Harald Fritzsch

Quantenfeld-theorie

Wie man beschreibt, was die Welt im Innersten zusammenhält

SACHBUCH

Springer Spektrum

Quantenfeldtheorie – Wie man beschreibt, was die Welt im Innersten zusammenhält

Kennen wir die „Theorie für alles“ bereits oder sind wir noch weit von ihr entfernt?
Gibt es bei höchsten Energien tatsächlich eine „Große Vereinigung“ aller fundamentalen Kräfte?
Und welche Rolle spielen die Stringtheorie und das Higgs-Boson?

Harald Fritzsch nimmt die Leser mit auf eine mathematische Reise durch die Welt der Quantenfeldtheorie und bietet so einen großen Überblick über den aktuellsten Stand der modernen Theoretischen Physik.

Prof. Harald Fritzsch (*10. Februar 1943 in Zwickau) ist ein theoretischer Physiker, der vor allem wichtige Beiträge zur Theorie der Quarks, zur Entwicklung der Quantenchromodynamik und zur Großen Vereinheitlichung des Standardmodells der Elementarteilchen geleistet hat.

Harald Fritzsch

Quantenfeldtheorie – Wie man beschreibt, was die Welt im Innersten zusammenhält

Springer Spektrum

Harald Fritzsch
Physik-Department
Ludwig-Maximilians-Universität
München, Deutschland

ISBN 978-3-662-45245-5 ISBN 978-3-662-45246-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-45246-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Illustrationen: Stephan Meyer
Fotos: nasa.gov

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die klassische Mechanik gilt für Körper, deren Geschwindigkeit kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit. Bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit muss die klassische Mechanik durch die relativistische Mechanik von Albert Einstein ersetzt werden.

In der Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich – sie ist eine Naturkonstante:

$$c = 299.792.458\,\mathrm{m/sec}.$$

In bewegten Bezugssystemen ist der Lauf der Zeit anders als in einem ruhenden System. Die Zeit ist „gedehnt“ (Zeitdilatation).

In der Relativitätstheorie sind Energie und Masse äquivalent. Für eine ruhende Masse gilt die Formel $E = mc^2$. Die Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten zwischen den verschiedenen Bezugssystemen sind durch die Lorentz-Transformationen gegeben.

Hermann Minkowski zeigte 1908, dass in der Relativitätstheorie Raum und Zeit zur vierdimensionalen Raum-Zeit vereinigt werden. Lorentz-Transformationen sind Drehungen der vierdimensionalen Raum-Zeit. 1908 sagte Minkowski auf einer Tagung der Gesellschaft Deutscher

H. Fritzsch, *Quantenfeldtheorie – Wie man beschreibt, was die Welt im Innersten zusammenhält*, DOI 10.1007/978-3-662-45246-2_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Naturforscher und Ärzte in Köln einen Satz, der in die Geschichte einging: „Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren."

Die Elektrodynamik ist das Teilgebiet der Physik, das sich mit elektrischen Ladungen und mit elektromagnetischen Feldern beschäftigt. Die Theorie der klassischen Elektrodynamik wurde von James Clerk Maxwell in der Mitte des 19. Jahrhunderts aufgestellt. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik werden als Maxwell'sche Gleichungen bezeichnet.

Die Quantenphysik startete 1900 mit einer Arbeit von Max Planck über die Quantelung der Energie bei elektromagnetischen Prozessen. Die Energie einer elektromagnetischen Welle ist gegeben durch das Produkt einer Konstanten h und der Frequenz. Die Konstante h wird heute als Planck'sche Konstante bezeichnet.

Albert Einstein schlug im Jahr 1905 eine Quantisierung der Energie des Lichtes vor, um den fotoelektrischen Effekt zu erklären. Licht besteht aus Teilchen, den Lichtquanten oder Photonen. Die Energie eines Photons ist gegeben durch das Produkt der Planck'schen Konstanten und der Frequenz.

