E. Martinelli (Ed.)

CIME Summer Schools

Funzioni e varietà complesse

30

Varenna, Italy 1963

Springer

Fondazione CIME Roberto Conti

E. Martinelli (Ed.)

Funzioni e varietà complesse

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
June 25-July 5, 1963

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11008-5 e-ISBN: 978-3-642-11009-2
DOI:10.1007/978-3-642-11009-2
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma, 1963
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, June 25-July 5, 1963

FUNZIONI E VARIETÀ COMPLESSE

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

HENRI CARTAN

FAISCEAUX ANALYTIQUES COHERENTS

ROMA - Istituto Matematico dell'Università

FAISCEAUX ANALYTIQUES COHERENTS

par Henri Cartan

1. - Théorème des syzygies pour l'anneau des séries convergentes à n variables.

Soit K un corps (commutatif) valué complet, non discret. On note $K\{x_1, \dots, x_n\}$ l'anneau des séries entières convergentes à n variables $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire des séries qui convergent au voisinage de l'origine. C'est un anneau intègre et noethérien ; de plus, c'est un anneau local: l'unique idéal maximal $\mathfrak{m}(\Lambda)$ de l'anneau $\Lambda = K\{x_1, \dots, x_n\}$ se compose des séries dont le terme constant est nul, c'est-à-dire des éléments non-inversibles de Λ. L'idéal $\mathfrak{m}(\Lambda)$ est engendré par $x_1, \dots, x_n$, et l'on a la propriété:

(P_n)-si J_k désigne (pour $0 \leq k \leq n$) l'idéal engendré par $x_1, \dots, x_k$, alors, pour $0 \leq k \leq n-1$, x_{k+1} n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau Λ/J_k.

(En effet, Λ/J_k s'identifie à $K\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$, qui est un anneau intègre).

Pour tout anneau Λ, on a la notion de résolution libre d'un Λ-module M : c'est une suite exacte (infinie à gauche)

$$(1.1) \qquad \dots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

formée de Λ-modules et d'applications Λ-linéaires, les X_i

étant des Λ-modules libres. Il existe toujours de telles résolutions (pour un M donné); en effet, M est quotient d'un module libre, donc on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow X_o \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

puis on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow 0 ,$$

et ainsi de suite; en mettant bout à bout ces suites exactes, on obtient la suite (1.1). On dit que la résolution (1.1) est de longueur $\leq$ p si $X_n = 0$ pour $n > p$.

Si Λ est noethérien, et si M est un module de type fini, il existe une résolution libre de type fini, c'est-à-dire dans laquelle les modules libres X_i ont chacun une base finie: en effet on peut choisir pour X_o un module libre de base finie, et alors Y_1 est de type fini (car tout sous-module d'un module de type fini est lui-même de type fini quand l'anneau est noethérien). On peut ensuite choisir pour X_1 un module libre de base finie, et ainsi de suite.

On se propose de montrer les deux théorèmes:

Théorème 1.1 - Soit Λ un anneau local noethérien satisfaisant à la condition (P_n). Tout Λ-module de type fini possède une résolution libre, de type fini, et de longueur $\leq$ n. Plus précisément, pour toute suite exacte

$$X_{n-1} \xrightarrow{f} X_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_o \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

où les X_i sont libres de base finie, le noyau de f est un module libre (de base finie). [Lorsque n=1, f désigne l'application $X_0 \longrightarrow M$] .

Théorème 1.2. - Soit Λ un anneau comme dans le théorème 1. Si un Λ -module M de type fini possède une résolution libre de longueur $\leq$ p, alors, pour toute suite exacte

$$X_{p-1} \xrightarrow{f} X_{p-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où les X_i sont libres de base finie, le noyau de f est libre .

Ces théorèmes s'appliqueront notamment à l'anneu $K\{x_1, \ldots, x_n\}$, ainsi qu'à l'anneau des séries formelles $K[[x_1, \ldots, x_n]]$. On démontre, en fait, que les anneaux locaux pour lesquels le théorème 1 est vrai (pour un n convenable) sont les anneaux locaux réguliers, c'est-à-dire dont le complété est isomorphe à un anneau de séries formelles (cf. [15]).

On va donner, des théorèmes 1 et 2, une démonstration qui utilise les foncteurs $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B)$, où A et B désignent deux Λ -modules, et n un entier ≥ 0. (cf. [5]). On a seulement besoin de savoir ici que $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, B)$ est, pour chaque n, un Λ -module, foncteur covariant de A et B; que $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B)=0$ lorsque $n \geq 1$ et que l'un au moins des modules A et B est libre; que $\mathrm{Tor}_0^{\Lambda}(A,B)$ n'est autre que le produit tensoriel $A \otimes_{\Lambda} B$; que, pour toute suite exacte de Λ -modules:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0, \tag{1.2}$$

on a des applications linéaires

$$\delta_n : \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A'',B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A',B)$$

qui dépendent fonctoriellement de la suite exacte (2); et que la suite illimitée

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A',B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A'',B) \xrightarrow{\delta_n}$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A',B) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A'',B) \longrightarrow A' \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow$$
$$\longrightarrow A \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow A'' \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. Propriété analogue lorsqu'on travaille sur la variable B, et qu'on considère une suite exacte

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0 .$$

La démonstration des théorèmes 1 et 2 va alors résulter de plusieurs lemmes:

Lemme 1 ("lemme de Nakayama"). - Soit Λ un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et soit $K = \Lambda/\mathfrak{m}$ le corps résiduel, considéré comme Λ-module. Soit M un Λ-module de type fini; si

$$M \otimes_{\Lambda} K = M/\mathfrak{m} \cdot M$$

est nul, alors $M=0$.

