l., Configni (RI)
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI)

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano
Springer fa parte di Springer Science + Business Media (www.springer.com)

Indice

Prefazione	IX
Premessa	XI
1 Introduzione al rumore	1
2 La caratterizzazione matematica del rumore	5
2.1 Densità di probabilità, valor medio e valore efficace	6
2.2 Le funzioni di correlazione	11
2.3 Spettri di potenza e spettri di ampiezza	13
3 Il filtraggio del rumore	17
3.1 Il filtraggio nel dominio della frequenza	17
3.2 La banda equivalente di rumore	19
3.3 Il tempo d'integrazione equivalente	20
4 Il rumore termico	23
4.1 Introduzione al rumore termico	23
4.2 La formula di Johnson. L'origine del rumore termico elettrico	28
4.3 La generalizzazione della formula di Johnson	31
5 Il rumore shot	37
6 Il rumore $1/f$	41
7 Il rumore di quantizzazione	47
8 La rappresentazione del rumore nelle reti elettriche	49
8.1 Il rumore nei bipoli	49
8.2 Il rumore nelle reti a due porte	53

9	Fattore di rumore, temperatura di rumore, ...	57
9.1	Il fattore di rumore	57
9.2	La temperatura di rumore e il numero di rumore	60
9.3	La carica equivalente d'ingresso	63
9.4	La potenza equivalente di rumore (NEP)	65
10	Il rumore dei dispositivi	67
10.1	Componenti passivi	67
10.2	I diodi a giunzione	70
10.3	Transistori bipolari	71
10.4	Transistori a effetto di campo	74
10.5	Il rumore negli amplificatori operazionali	78
10.6	Cenni sul rumore dei DC SQUID	82
11	Generalità sulla progettazione a basso rumore	87
11.1	Introduzione alla progettazione a basso rumore	87
11.2	Le misure del rumore	90
11.3	Le tecniche di adattamento al rumore (<i>noise matching</i>)	92
11.4	La controreazione e il rumore	95
11.5	Un esempio di progetto di preamplificatore a basso rumore	97
12	Cenni sull'estrazione del segnale dal rumore	99
12.1	Segnali costanti (o lentamente variabili)	99
12.2	Segnali sinusoidali	101
12.3	Segnali con spettro di forma nota	103
12.4	Segnali con forma d'onda nota	105
12.5	Alcune tecniche particolari	107
12.5.1	Modulazione del segnale e impiego di un amplificatore lock-in	107
12.5.2	La tecnica di correlazione a due canali	110
12.5.3	La tecnica delle medie correlate	111
12.5.4	Il campionamento doppio correlato (<i>correlated double sampling</i>)	112
13	Impieghi utili del rumore	113
13.1	La misura di costanti fondamentali e di grandezze fisiche	113
13.2	L'impiego del rumore come segnale casuale	115
13.3	Il raffreddamento del rumore mediante la controreazione	118
13.4	Il rumore come strumento concettuale	120
A	Richiami sui sistemi	123
A.1	Classificazione dei sistemi	123
A.2	I sistemi lineari dinamici	124
A.3	Il rumore nei sistemi lineari dinamici	126
A.4	Il rumore nei sistemi nonlineari statici	127

B	I processi di Poisson	131
C	Funzioni di autocorrelazione e spettri unilateri	135
D	L'analogia di Maxwell	137
	Bibliografia	139
	Indice analitico	145

Prefazione

Ho molto apprezzato la chiarezza dello stile pedagogico della trattazione, che ritengo conveniente sia per uno studente che affronta per la prima volta lo studio dei fenomeni del rumore sia per chi già dispone di conoscenze al riguardo, ma vorrebbe approfondirle e renderle più sistematiche. In questo senso il presente libro si colloca in una posizione intermedia ben definita fra le trattazioni matematiche riguardanti la teoria del rumore e i libri di natura tecnica contenenti dettagli sul rumore dei dispositivi e dei circuiti elettronici. Considero questo lavoro come un assai valido contributo alla formazione culturale generale di un fisico o di un ingegnere elettronico, anche se non destinato ad operare professionalmente nel settore specifico della strumentazione a basso rumore.