1911 erkannte Ernest Rutherford, dass die Atome aus einem massiven Atomkern bestehen, der umgeben ist von einer Wolke von Elektronen. Niels Bohr kombinierte dieses Atommodell mit Einsteins Idee der Photonen. 1913 konnte er die Spektrallinien des Wasserstoffatoms mithilfe der Quantenphysik erklären.

1924 veröffentlichte Louis de Broglie seine Theorie der Materiewellen. Ein Teilchen, etwa ein Elektron, ist zugleich auch eine Welle. Die Umlaufbahn des Elektrons um den Atomkern wurde als stehende Materiewelle interpretiert.

Die moderne Quantenmechanik begann 1925 mit der Formulierung der Matrizenmechanik durch Werner Heisenberg und Wolfgang Pauli. Wenige Monate später fand Erwin Schrödinger die Wellenmechanik und die nach ihm benannte Wellengleichung. Er interpretierte die Materiewellen von de Broglie als Wellenfunktionen der Teilchen. Kurz darauf konnte Schrödinger nachweisen, dass sein Ansatz äquivalent zur Matrizenmechanik von Heisenberg und Pauli ist.

1927 wurde von Niels Bohr und Werner Heisenberg die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik eingeführt. Sie stützte sich auf den Vorschlag von Max Born, das Quadrat der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte zu interpretieren.

1925 konstruierten Werner Heisenberg, Max Born und Pascual Jordan die erste Quantenfeldtheorie. Sie betrachteten die Freiheitsgrade eines Feldes als harmonische Oszillatoren und benutzten die kanonische Quantisierung für diese Oszillatoren. 1929 gelang es Heisenberg und Pauli, das elektromagnetische Strahlungsfeld zu quantisieren. Daraus entwickelte sich die Quantenelektrodynamik. Die elektromagnetischen Kräfte werden durch den Austausch von Photonen erzeugt.

1928 vereinigte Paul Dirac die Quantenmechanik mit der Speziellen Relativitätstheorie. Hierzu führte er eine neue relativistische Wellengleichung ein, die Dirac-Gleichung. In dieser Gleichung treten nur erste Ableitungen nach den Raum-Zeit-Koordinaten auf.

Dirac entdeckte, dass seine Gleichung nur konsistent war, wenn es zum Elektron ein Antiteilchen gibt, das Positron. Dieses positiv geladene Teilchen wurde 1932 in der kosmischen Strahlung gefunden.

1930 erkannte Wolfgang Pauli, dass der Energieerhaltungssatz und der Impulserhaltungssatz beim radioaktiven Beta-Zerfall nur dann erfüllt sind, wenn bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton und ein Elektron zusätzlich ein drittes, bis dahin unbekanntes Teilchen entsteht. Da niemand zu diesem Zeitpunkt dieses Teilchen nachweisen konnte, postulierte Pauli ein unbekanntes Teilchen. Der italienische Physiker Enrico Fermi nannte das Teilchen später „kleines Neutron": *Neutrino*. 1956 wurde das Neutrino an einem Kernreaktor in den USA entdeckt.

Die Quantenelektrodynamik ist eine Eichtheorie. Die Photonen sind Eichbosonen. Die Eichinvarianz der Elektrodynamik wurde 1918 von Hermann Weyl entdeckt. Die Eichgruppe der Quantenelektrodynamik ist die Gruppe U(1) der Phasentransformationen.

Ein Problem in der Quantenelektrodynamik waren auftretende Divergenzen. Ein Elektron kann virtuelle Photonen emittieren und wieder absorbieren. Wenn man diesen Prozess berechnet, findet man ein divergentes Resultat – die Masse und die Ladung des Elektrons sind unendlich.

Das Problem der Divergenzen wurde etwa um 1950 durch die Idee der Renormierung gelöst (Julian Schwinger, Richard Feynman, Freeman Dyson). Ein Elektron ohne elektromagnetische Wechselwirkung besitzt eine „nackte" Masse und eine „nackte" Ladung. Nach Einführung der Wechselwirkung erhält man unendlich große Werte für die Masse und Ladung. Die nackte Masse und die nackte Ladung werden als „minus unendlich“ angenommen, und die Summen aus beiden Termen ergeben dann die gemessenen Werte für die Masse und die Ladung. Man konnte zeigen, dass damit alle Divergenzen absorbiert werden können.