Par l'absurde: soit $(x_1, \ldots, x_k)$ un système minimal de générateurs du Λ-module M; puisque $M = \mathfrak{m} \cdot M$, on a

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i , \qquad \lambda_i \in \mathfrak{m} ,$$

d'où

$$(1 - \lambda_1) x_1 = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i x_i .$$

Or $1-\lambda_1$ a un inverse dans l'anneau local Λ, donc x_1 est combinaison linéaire de $x_2, \ldots, x_k$, contrairement à l'hypothèse de minimalité.

<u>Corollaire du lemme 1.</u> - Soient $x_i \in M$ des éléments en nombre fini, dont les images ξ_i dans l'espace K-vectoriel $M \otimes_\Lambda K = M/\mathfrak{m}.M$ engendrent cet espace vectoriel. Si le Λ-module M est de type fini, les x_i l'engendrent.

En effet, soit M' le sous-module de M engendré par les x_i; on a une suite exacte

$$M' \otimes_\Lambda K \xrightarrow{f} M \otimes_\Lambda K \longrightarrow (M/M') \otimes_\Lambda K \longrightarrow 0 ,$$

et puisque f est surjective par hypothèse, on a $(M/M') \otimes_\Lambda K = 0$, donc $M/M' = 0$ d'après le lemme 1, puisque M/M' est de type fini.

<u>Lemme 2</u> - <u>Soit</u> Λ <u>un anneau local, de corps résiduel</u> K. <u>Pour qu'un</u> Λ<u>-module</u> Y, <u>de type fini, soit libre, il faut et il suffit que</u> $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(Y,K) = 0$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, on choisit des $y_i \in Y$ dont les images $\eta_i \in Y \otimes_\Lambda K$ forment une <u>base</u> de cet espace vectoriel; les y_i sont en nombre fini, et engendrent Y (corollaire du lemme 1). Soit X le Λ-module libre ayant pour base des éléments x_i en correspondance bijective avec les y_i; on a donc une application linéaire surjective $X \xrightarrow{f} Y$, qui par passage aux quotients induit un <u>isomorphisme</u> $X \otimes_\Lambda K \xrightarrow{g} Y \otimes_\Lambda K$. Soit N le noyau de f .

La suite exacte des foncteurs Tor donne ici:

$$\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(Y,K) \longrightarrow N \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow X \otimes_{\Lambda} K \xrightarrow{g} Y \otimes_{\Lambda} K .$$

Puisque g est un isomorphisme, et que $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(Y,K)=0$ par hypothèse, on obtient $N \otimes_{\Lambda} K=0$, donc (lemme 1) $N=0$; par suite, $f:X \to Y$ est un isomorphisme, et puisque X est libre, Y est libre.

C.Q.F.D.

Lemme 3. - Soit Λ un anneau local satisfaisant à la condition (P_n). Alors on a, pour tout Λ-module M,

(1.3) $$\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, \Lambda/J_k)=0 \quad \text{pour} \quad i > k,$$

et en particulier, pour $k=n$, ($J_n = \mathfrak{m}(\Lambda)$):

(1.4) $$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M,K) = 0 .$$

En effet, considérons, pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la suite exacte

(1.5) $$0 \longrightarrow \Lambda/J_{k-1} \xrightarrow{u_k} \Lambda/J_{k-1} \xrightarrow{v_k} \Lambda/J_k \longrightarrow 0 ,$$

où v_k est l'application canonique de Λ/J_{k-1} sur son quotient Λ/J_k, et u_k désigne la multiplication par x_k, qui par hypothèse est une injection. La suite exacte des Tor nous donne ici des suites exactes

$$(1.6)\qquad \mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, \Lambda/J_{k-1}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, \Lambda/J_k) \xrightarrow{\delta_i} \mathrm{Tor}_{i-1}(M, \Lambda/J_1$$

On va alors prouver (3) par récurrence sur k: c'est trivial si $k=0$, car $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, \Lambda)=0$ pour $i > 0$. Si (1.3) est vrai pour $k-1$ ($k \geqslant 1$), et si $i > k$, les deux termes extrêmes de la suite exacte (1.6) sont nuls, donc le terme médian est nul.