Mosca, febbraio 2011

Valentin Nikolaevich Rudenko

Istituto Astronomico Sternberg, Università Lomonosov

Premessa

Il rumore è un argomento considerato generalmente difficile, oscuro e specialistico. Cioè qualcosa da affrontare affidandolo possibilmente a qualcun altro. Sono certamente disponibili diverse buone trattazioni del rumore, ma che spesso ne affrontano la problematica in termini effettivamente piuttosto specialistici. Lo scopo di questo libretto è di proporre una trattazione del rumore elettrico auspicabilmente agile perché senza eccessivi approfondimenti, ben leggibile e di impiego pratico, coprendo gli aspetti essenziali della matematica e della fisica del rumore e la sua rappresentazione nei circuiti. Ma anche con qualche cenno ai criteri di progettazione a basso rumore e al problema dell'estrazione del segnale dal rumore, senza trascurare l'argomento degli impieghi utili del rumore e circoscrivendo la trattazione alla motivazione fondamentale, riguardante la strumentazione fisica a bassa frequenza.

La trattazione è fortemente didattica: attenta a evitare ambiguità, con forti riferimenti al significato fisico delle grandezze in gioco, con numerosi esempi svolti e con parecchi esercizi da svolgere, le soluzioni dei quali sono disponibili on line su <http://extras.springer.com> (password: 978-88-470-1985-0).

Più volte, negli anni passati, avevo avviato un lavoro a questo fine, anche in collaborazione con valentissimi colleghi, senza però, per varie evenienze, riuscire a portarlo a compimento. Poi raccolti del materiale sull'argomento organizzandolo nella forma di un capitolo delle dispense del mio corso di Elettronica alla Sapienza. Che in seguito ho deciso di estendere per farne un libretto, sperando che questa fosse la volta buona. Arrivando così a questo scritto, che voglio dedicare alla memoria del carissimo collega e amico Franco Bordoni, scomparso prematuramente nel 2002, assieme al quale a suo tempo avviai una di queste imprese.

Esprimo infine il mio più vivo ringraziamento sia agli studenti, per i loro stimolanti quesiti e le discussioni nel corso delle mie lezioni sul rumore, sia ai colleghi, Massimo Bassan, Carlo Bernardini, Carlo Cosmelli, Sergio Frasca, Andrej Gusev, Massimo Visco e Valentin Rudenko, le cui osservazioni hanno contribuito grandemente a migliorare il manoscritto. Ferma restando la mia piena responsabilità per gli errori e le imprecisioni che fossero sfuggiti, e la mia gratitudine a quanti vorranno darne segnalazione.

Introduzione al rumore

Il **rumore** (*noise*) viene così definito nel Dizionario IEEE [1]: “disturbo indesiderato sovrapposto a un segnale utile, che tende a oscurarne il contenuto informativo”. Di questo effetto di “oscuramento”, concetto peraltro assai intuitivo, ci si può rendere conto considerando un campione, cioè il valore assunto a un dato istante, di un segnale, cui possiamo associare la quantità d’informazione $H = \log_2 n$, dove n è il numero dei diversi valori che il campione può assumere¹. È infatti evidente che sovrapponendo rumore al segnale si crea incertezza: il numero di valori effettivamente distinguibili viene ridotto e con esso la quantità d’informazione del segnale. Ciò spiega l’importanza di tener conto del rumore nei problemi di comunicazione, e in generale di elaborazione dell’informazione.

Un problema del tutto analogo sorge nel caso delle misure fisiche, la cui accuratezza trova un limite negli errori di misura, più precisamente negli *errori casuali*. I quali non sono altro che una manifestazione del rumore, cui contribuiscono anche gli effetti di deriva (*drift*) nel tempo dovuti alle componenti del rumore a bassissima frequenza. Sicché il rumore gioca un ruolo fondamentale nella fisica sperimentale e in tutte le sue applicazioni pratiche.