In der Quantenelektrodynamik kann man alle Prozesse sehr genau berechnen, z. B. das anomale magnetische Moment des Elektrons. Die Differenz zwischen dem gemessenen und dem experimentellen Wert ist kleiner als 10^{-8}!

1953 wurde von Wolfgang Pauli eine Eichtheorie entwickelt, bei der die Eichgruppe die Isospingruppe SU(2) war. Pauli hat diese neue Theorie nicht publiziert, da er keine Möglichkeit sah, eine Masse für die Eichbosonen einzuführen. Ein Jahr später wurde diese Theorie von Chen Ning Yang und Robert Mills veröffentlicht. Beide arbeiteten am Institute for Advanced Study in Princeton. Die Eichbosonen dieser Theorie hatten keine Masse.

In den Sechzigerjahren des 20. Jahrhunderts wurden die Quantenelektrodynamik und die schwachen Wechselwirkungen zu einer Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung vereinigt (Shelley Glashow, Abdus Salam, Steven Weinberg). Die schwachen Kräfte werden durch den Austausch von massiven schwachen Bosonen vermittelt.

Die Massen der schwachen Bosonen werden durch eine spontane Symmetriebrechung erzeugt. Dieser „Higgs-Mechanismus“ wurde 1964 von Robert Brout, Francois Englert, Gerald Guralnik, Carl Hagen, Peter Higgs und Thomas Kibble eingeführt. 1971 zeigten Gerard t’Hooft und Martinus Veltman, dass eine solche Eichtheorie renormierbar ist, wenn die Massen der Eichbosonen durch den Higgs-Mechanismus erzeugt werden.

Es gibt kein einfaches Gesetz für die Kräfte in den Atomkernen. Die Atomkerne bestehen aus den Nukleonen. Diese sind ebenfalls zusammengesetzte Systeme – die Bausteine der Nukleonen sind die Quarks. Ein Nukleon besteht aus drei Quarks. Zwei verschiedene Quarks sind notwendig für die Beschreibung der Nukleonen und der Atomkerne, die u-Quarks und die d-Quarks.

Die Kräfte zwischen den Quarks werden durch die Theorie der Quanten-Chromodynamik (QCD) beschrieben, aufgestellt 1972 von Harald Fritzsch und Murray Gell-Mann. Sie werden durch den Austausch von masselosen Kraftteilchen, den „Gluonen", erzeugt. Sowohl die Quarks als auch die Gluonen existieren nicht als freie Teilchen – sie sind permanent in den Nukleonen gebunden. Man kann die Quarks indirekt in den Atomkernen beobachten, durch die Streuung von Elektronen oder Myonen an den Atomkernen. Heute wissen wir, dass die QCD die korrekte Theorie der starken Wechselwirkungen und der Kernkräfte ist.

Die heutige Standardtheorie der Elementarteilchen ist die Vereinigung der Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung und der Quanten-Chromodynamik. Die fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur mit Ausnahme der Gravitation werden durch Eichtheorien beschrieben.

In unserem Universum gibt es sechs Quarks – die „up"-Quarks u, „down"-Quarks d, „strange"-Quarks s, „charm"-Quarks c, „bottom"-Quarks b und die „top"-Quarks t. Die stabile Materie besteht nur aus den u-Quarks und den d-Quarks. Die anderen vier Quarks sind Bausteine von instabilen Hadronen.

Neben dem Elektron gibt es noch zwei weitere elektrisch geladene Teilchen, das Myon und das Tauon, und drei neutrale Teilchen, die drei Neutrinos. Diese sechs Teilchen bezeichnet man als Leptonen.