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.1. Nous avons, par hypothèse, des suites exactes

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \longrightarrow Y_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow 0
\end{array}$$

où $X_0, \ldots, X_{n-1}$ sont libres <u>de base finie</u>. On en déduit des suites exactes

$$\begin{array}{l}
\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(X_0, K) \to \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M, K) \to \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(Y_1, K) \to \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(X_0, K) \\
\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(X_1, K) \to \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(Y_1, K) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(Y_2, K) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(X_1, K) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(X_{n-1}, K) \to \mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(Y_{n-1}, K) \to \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(Y_n, K) \to \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(X_{n-1}, K)
\end{array}$$

Dans chacune de ces lignes, les termes extrêmes sont nuls, puisque les X_i sont des modules libres; on obtient donc

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M,K) \approx \mathrm{Tor}_{n}^{\Lambda}(Y_1,K) \approx \mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(Y_2,K) \approx \ldots \approx \mathrm{Tor}_{1}^{\Lambda}(Y_n,K).$$

Or, d'après le lemme 3, $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M,K)=0$. Donc

$$\mathrm{Tor}_{1}^{\Lambda}(Y_n,K) = 0 ,$$

et comme Y_n est de type fini, ceci entraîne que Y_n est libre (lemme 2).

Ceci démontre le théorème 1.

Démontrons enfin le théorème 1.2. Supposons l'existence de suites exactes

$$\begin{array}{l}
0 \to B_1 \to A_0 \to M \to 0 \\
0 \to B_2 \to A_1 \to B_1 \to 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 \to B_p \to A_{p-1} \to B_{p-1} \to 0 ,
\end{array}$$

où $A_0, \ldots, A_{p-1}$ et B_p sont <u>libres</u> (non nécessairement de type fini). En raisonnant comme ci-dessus, on trouve

$$\mathrm{Tor}_{p+1}^{\Lambda}(M,K) \approx \mathrm{Tor}_{p}^{\Lambda}(B_1,K) \approx \ldots \approx \mathrm{Tor}_{1}^{\Lambda}(B_p,K) = 0 .$$

Donc $\mathrm{Tor}_{p+1}^{\Lambda}(M,K) = 0$. Soit maintenant une suite exacte comme dans l'énoncé du théorème 2 (les X_i, pour $i \leq p-1$, étant libres de base finie), et soit Y_p le noyau de $X_{p-1} \to X_{p-2}$ (resp. de $X_0 \to M$ si $p=1$). Le même raisonnement que ci-dessus montre que

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{p+1}(M,K) \approx \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{1}(Y_p,K),$$

et par suite $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{1}(Y_p,K) = 0$; d'après le lemme 2, Y_p est libre, et le théorème 1.2 est démontré.

2. Préfaisceaux, faisceaux et espaces étalés.

On rappelle ici succinctement les notions essentielles; pour plus de détails on renvoie au livre de Godement [7] .

T désigne un espace topologique, donné une fois pour toutes. Un <u>préfaisceau</u> G de groupes abéliens, sur T, est défini par la donnée, pour chaque ouvert $U \subset T$, d'un groupe abélien $G(U)$, et pour tout couple d'ouverts (V,U) tel que $V \subset U$, d'un homomorphisme φ_{VU}: $G(U) \to G(V)$; on suppose que φ_{UU} est l'identité, et que, pour $W \subset V \subset U$, $\varphi_{WU} = \varphi_{WV} \circ \varphi_{VU}$. Un préfaisceau G est donc simplement un <u>foncteur contravariant</u> de la catégorie des ouverts de T (les morphismes étant les inclusions) dans la catégorie des groupes abéliens.

Si G et G' sont deux préfaisceaux, un morphisme $f: G \to G'$ est défini par la donnée, pour chaque ouvert U, d'un homomorphisme $f(U) : G(U) \longrightarrow G'(U)$, de telle manière que, si $V \subset U$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} G(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\varphi_{VU}"] & G'(U) \arrow[d, "\varphi'_{VU}"] \\ G(V) \arrow[r, "f(V)"] & G'(V) \end{tikzcd}$$

soit commutatif; f est donc un morphisme du foncteur contravariant G dans le foncteur contravariant G'.

Ces définitions s'appliquent aussi bien à d'autres catégories que celles des groupes abéliens; on peut notamment considérer des préfaisceaux d'anneaux (à élément unité), étant entendu que, dans la catégorie des anneaux, les homomorphismes d'anneaux doivent transformer l'élément unité en l'élément unité.

L'image d'un $x \in G(U)$ par $\varphi_{VU} : G(U) \to G(V)$ se note souvent $x \,|\, V$, et s'appelle la restriction de x à V.

Un faisceau de groupes abéliens (resp. d'anneaux, etc...) sur l'espace T est, par définition un préfaisceau G qui satisfait à la condition suivante:

(F) Si un ouvert U est réunion d'ouverts U_i, et si l'on se donne, pour chaque i, un $x_i \in G(U_i)$ de façon que

$$x_i \,\Big|\, U_i \cap U_j = x_j \,\Big|\, U_i \cap U_j \qquad \text{quels que soient i et j,}$$

alors il existe un $x \in G(U)$ et un seul, tel que

$$x \,\Big|\, U_i = x_i \qquad \text{pour tout i .}$$

Les faisceaux sur T forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux: si G et G' sont deux faisceaux, les morphismes $G \to G'$, dans la catégorie des faisceaux, sont les mêmes que dans la catégorie des préfaisceaux.