Ma come si “sovrappone” il rumore al segnale? Nella quasi totalità dei casi di interesse pratico il rumore si combina linearmente con il segnale (*rumore additivo*), e quindi vale il principio di sovrapposizione degli effetti (Appendice A). Non mancano però casi in cui il rumore interviene attraverso fluttuazioni dei parametri del sistema considerato, che introducono quindi effetti nonlineari di modulazione del segnale e si parla allora di *rumore moltiplicativo*. Questo si verifica, ad esempio, a proposito dell’evanescenza (*fading*) nella ricezione dei segnali radio, che è dovuta a fluttuazioni della costante di propagazione.

Tornando alla definizione di rumore data all’inizio, notiamo che essa è assai generale. Fra i segnali indesiderati che si possono sovrapporre ai segnali utili rientrano infatti sia le fluttuazioni spontanee, fra cui il rumore termico, dovute a proprietà fon-

¹ La formula $H = \log_2 n$, introdotta da Ralph V. L. Hartley nel 1928, rappresenta la quantità d’informazione di un singolo campione di un segnale quando gli n valori che esso può assumere hanno tutti la stessa probabilità. La generalizzazione al caso di valori non equiprobabili, dovuta a Claude E. Shannon, è la seguente: $H = \sum_i p_i \log_2(1/p_i)$, dove p_i è la probabilità del generico valore.

damentali della materia, sia i disturbi provenienti dall'ambiente esterno, sia anche i rumori di processo, come il rumore di quantizzazione o le distorsioni, che derivano dall'elaborazione di segnali utili.

Per la sua importanza centrale - concettuale e pratica - in elettronica e in tutta la fisica sperimentale, nel seguito ci occuperemo principalmente del rumore dovuto alle fluttuazioni spontanee, che sono riconducibili essenzialmente all'agitazione termica (rumore termico) oppure a flussi casuali di grandezze quantizzate (rumore shot). In quanto dovuto a proprietà fondamentali della materia, questo rumore è di origine "interna" ed è quindi ineliminabile in linea di principio, sebbene possa venire ridotto con opportuni accorgimenti. L'osservazione di questo rumore a livello macroscopico, d'altra parte, costituisce una finestra aperta sul mondo microscopico in quanto derivante da fluttuazioni di grandezze microscopiche. Esso si manifesta nella forma di segnali casuali, il cui andamento nel tempo non è descrivibile analiticamente ma soltanto in termini statistici e il cui spettro non è costituito da righe ma è di tipo continuo, cioè si estende su regioni di frequenza più o meno vaste.

Queste ultime proprietà distinguono il rumore propriamente detto dai *disturbi*, cioè dai segnali indesiderati di origine "esterna", una categoria vastissima alla quale contribuiscono fenomeni di origine sia naturale sia artificiale: le interferenze radio e radar, la rete elettrica e le sue armoniche, i fenomeni atmosferici, le vibrazioni meccaniche che producono il cosiddetto rumore "microfonico", il rumore sismico e via dicendo. Questi disturbi, infatti, si possono considerare come eliminabili, almeno in linea di principio, con opportune tecniche di filtraggio o di schermaggio e generalmente il loro spettro non è di tipo continuo, ma è costituito da righe. Ma della lotta ai disturbi esterni non ci occuperemo, rimandando alle trattazioni specifiche su tale argomento [F, 2-4].

Nei sistemi telefonici e radiofonici il rumore elettrico si manifesta acusticamente con un caratteristico soffio o fruscio, da cui derivò appunto, all'inizio del secolo scorso, la denominazione² di "rumore". E fu proprio nei laboratori di ricerca della Bell Telephone, mirando a obiettivi di natura pratica nel campo delle telecomunicazioni, che negli anni '20 del secolo scorso J.B. Johnson [5] e H. Nyquist [6] svolsero studi essenziali sul rumore elettrico prodotto dalle fluttuazioni termiche (rumore termico).