Jeweils zwei Quarks und zwei Leptonen bilden eine Lepton-Quark-Familie. Das Elektron, sein Neutrino, das u-Quark und das d-Quark bilden die erste Familie. Das Myon, sein Neutrino, das s-Quark und das c-Quark sind die Bausteine der zweiten Familie. Die dritte Familie besteht aus dem Tauon, seinem Neutrino, dem b-Quark und dem t-Quark.

Bis heute ist unklar, warum die Leptonen und Quarks eine Masse besitzen und warum die Massen so unterschiedlich sind. Die Masse des Elektrons ist nur etwa 0,5 MeV, die Masse des t-Quarks ist etwa 174.000 MeV.

Es ist unklar, ob die Standardtheorie eine exakte Beschreibung der Teilchen und ihrer Wechselwirkungen darstellt oder nur eine gute Näherung ist. Mithilfe des Large Hadron Colliders (LHC) am CERN bei Genf versucht man seit 2012, die Physik jenseits des Standardmodells zu erkunden.

Viele Physiker nehmen an, dass bei sehr hohen Energien die elektroschwache Theorie und die Quanten-Chromodynamik zu einer Eichtheorie vereinigt werden – „große Vereinigung“ genannt. Eine interessante Möglichkeit ist die Eichtheorie mit der Eichgruppe SO(10), vorgeschlagen von Harald Fritzsch und Peter Minkowski (s. Kap. 16).

In einer vereinigten Theorie erscheinen die Leptonen und die Quarks zusammen in Darstellungen der Eichgruppe. Deshalb ist das Proton nicht stabil, sondern kann in ein Positron und Photonen zerfallen. Ein möglicher Zerfall ist:

$$\text{Proton} \rightarrow \text{Positron} + \text{neutrales Pion.}$$

Man sucht nach solchen Zerfällen mithilfe großer unterirdischer Detektoren, etwa durch den Detektor „Kamiokande" in Japan. Die heutige Grenze der Lebensdauer eines Protons liegt bei etwa 10^{32} Jahren.

Es könnte sein, dass die Leptonen und Quarks nicht punktförmig sind, sondern kleine eindimensionale Objekte, die man als *strings* bezeichnet. Die Vereinigung aller Wechselwirkungen, eingeschlossen die Gravitation, könnte im Rahmen einer Stringtheorie gelingen.

2 Mechanik

2.1 Klassische Mechanik

Die klassische Mechanik beschreibt das dynamische Verhalten von festen Körpern. Im Allgemeinen wirken auf einen Körper Kräfte, sodass sich seine Geschwindigkeit ständig ändert. Die Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, ist bestimmt durch die Kraft. Für einen Massepunkt gilt das Newton'sche Bewegungsgesetz:

$$m\ddot{\vec{q}} = \vec{F}.$$

Hier ist F die herrschende Kraft und q die Koordinate des Körpers. Beide Größen sind Vektoren im dreidimensionalen Raum. Die Kraft ist proportional der Beschleunigung, der zweifachen Ableitung der Koordinate nach der Zeit.

Die Bewegung eines Massenpunkts oder eines ausgedehnten starren Körpers ist bestimmt durch das Prinzip der kleinsten Wirkung. Aus diesem Prinzip leitet man die Bewegungsgleichungen ab.

H. Fritzsch, *Quantenfeldtheorie – Wie man beschreibt, was die Welt im Innersten zusammenhält*, DOI 10.1007/978-3-662-45246-2_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Betrachten wir als einfachstes Beispiel einen Massenpunkt, der sich zu der Zeit t am Punkt q befindet, und zur späteren Zeit T am Punkt Q. Die Lagrange-Funktion des Körpers ist gegeben durch die Differenz der kinetischen Energie T und der potenziellen Energie U, die ihrerseits von den verallgemeinerten Koordinaten und den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängen:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}).$$