Les fonctions numériques différentiables, sur une variété différentiable T, donnent un exemple de faisceau d'anneaux: pour chaque ouvert U, G(U) est l'anneau des fonctions différentiables dans U; la condition (F) est satisfaite. De même, sur une variété analytique complexe, on a le faisceau des fonctions holomorphes, noté souvent $\mathcal{O}$: c'est un faisceau d'anneaux.

Définition: on appelle espace étalé sur T un couple (F, p), où

F est un espace topologique, et p: $F \longrightarrow T$ une application continue qui est localement un homéomorphisme (i.e.: chaque point $x \in F$ possède un voisinage ouvert U tel que la restriction de p à U soit un homéomorphisme de U sur un voisinage ouvert de p(x)).

L'espace T étant donné, les espaces étalés sont les objets d'une catégorie dont les morphismes $(F,p) \longrightarrow (F',p')$ sont les applications continues $f : F \longrightarrow F'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & F' \arrow[dl, "p'"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

(autrement dit, f doit appliquer la fibre $F_t = p^{-1}(t)$ dans la fibre $F'_t = p'^{-1}(t)$, quel que soit $t \in T$).

Le produit fibré de deux espaces étalés (F,p) et (F',p') est l'espace (F'',p''), où F'' désigne le sous-espace du produit $F \times F'$ formé des couples (x,x') tels que $p(x)=p'(x')$, et où p'' est définie par

$$p''(x,x') = p(x) = p'(x') .$$

Une section d'un espace étalé $p : F \longrightarrow T$ est, par définition, une application $s : T \longrightarrow F$ telle que $p \circ s$ soit l'identité de T. Si s est continue, c'est un homéomorphisme de T sur l'espace image $s(T) \subset F$.

Définition: on appelle espace étalé en groupes abéliens (sur T) un espace étalé (F,p) dans lequel chaque fibre F_t est munie d'une structure de groupe abélien (noté additivement), de façon que soient vérifiées les deux conditions suivantes :

(i) l'application $F \times_T F \longrightarrow F$, définie par la loi de composition dans chaque fibre, est continue (c'est donc un morphisme d'espaces étalés) ;

(ii) la section zéro (qui à chaque $t \in T$ associe l'élément neutre du groupe F_t) est continue.

On définit de même un espace étalé en anneaux (à élément unité) : chaque fibre F_t a une structure d'anneau, l'addition et la multiplication définissent deux applications continues $F \times_T F \longrightarrow F$, la section zéro et la section un sont des sections continues.

Les espaces étalés en groupes abéliens (resp. en anneaux) sur T sont les objets d'une catégorie, dont les morphismes sont les applications $f : F \longrightarrow F'$ qui sont des morphismes d'espaces étalés, et induisent en outre, pour chaque $t \in T$, un homomorphisme de groupes abéliens (resp. d'anneaux) $F_t \longrightarrow F'_t$.

On va définir deux foncteurs covariants Γ et L : le foncteur Γ fait passer de la catégorie des espaces étalés sur T à celle des faisceaux sur T, le foncteur L fait passer de la catégorie des préfaisceaux sur T à celle des espaces étalés sur T.

Le foncteur Γ : soit (F,p) un espace étalé en groupes abéliens (resp. en anneaux à élément unité) sur T; pour chaque ouvert $U \subset T$, l'ensemble $\Gamma(U,F)$ des sections continues $U \longrightarrow F$ est muni d'une structure de groupe abélien (resp. d'anneau à élément unité); pour $V \subset U$, on a un homomorphisme de restriction $\Gamma(U,F) \longrightarrow \Gamma(V,F)$. D'où un préfaisceau noté $\Gamma(\quad ,F)$, ou simplement $\Gamma(F)$. Il est immédiat que c'est un faisceau. De plus, si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme d'espaces étalés en groupes abéliens (resp. en anneaux), f induit, pour chaque ouvert U, un homomorphisme $\Gamma(U,F) \longrightarrow \Gamma(U,F')$ (à savoir celui qui, à chaque section continue $s : U \to F$, associe la section $f \circ s : U \to F'$), donc définit un morphisme $\Gamma(F) \to \Gamma(F')$. On a ainsi défini un foncteur Γ .