Ricordiamo tuttavia che lo studio delle fluttuazioni di grandezze fisiche non elettriche, basato sugli sviluppi della meccanica statistica, ha preceduto lo studio del rumore elettrico. Si deve infatti a un fondamentale lavoro di A. Einstein del 1905 la spiegazione in termini di agitazione termica del fenomeno del moto browniano che era stato osservato dal botanico Robert Brown nel 1827. Ma ancora ad Einstein si deve il primo calcolo del rumore di un condensatore [7]. Una storia dettagliata degli studi sul rumore fino al 1980 si trova in un lavoro di A. Van der Ziel [8].

Tornando a quanto detto all'inizio, si capisce che, spesso, più del valore del rumore in termini assoluti ha interesse la sua entità rispetto al segnale utile, che è rappresentata dal **rapporto segnale/rumore** (*signal-to-noise ratio*), indicato con

² Ricordiamo altre denominazioni del rumore in altri contesti: "erba" (*grass*) nei ricevitori radar, per la forma caratteristica con cui il rumore si manifesta sugli schermi indicatori, e "neve" (*snow*) nei ricevitori per televisione del tipo analogico.

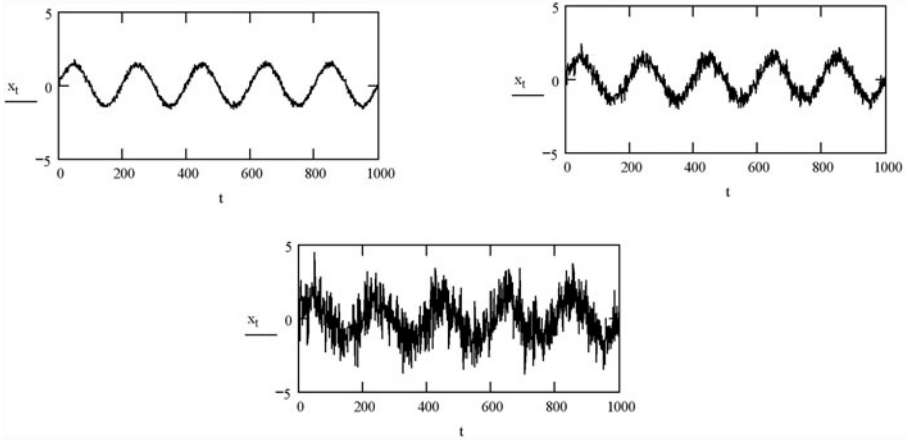


Fig. 1.1 Le tre figure rappresentano la somma $x(t)$ di una sinusoida $s(t)$ e di rumore gaussiano a larga banda $n(t)$ per tre diversi valori del rapporto segnale/rumore dato dalla (1.1): 100 in alto a sinistra, 10 in alto a destra, 1 in basso

l'abbreviazione SNR (oppure S/N), un concetto analogo a quello di errore relativo nelle misure fisiche. Di questa grandezza esistono varie definizioni: la più comune è il rapporto fra il valore quadratico medio del segnale $s(t)$ e quello del rumore $n(t)$

$$\text{SNR} = \frac{\overline{s^2}}{\overline{n^2}}. \quad (1.1)$$

Il rapporto segnale/rumore può naturalmente essere definito anche come rapporto di ampiezze, cioè come radice quadrata del precedente. Si noti che, esprimendo queste grandezze in unità di decibel³, il rapporto segnale/rumore assume lo stesso valore numerico considerando sia i rapporti di "energia" che i corrispondenti rapporti di ampiezza (valori efficaci o *root mean square* (rms) nel caso di segnali a media nulla).

Deve essere chiaro che la banda di frequenza di osservazione gioca un ruolo assai importante, perché le distribuzioni spettrali del segnale e del rumore sono generalmente assai diverse⁴. Sicché, modificando la banda, il rapporto SNR definito dalla (1.1) può cambiare a sua volta, anche assai radicalmente. La Fig. 1.2 mostra in particolare come si modifica il segnale rumoroso rappresentato nell'ultima delle figure precedenti (SNR=1) quando la banda viene ridotta sottoponendolo a un filtraggio passabasso (nel caso in figura si ottiene SNR ≈ 14).