Oftmals betrachtet man auch die Gesamtenergie des Systems, die sogenannte Hamilton-Funktion, gegeben durch die Summe der kinetischen Energie T und der potenziellen Energie U:

$$H = T(q, \dot{q}) + U(q, \dot{q}).$$

Die Wirkung S ist gegeben durch das Zeitintegral der Lagrange-Funktion:

$$S = \int_t^T L\,\mathrm{d}t.$$

Man betrachte das Wirkungsintegral aller möglichen Bahnkurven des Körpers. Die in der Natur realisierte Bahnkurve ist die Kurve, bei der die Wirkung ein Extremum ist, meistens ein Minimum, manchmal auch ein Maximum. Dann ändert sich die Wirkung nicht, wenn die Bahnkurve etwas variiert wird:

$$\begin{aligned} &q \Rightarrow q + \delta q \\ &\dot{q} \Rightarrow \dot{q} + \delta \dot{q} \\ &\delta S = 0. \end{aligned}$$

Die Änderung der Wirkung ist gegeben durch das folgende Integral:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right).$$

Der zweite Term kann umgeformt werden:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\delta q \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial q} \right).$$

Am Anfang und am Ende verschwindet die Variation der Koordinaten. Daraus folgt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \right) \cdot \delta q = 0.$$

Da die Variation beliebig ist, erhält man die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Wird das System durch mehrere unabhängige Koordinaten beschrieben, gilt eine solche Gleichung für jede Koordinate:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Die Energie eines Systems ist gegeben durch L und die Ableitungen von L:

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L.$$

Wir betrachten zwei Beispiele:

Freier Massenpunkt

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q})^2$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q} = 0.$$

Die Lösung ist eine geradlinig-gleichförmige Bewegung.

Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion des Oszillators:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 - \frac{1}{2}kq^2$$
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist eine Sinusfunktion:

$$q(t) = a \sin(\omega t + \phi)\,.$$

Die Amplitude a und die Phase hängen von den Anfangsbedingungen ab.

Physikalische Systeme ändern sich nicht bei speziellen Änderungen des Koordinatensystems, etwa bei Rotationen oder beim Übergang zu einem bewegten System, das sich gleichförmig zum Ausgangssystem bewegt. Diese Transformationen werden als „Galilei-Transformationen" bezeichnet.

Als Beispiel betrachten wir zwei verschiedene Koordinatensysteme K und K'. Das System K ist durch die kartesischen Koordinaten (x, y, z) beschrieben. Das neue System K' erhält man durch eine Drehung des Systems K um eine beliebige Drehachse, beschrieben durch eine orthogonale Matrix R:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir den Übergang von einem ruhenden Koordinatensystem K zu einem bewegten System K', das sich in Richtung der x-Koordinate bewegt. Zu der Zeit $t = 0$ sollen die Nullpunkte beider Systeme identisch sein. Zur Zeit t erhält man:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

2.2 Relativistische Mechanik

In der Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit eine konstante Geschwindigkeit: $c = 299.792.458$ m/sec. Die Geschwindigkeit eines massiven Körpers ist stets geringer als die Lichtgeschwindigkeit.

Die Transformation von einem Bezugssystem zu einem dazu gleichförmig bewegten Bezugssystem ist eine Lorentz-Transformation, also eine Transformation der vierdimensionalen Raum-Zeit. In der klassischen Mechanik gibt es eine Zeit t und die drei Dimensionen des Raumes x, y und z.

Die Raum-Zeit hat vier Dimensionen. Ein Vierervektor in der vierdimensionalen Raum-Zeit ist gegeben durch die Zeit und die drei Koordinaten des Raumes:

$$(ct, x, y, z).$$

Einen Punkt in der Raum-Zeit nennt man ein Ereignis – es findet am Raumpunkt (x, y, z) zu der Zeit t statt.

Die Bewegung eines Massenpunktes wird in der Raum-Zeit durch eine Weltlinie beschrieben, also eine kontinuierliche Folge von Ereignissen. Die Weltlinie eines ruhenden Körpers ist eine Gerade, die Weltlinie eines beschleunigten Körpers eine gekrümmte Kurve. Die Weltlinie eines masselosen Teilchens ist auf dem Lichtkegel lokalisiert – ein masseloses Teilchen, etwa ein Photon, bewegt sich stets mit Lichtgeschwindigkeit (s. Abb. 2.1).