Le foncteur L : soit $G = (G(U), \varphi_{VU})$ un préfaisceau de groupes abéliens (resp. d'anneaux). Pour chaque $t \in T$, soit F_t le groupe abélien (resp. d'anneau)

$$\varinjlim_{U \ni t} G(U),$$

limite inductive des G(U) associés aux voisinages ouverts U de t, relativement aux homomorphismes φ_{VU}. Soient F la réunion des F_t ($t \in T$), et $p : F \to T$ la projection évidente. On va définir sur F une topologie qui fera de (F,p) un espace étalé en groupes abéliens (resp. en anneaux). Pour chaque ouvert $U \subset T$, et chaque $\xi \in G(U)$, soit

$$s_\xi : U \to F$$

l'application qui, à chaque $t \in U$, associe l'image de ξ dans la limite inductive F_t ; s_ξ est une section de F au-dessus de U. Définissons, sur F, la topologie la plus fine rendant ces sections continues; pour cette topologie, les $s_\xi(U)$ forment un système fondamental d'ouverts de F, et on vérifie que (F,p) est alors un espace étalé en groupes abéliens (resp. anneaux). Soit maintenant $G \to G'$ un morphisme de préfaisceaux; les homomorphismes $F_t \to F'_t$ obtenus par passage à la limite inductive définissent un morphisme $F \to F'$ d'espaces étalés en groupes abéliens (resp. en anneaux). Ceci achève de définir le foncteur L .

Avec les notations précédentes, l'application $\xi \longrightarrow s_\xi$ est un homomorphisme du groupe (resp. anneau) G(U) dans le groupe (resp. anneau) des sections continues du faisceau F au-dessus de U :

$$G(U) \longrightarrow \Gamma(U, L(G)) .$$

Quand U varie, ces homomorphismes définissent un morphisme de préfaisceaux : $G \longrightarrow \Gamma L(G)$. Le faisceau $\Gamma L(G)$ s'appelle le faisceau associé à G .

Soit maintenant F un espace étalé quelconque en groupes abéliens (resp. anneaux). Si $f : L(G) \longrightarrow F$ est un morphisme d'espaces étalés en groupes abéliens (resp. anneaux), le morphisme composé

$$G \longrightarrow \Gamma L(G) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(F)$$

est un morphisme de préfaisceaux; d'où une application

$$(2.1) \qquad \mathrm{Hom}_{\text{ét.}}(L(G), F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{préf.}}(G, \Gamma(F)) ;$$

elle est naturelle vis-à-vis des morphismes $G \longrightarrow G'$ et $F \longrightarrow F'$. On vérifie aussitôt que l'application (2.1) est une bijection. Elle fait donc des foncteurs L et Γ des foncteurs adjoints au sens de Kan. En particulier, prenons $G = \Gamma(F)$ dans (2.1); au second membre, on a un élément privilégié de $\mathrm{Hom}(\Gamma(F), \Gamma(F))$, à savoir le morphisme identique; alors (2.1) lui associe un morphisme

$$(2.2) \qquad L\,\Gamma\,(F) \longrightarrow F\,,$$

défini naturellement pour tout espace étalé F. On prouve facilement que (2.2) est un <u>isomorphisme d'espaces étalés.</u> D'autre part, lorsque G est un faisceau, le morphisme $G \longrightarrow \Gamma\, L\,(G)$ est un <u>isomorphisme de faisceaux.</u>

De tout ceci il résulte que si on considère L comme un foncteur de la catégorie des <u>faisceaux</u> dans la catégorie des espaces étalés, les foncteurs L et Γ sont <u>inverses l'un de l'autre</u> (i.e. : on a un isomorphisme naturel de $L\Gamma$ avec l'identité, et un isomorphisme naturel de ΓL avec l'identité). Ceci définit une <u>équivalence de catégories</u> entre la catégorie des faisceaux de groupes abéliens (resp. d'anneaux) sur T, et la catégorie des espaces étalés en groupes abéliens (resp. en anneaux) sur T.

Désormais, par abus de langage, on dira "faisceau" au lieu d' "espace étalé". Tantôt le point de vue des faisceaux est plus commode, tantôt c'est le point de vue des espaces étalés. Par exemple, si T est une variété analytique complexe, on confondra le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes, avec l'espace étalé en anneaux $\mathcal{O}_t$ ($\mathcal{O}_t$ étant l'anneau des <u>germes</u> de fonctions holomorphes au point $t \in T$).

<u>Faisceau constant</u> : soit g un groupe abélien. On va définir le faisceau constant de groupe g, sur l'espace topologique T, en adoptant par exemple le point de vue des espaces étalés: on munit g de la topologie discrète, on prend pour F l'espace topologique produit $T \times g$, pour p la première projection $T \times g \longrightarrow T$; chaque fibre s'identifie à g, ce qui définit la structure de groupe abélien des fibres. On note aussi g le faisceau constant défini par g. On définit de même le faisceau constant

associé à un anneau.

On dit qu'un faisceau sur T est trivial s'il est isomorphe à un faisceau constant.

3. Faisceau de modules sur un faisceau d'anneaux.

Désormais, on se donne un espace topologique T et un faisceau d'anneaux A (il s'agit d'anneaux commutatifs à élément unité). On adopte le point de vue des espaces étalés, bien qu'on emploie le mot "faisceau".