Quesiti. 1) Cosa succederebbe impiegando un filtraggio passabasso assai più robusto? 2) Si può immaginare una scelta di filtraggio che sia più efficace al fine di migliorare ulteriormente il rapporto SNR?

³ Un rapporto R fra ampiezze si esprime in decibel come $20 \log_{10} R$; un rapporto R^2 fra grandezze quadratiche, come $10 \log_{10} R^2$. E quindi nei due casi i valori numerici coincidono.

⁴ Nel caso particolare considerato nelle figure precedenti, lo spettro del segnale sinusoidale è concentrato in una riga mentre quello del rumore copre tutta la banda (nel limite della rappresentazione discreta utilizzata).

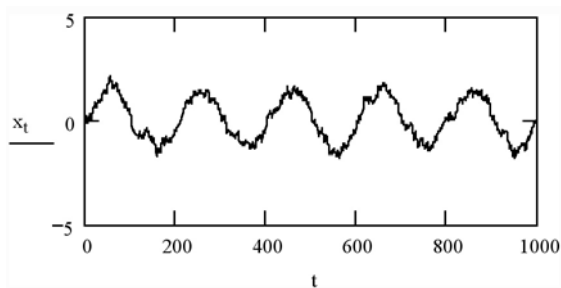


Fig. 1.2 Effetto del filtraggio passabasso sulla somma di una sinusoida e di rumore bianco con $\text{SNR} = 1$, rappresentata nel grafico in basso di Fig. 1.1

Notiamo poi che nel caso di segnali impulsivi, o comunque di natura transitoria, la definizione (1.1) è scarsamente applicabile. Conviene allora utilizzare una definizione in cui entri in gioco il valor massimo s_M del segnale impulsivo:

$$\text{SNR} = s_M^2 / \overline{n^2}. \quad (1.2)$$

Concludiamo questa introduzione osservando che, sebbene il rumore, per quanto detto sopra, costituisca normalmente un fattore indesiderato, non mancano tuttavia esempi di suoi impieghi utili [9]. Citiamo fra questi, perché di particolare rilievo in fisica, la misura di costanti fondamentali quali la costante di Boltzmann e la carica dell'elettrone, e di determinate grandezze fisiche, in particolare la temperatura. E menzioniamo anche l'impiego del rumore come segnale a larga banda per misurare le risposte caratteristiche di circuiti e sistemi. Di questi argomenti ci occuperemo più diffusamente nel Capitolo 13, notando però subito che in questi ambiti le nozioni di "disturbo indesiderato" e "segnale utile", utilizzate nella definizione del rumore data all'inizio, possono venire ribaltate rispetto all'usuale. E del resto si tratta di nozioni largamente soggettive. Per esempio, una sinusoida a 50 hertz (dovuta alla rete elettrica), che si sovrappone al rumore che rappresenta il "segnale utile" in un termometro a rumore, costituisce evidentemente un "disturbo indesiderato", che si cercherà di eliminare o quantomeno di attenuare.

La caratterizzazione matematica del rumore¹

A differenza dei segnali deterministici usuali, è evidentemente impossibile descrivere analiticamente l'andamento temporale del rumore, per la sua natura casuale, mediante funzioni del tempo. Il rumore, tuttavia, possiede certamente delle proprietà statistiche, ed è su queste che si basa la sua descrizione matematica, utilizzando la teoria dei processi stocastici.

Ricordiamo che per **processo stocastico** (*stochastic process*) s'intende in generale una famiglia di funzioni del tempo, dette *realizzazioni* del processo, alle quali sono associate delle distribuzioni di probabilità². I valori che le realizzazioni del processo assumono a un dato istante di tempo costituiscono poi una variabile casuale (*random variable*) o variabile aleatoria. Evitando di perdersi nella estrema generalità di questa problematica, assumiamo nel seguito, salvo diversa indicazione, che il rumore sia rappresentato da un processo **stazionario**, cioè con proprietà statistiche invariante rispetto a traslazione temporale, ed **ergodico**, cioè tale che tutte le proprietà del processo, le proprietà d'insieme, siano ricavabili dall'osservazione di una singola realizzazione.