Die Raum-Zeit ist keine Verallgemeinerung des dreidimensionalen Raumes auf vier Dimensionen. Im normalen dreidimensionalen Raum ist das Quadrat des Abstandes zwischen dem Punkt (X, Y, Z) und dem Punkt (x, y, z)

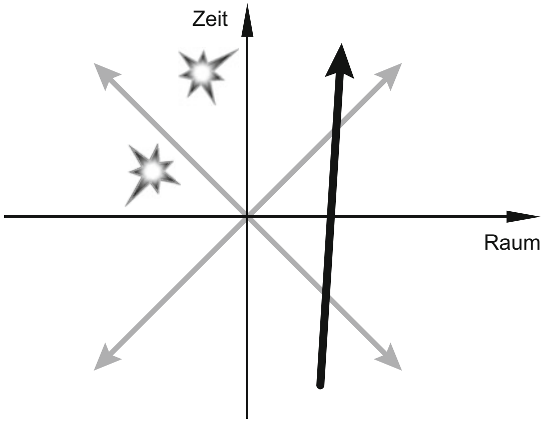

Abb. 2.1 Zweidimensionale Raum-Zeit. Der Lichtkegel ist durch zwei Linien beschrieben. Eingezeichnet sind die Weltlinie eines massiven Teilchens, das sich gleichförmig bewegt, und zwei Ereignisse. Das eine Ereignis ist raumartig zum Ursprung, das andere Ereignis ist zeitartig

durch die Summe der Quadrate der Koordinatendifferenzen gegeben:

$$l^2 = (X - x)^2 + \left(Y - y\right)^2 + (Z - z)^2 .$$

Bei einer Drehung des Raumes bleibt dieser Abstand invariant. Die Metrik des dreidimensionalen Raumes ist durch den metrischen Tensor gegeben:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 .$$

In der Raum-Zeit wird ein Ereignis durch einen Vierervektor der Raum-Zeit-Koordinaten beschrieben:

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z).$$

Man betrachte ein Lichtsignal, das zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Nullpunkt des Raumes emittiert wird. Zu einem späteren Zeitpunkt ist die kugelsymmetrische Wellenfront des Lichtes gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} c^2t^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\Rightarrow c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss auch in einem anderen Bezugssystem mit den Raum-Zeit-Koordinaten $(ct', x'. y', z')$ gelten:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0.$$

Daraus folgt:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2.$$

Eine Lorentz-Transformation beschreibt den Übergang zwischen den Bezugssystemen. Sie ist gegeben durch eine pseudo-orthogonale 4×4-Matrix:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{00} & l_{01} & l_{02} & l_{03} \\ l_{10} & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{30} & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Eine Lorentz-Transformation kann man als eine „Drehung“ in der vierdimensionalen Raum-Zeit interpretieren.

Das Quadrat des Abstandes zwischen dem Ereignis (T, X, Y, Z) und dem Ereignis (t, x, y, z) ist folgendes:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \left(c^2\,(T-t)^2 - (X-x)^2 - \left(Y-y\right)^2 - (Z-z)^2\right) \\
\mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.
\end{aligned}
$$

Die Lichtgeschwindigkeit c spielt also eine fundamentale Rolle für die Struktur der Raum-Zeit. Der relativistische Abstand zwischen zwei Ereignissen ändert sich bei Lorentz-Transformationen nicht:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\
&= c^2\,\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 = \mathrm{d}s'^2.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung für den relativistischen Abstand schreibt man mitunter auch mithilfe des metrischen Tensors:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu.$$

Der metrische Tensor ist gegeben durch eine diagonale Matrix:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand zwischen zwei Ereignissen kann sowohl positiv als auch negativ sein. Ein positiver Abstand heißt zeitartig, ein negativer Abstand ist raumartig.