Définition : on appelle faisceau de A-modules un faisceau de groupes abéliens F, muni de la donnée, pour chaque $t \in T$, d'une structure de A_t-module sur la fibre F_t ; ces données sont assujetties à la condition suivante : l'application

$$A \times_T F \longrightarrow F$$

définie par la multiplication, dans chaque fibre F_t, par les scalaires de A_t, est continue.

Si F et F' sont deux faisceaux de A-modules, on appelle morphisme $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de faisceaux tel que, pour chaque $t \in T$, l'application $f_t : F_t \longrightarrow F'_t$ soit A_t-linéaire.

Les faisceaux de A-modules forment ainsi une catégorie. Elle possède un élément privilégié : le faisceau A lui-même, considéré comme faisceau de A-modules (chaque anneau A_t étant considéré comme A_t-module au moyen de la loi de multiplication).

La théorie des faisceaux de A-modules contient, comme cas particulier, celle des faisceaux de groupes abéliens : elle correspond au cas où A est le faisceau constant Z (anneau des entiers).

Soit F un faisceau de A-modules (on adopte ici le point de vue des espaces étalés); un sous-faisceau F' est un sous-espace ouvert de l'espace étalé $F \xrightarrow{p} T$, tel que, pour chaque $t \in T$, la fibre F'_t soit un sous-module du A_t-module F_t. Alors l'application $A \times_T F \to F$ définit, par restriction, une application $A \times_T F' \to F'$ qui fait de F' un faisceau de A-modules.

Soient F un faisceau de A-modules, et F' un sous-faisceau comme ci-dessus. Le faisceau-quotient F/F' est défini comme suit : sa fibre au-dessus de t est le A_t-module quotient F_t/F'_t, et sa topologie est la topologie-quotient de celle de F, pour l'application canonique $F \to F/F'$. On vérifie que F/F' est bien un faisceau de A-modules, et que la propriété suivante a lieu : pour tout $t \in T$, et toute section continue $s : U \to F/F'$ au-dessus d'un ouvert U contenant t, il existe un ouvert V tel que $t \in V \subset U$, et une section continue σ : $V \to F$, telle que la section composée $V \xrightarrow{\sigma} F \to F/F'$ soit égale à la restriction de s à V. En revanche, il n'existe pas nécessairement de section continue $U \to F$ telle que la composée $U \to F \to F/F'$ soit égale à s.

Noyau, image, conoyau : soit $u : F \to G$ un morphisme de faisceaux de A-modules (sur l'espace T). Pour chaque $t \in T$, soit $\operatorname{Ker} u_t \subset F_t$ le noyau de l'application A_t-linéaire $u_t : F_t \to G_t$. On vérifie que les $\operatorname{Ker} u_t$, quand t parcourt T, forment un sous-faisceau de F; on l'appelle le noyau du morphisme u, et on le note Ker u. De même, la collection des $\operatorname{Im} u_t \subset G_t$ est un sous-faisceau de G, appelé l'image du morphisme u, et noté Im u. Enfin, le faisceau quotient G/Im u s'appelle le conoyau de u, et se note Coker u.

Soit $F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H$ une suite de faisceaux de A-modules et de morphismes. On dit que c'est une suite exacte si

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v .$$

Ceci exprime que, pour chaque $t \in T$, la suite de A_t-modules et d'application A_t-linéaires

$$F_t \xrightarrow{u_t} G_t \xrightarrow{v_t} H_t$$

est exacte.

Si $u : F \to G$ est un morphisme, on a les deux suites exactes

$$0 \to \mathrm{Ker}\, u \to F \to \mathrm{Im}\, u \to 0 ,$$
$$0 \to \mathrm{Im}\, u \to G \to \mathrm{Coker}\, u \to 0 ,$$

qui fournissent la décomposition canonique du morphisme u.

Enfin, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de faisceaux de A-modules. On appelle somme directe de cette famille, et on note $\bigoplus_{i \in I} F_i$, le faisceau dont chaque fibre est la somme directe $\bigoplus_{i \in I} (F_t)_i$, muni d'une topologie évidente.

Exemples de faisceaux de A-modules et de morphismes.

Exemple 1 : soit T une variété différentiable C^{∞}; soit $\mathbf{R}$ le faisceau constant défini sur T par l'anneau (corps) des nombres réels, et soit, pour chaque entier $n \geqslant 0$, Ω^n le faisceau des formes différentielles (réelles) de degré n, et de classe C^{∞}. On définit la suite de morphismes

$$(3.1) \qquad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \dots \to \Omega^n \xrightarrow{d} \Omega^{n+1} \to \dots$$

où d est induit par l'opération de différentiation extérieure des formes différentielles, et i est l'inclusion (qui, à tout élément $c \in \mathbb{R}$, associe le germe de fonction constant égale à c). La suite (3.1) est une <u>suite exacte,</u> en vertu du théorème classique de Poincaré qui affirme que toute forme différentielle ω de degré $n \geq 1$, dans un ouvert U, telle que $d\omega = 0$, est, au voisinage de chaque point de U, égale à la différentielle extérieure d'une forme de degré n-1.