Queste ipotesi sono del resto utilizzate comunemente nello studio del rumore, perché ben verificate sperimentalmente nella maggior parte dei casi di interesse. Per esempio, è un fatto che misurando oggi il rumore di un resistore da 1000 Ω alla temperatura T in una banda B si ottiene lo stesso valore, entro le incertezze di misura, di quello che, nelle stesse condizioni, avremmo misurato la settimana scorsa, o di quello che potremmo misurare nella prossima settimana come pure in qualsiasi altro momento; e in questo senso diciamo che il rumore di un resistore è un processo stazionario. Ed è anche un fatto che, misurando per un tempo sufficientemente lungo il rumore di un qualsiasi resistore da 1000 Ω , scelto comunque purché fra dispositivi "onesti"³, avremo tutta l'informazione necessaria a caratterizzare statisticamente in

¹ [10-13].

² Un esempio semplicissimo di processo stocastico è quello costituito da due funzioni del tempo, $f_1(t)$ e $f_2(t)$, la prima con probabilità P , la seconda con probabilità $(1 - P)$.

³ Per "resistore onesto" s'intende qui un dispositivo che segua la legge di Ohm e che alle frequenze d'interesse manifesti un comportamento resistivo dominante rispetto a quello reattivo.

generale il rumore dell'intera famiglia degli infiniti resistori (onesti) da 1000Ω ; e in questo senso diciamo che il rumore di un resistore è un processo ergodico.

Ora è certamente vero, come si legge negli appositi trattati, che la caratterizzazione completa di un processo stocastico, nel caso più generale, richiede di conoscere un insieme infinito di funzioni di distribuzione o di densità di probabilità. Ma se tuttavia, come assai spesso avviene, il rumore è "gaussiano" allora il processo stocastico $x(t)$ che lo rappresenta è completamente caratterizzato qualora se ne conosca una funzione statistica del primo ordine⁴, per esempio la funzione densità di probabilità, e una funzione statistica del secondo ordine, per esempio la funzione di autocorrelazione (§2.2). E ciò semplifica enormemente le cose.

2.1 Densità di probabilità, valor medio e valore efficace

Ricordiamo qui che la funzione **densità di probabilità** (*probability density function*) $f_x(x;t)$ descrive come sono distribuiti al tempo t i valori di un processo $x(t)$ (più precisamente i valori assunti dalle sue realizzazioni $x_i(t)$). Tale funzione ha la proprietà che il suo integrale fra a e b rappresenta la probabilità che a quell'istante il processo assuma valori compresi fra a e b (per $a \leq x \leq b$):

$$P(a \leq x \leq b; t) = \int_a^b f_x(x; t) dx \quad (2.1)$$

e conseguentemente è non negativa ($f_x(x;t) \geq 0$) e normalizzata all'unità ($\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x;t) dx = 1$).

L'integrale da $-\infty$ a x della funzione densità, che rappresenta la probabilità che il processo assuma valori minori o uguali a x , prende il nome di *funzione di distribuzione* o funzione cumulativa:

$$F_x(x; t) = \int_{-\infty}^x f_x(x; t) dx = P(x(t) \leq x). \quad (2.1a)$$

Si definiscono poi le funzioni densità e di distribuzione di ordine superiore al primo, ponendo in relazione i valori assunti dal processo a due o più istanti diversi. Per esempio, la funzione di distribuzione del secondo ordine ha il seguente significato:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2].$$

Ma se il processo è stazionario cade la dipendenza dal tempo per le funzioni statistiche del primo ordine e quindi $f_x(x;t) = f_x(x)$ per qualsiasi t . Se poi il processo è anche ergodico la funzione densità $f_x(x)$ può essere ottenuta osservandone una

⁴ Per *ordine* di una funzione statistica s'intende il numero di diversi istanti di tempo ai quali è necessario considerare il processo per poterla calcolare.