<u>Exemple 2</u> : T désigne une variété analytique complexe, $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes; soit $\Omega^{p,q}$ le faisceau des formes différentielles (complexes) de type (p,q), c'est-à-dire qui, avec des coordonnées locales complexes $z_1, \dots, z_n$, s'expriment comme sommes de formes

$$f(z)\, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \quad ,$$

f étant de classe C^{∞}. Soit d'' l'opérateur de différentiation extérieure partielle (noté aussi souvent $\bar{\partial}$) qui, à chaque forme ω de type (p,q), associe la composante de type (p,q+1) de $d\omega$. On a la suite de faisceaux

$$(3.2) \qquad 0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{j} \Omega^{0,0} \xrightarrow{d''} \Omega^{0,1} \xrightarrow{d''} \dots$$

$$\dots \to \Omega^{0,n} \xrightarrow{d''} \Omega^{0,n+1} \to \dots$$

Le morphisme j est défini par l'inclusion de l'anneau des fonctions holomorphes dans l'anneau des fonctions complexes de classe C^{∞}; on sait que si f est une fonction complexe de classe C^{∞} dans un ouvert U, la condition $d''f=0$ exprime que f est holomorphe. La suite $\mathcal{O} \xrightarrow{j} \Omega^{0,0} \xrightarrow{d''} \Omega^{0,1}$ est donc exacte. De plus, si on considère tous les faisceaux de la suite (3.2) comme des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules, les morphismes d'' sont des morphismes dans la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules, puisque $d''f = 0$ pour une fonction holomorphe f. Enfin, la suite (3.2) est une suite exacte, en vertu du théorème de Grothendieck-Dolbeault, qui est pour d'' l'analogue du théorème de Poincaré pour d : si une forme différentielle ω de type (p,q) ($q \geqslant 1$), dans un ouvert U, satisfait à $d''\omega = 0$, alors, au voisinage de chaque point de U, il existe une forme différentielle $\bar{\omega}$ de type (p,q-1), telle que $d''\bar{\omega} = \omega$.

Il n'est pas possible de donner ici la démonstration de ce résultat; mais, en raison de son importance, on va énoncer deux théorèmes précis, dont il résulte :

Théorème 3.1. - Considérons, dans l'espace $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}\times\ldots\times\mathbf{C}$, le produit $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ de n compacts K_i (un dans chaque espace facteur $\mathbf{C}$). Soit ω une forme différentielle de type (p,q) ($q \geqslant 1$) et de classe C^k ($n-q < k \leq +\infty$) au voisinage de K. Si $d''\omega = 0$ au voisinage de K, il existe, dans un voisinage de K (éventuellement plus petit), une forme différentielle $\bar{\omega}$, de type (p,q-1) et de classe $C^{k-(n-q)}$, telle que $d''\bar{\omega} = \omega$ au voisinage de K.

Ce théorème se prouve, par un procédé de récurrence, à partir du lemme suivant :

Lemme. - Soit f(z) une fonction d'une variable complexe z, bornée et de classe C^k ($k \geqslant 1$) dans un ouvert borné $D \subset \mathbf{C}$. Alors l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{f(t)\, dt \wedge d\bar{t}}{t - z} = g(z)$$

a un sens, la fonction $g(z)$ est bornée dans D, de classe C^k, et on a $d''g = f(z)d\bar{z}$. Si en outre f est fonction de classe C^h de certains paramètres réels (resp. est fonction holomprphe de certains paramètres complexes), il en est de même de g.

Théorème 3.2. - Considérons, dans l'espace $\mathbf{C}^n$, le produit $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ de n ouverts U_i (un dans chaque facteur $\mathbf{C}$). Soit ω une forme différentielle de type (p,q) ($q \geq 1$) et de classe C^∞ dans U, telle que $d''\omega = 0$. Alors il existe, dans U, une forme différentielle ϖ, de type (p,q-1) et de classe C^∞, telle que $d''\varpi = \omega$ dans U.

Ce théorème se déduit du théorème 3.1 en appliquant ce dernier à des produits de compacts $K_i \subset U_i$, puis en faisant un passage à la limite qui utilise des théorèmes d'approximation pour les fonctions holomorphes. Si on ne veut pas utiliser le théorème d'approximation de Runge dans le cas le plus général, on peut se borner à prouver le théorème 3.2 dans le cas où les U_i sont des disques ouverts de $\mathbf{C}$; ce cas suffit pour la suite, et les théorèmes A et B (voir ci-dessous) permettront ensuite de récupérer le théorème 3.2 dans le cas général.

4. Faisceaux cohérents.

Comme au n°. 3, on considère, sur l'espace T, des faisceaux de A-modules, A étant un faisceau cohérent d'anneaux. Si F est un tel faisceau, un morphisme $f : A \longrightarrow F$ est défini par la donnée de la section continue $u \in \Gamma(T,F)$, image de la section-unité de A par f; u peut être choisie arbitrairement, et définit, pour chaque $t \in T$, l'application $f_t : A_t \longrightarrow F_t$ par A_t-linéarité.

Désignons, pour p entier > 0, par A^p le faisceau de A-modules, somme directe de p faisceaux isomorphes à A. Un morphisme $A^p \longrightarrow F$ est défini par la donnée de p sections continues de F.

Pour que $f : A^p \longrightarrow F$ soit surjectif, c'est-à-dire de conoyau 0, il faut et il suffit que les p sections $s_1,\ldots,s_p \in \Gamma(X,F)$ qui définissent f jouissent de la propriété suivante : pour tout $t \in T$, tout élément de F_t est combinaison linéaire, à coefficients dans A_t, de $s_1,\ldots,s_p$ (ou, plus exactement, des images de $s_1,\ldots,s_p$ par l'application canonique $\Gamma(X,F) \longrightarrow F_t$).

Dans ce qui suit, nous suivons le mode d'exposition dû à Serre [13] .

Définition : un faisceau F de A-modules est de type fini si tout point $t \in T$ possède un voisinage ouvert U jouissant de la propriété suivante: il existe un entier p et un morphisme surjectif $(A|U)^p \longrightarrow F|U$ ($F|U$ désigne la restriction du faisceau F au sous-espace $U \subset T$: de même pour $A|U$).

La propriété, pour un faisceau de A-modules, d'être de type fini, a donc un caractère local.

Définition : un faisceau F de A-modules est dit cohérent s'il est de type fini, et s'il satisfait en outre à la condition

(a) pour tout ouvert $U \subset T$, et tout morphisme $(A|U)^p \longrightarrow F|U$, le noyau de ce morphisme est un faisceau de type fini (dans U).

La propriété, pour un faisceau, d'être cohérent, a un caractère local.

Tout sous-faisceau de type fini d'un faisceau cohérent est cohérent : c'est trivial, d'après la condition (a).

Toute extension d'un faisceau cohérent par un faisceau cohérent est un faisceau cohérent : cela signifie que si on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0 ,$$

et si F' et F'' sont cohérents, F est cohérent. En particulier, la somme directe de deux faisceaux cohérents (donc d'un nombre fini de faisceaux cohérents) est un faisceau cohérent.

Soit $u : F \longrightarrow G$ un morphisme, F et G étant cohérents. Alors $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Coker} u$ sont des faisceaux cohérents.

Toutes ces propriétés se prouvent sans difficulté (cf. [13]).

Elles permettent de travailler avec les faisceaux cohérents: en fait, ils forment une "catégorie abélienne".

L'intérêt de la notion de faisceau cohérent est que ceux-ci permettent de passer de propriétés ponctuelles à des propriétés locales. Par exemple :

Proposition 4.1. - Soit $F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H$ une suite de faisceaux cohérents et de morphismes. Si, en un point t, la suite $F_t \xrightarrow{u_t} G_t \xrightarrow{v_t} H_t$ est exacte, il en est de même en tous les points suffisamment voisins.

En effet, le faisceau $\operatorname{Ker}(v \circ u)$ est un faisceau cohérent M; c'est un sous-faisceau de F; le faisceau cohérent F/M est nul au point t par hypothèse, donc il est nul en tout point t' assez voisin de t (parce qu'il est de type fini). Cela signifie que $v_{t'} \circ u_{t'} = 0$ pour t' assez voisin de t, donc que Im u $\subset$ Ker v dans un voisinage de t. Dans ce voisinage, Ker v/Im u est un faisceau cohérent ; ce faisceau est nul au point t, donc nul dans un voisinage de t.

C.Q.F.D.

Jusqu'à présent, rien ne garantit l'existence de faisceaux cohérents, en dehors du faisceau nul. Mais supposons que le faisceau A soit cohérent (comme faisceau de A-modules). Alors, pour tout entier $p > 0$, A^p est cohérent; le conoyau de tout homomorphisme $A^q \longrightarrow A^p$ est donc un faisceau cohérent. On obtient de cette manière tous les faisceaux cohérents, au moins localement (et à un isomorphisme près). Autrement dit, si F est cohérent, tout $t \in T$ possède un voisinage ouvert U dans lequel il existe une suite exacte

$$(A|U)^q \longrightarrow (A|U)^p \longrightarrow F|U \longrightarrow 0 \ ;$$

cela résulte des définitions, et c'est vrai même sans supposer que A soit cohérent.

Explicitons la condition : "A est cohérent". Cela exprime que A satisfait à la condition (a) (car A est évidemment de type fini) : quel que soit l'ouvert $U \subset T$, et quelles que soient les sections continues $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, A)$ en nombre fini, le faisceau des relations entre $s_1, \ldots, s_p$ est de type fini dans U. [On appelle "faisceau des relations" le sous-faisceau $N \subset A^p$ tel que, en chaque point $t \in U$, N_t se compose des $(c_1, \ldots, c_p) \in (A_t)^p$ satisfaisant à $\sum_{i=1}^{p} c_i s_i = 0$