Mathematik im Kontext

Sebastian Linden

Die Algebra des Omar Chayyam

2. Auflage

Springer Spektrum

Mathematatik im Kontext

Die Buchreihe Mathematik im Kontext publiziert Werke, in denen mathematisch wichtige und wegweisende Ereignisse oder Perioden beschrieben werden. Neben einer Beschreibung der mathematischen Hintergründe wird dabei besonderer Wert auf die Darstellung der mit den Ereignissen verknüpften Personen gelegt sowie versucht, deren Handlungsmotive darzustellen. Die Bücher sollen Studierenden und Mathematikern sowie an Mathematik Interessierten einen tiefen Einblick in bedeutende Ereignisse der Geschichte der Mathematik geben.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/8810

Sebastian Linden

Die Algebra des Omar Chayyam

2. Auflage

Springer Spektrum

Sebastian Linden
Braunschweig, Deutschland

ISSN 2191-074X ISSN 2191-0758 (electronic)
Mathematik im Kontext
ISBN 978-3-662-55346-6 ISBN 978-3-662-55347-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-55347-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
1.Aufl.: Erste Auflage erschienen unter: Linden, Sebastian: Die Algebra des Omar Chayyam, München: Edition Avicenna 2012

Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Das Weltrad, unter dem verdutzt wir stehen,
müsst ihr als Zauberlampe euch besehen;
die Sonne ist das Licht, die Welt das Haus,
und wir die Schatten, die sich wirbelnd drehen.


2012

Vorwort

Damals, als der Nahe Osten noch fern und Globalisierung eine Angelegenheit nur der wagemutigsten Handelsreisenden, der wissensdurstigsten Gelehrten und der mächtigsten Armeen war, da waren in Persien die Seldschukenfürsten an die Herrschaft über ein Reich gelangt, so gigantisch in seiner Ausdehnung, so vielfältig in seiner Kunst und so fortgeschritten in seiner Wissenschaft, wie es die Menschheit nur selten gesehen hat. Das vielleicht brillanteste Kind dieser Zeit, dessen Leben und Genie auch nach eintausend Jahren weltweit ausstrahlt und Bewunderer in aller Welt inspiriert, war der Universalgelehrte Omar Chayyam. Omar Chayyam brachte es in all jenen Gebieten, die die stetig Wundernden und Staunenden unter uns im Laufe der Zeit zu entdecken und zu bewandern bestrebt sind, zu großer Meisterschaft. Viel gerühmt sind seine Poesie, epochemachend seine Astronomie, gedanklich beweglich seine philosophischen Aufsätze, genial seine Beiträge zur Mathematik. Drei seiner mathematischen Texte sind erhalten. Zwei von ihnen behandeln die Klassifizierung und die geometrische Lösung algebraischer Gleichungen bis zum dritten Grad mithilfe von Kegelschnitten. Von diesen beiden Texten, von den Umständen ihrer Entstehung und von ihrem Autor berichtet dieses Buch.

Zur 2. Auflage

Für die vorliegende 2. Auflage habe ich Verbesserungen des historischen Teils vorgenommen, mein Vorgehen deutlicher dargestellt, Literatur ergänzt, manche Inhalte neu angeordnet und das Buch insgesamt klarer gegliedert. Als ungewöhnlich an dem vorliegenden Buch wird dem, der sich bereits mit der

Mathematik des islamischen Mittelalters beschäftigt hat, die Schreibweise der arabischen und persischen Eigennamen erscheinen. Diese ist auf intuitive Lesbarkeit angelegt und erhebt keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit. Im Sachverzeichnis am Ende des Buches gebe ich hinter der im Fließtext verwendeten Schreibweise andere gebräuchliche Transkriptionen in Klammern an sowie, durch ein Semikolon abgetrennt, die Transliteration gemäß der *Encyclopædia Iranica*. Auch die Übersetzungen von Chayyams Texten erheben keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit im Sinne einer kritischen Textausgabe. Daher habe ich für diese 2. Auflage auf die früheren Hinweise zur Transkription des persischen und arabischen Alphabets, zu den Eigennamen usw. verzichtet.

Die Zielsetzung des Buchs ist vielmehr, die Mathematik Omar Chayyams nachvollziehbar zu machen und sie aus der Person und ihrer Zeit heraus darzustellen. Meine Vorgehensweise fand ich während der Arbeit an der 2. Auflage in dem atmosphärischen Roman von Dževad Karahasan über Omar Chayyam und seine Esfahaner Zeit treffend beschrieben:

> Um eine Schlussfolgerung wirklich zu begreifen, musst du zumindest den Weg erahnen, der zu dieser Schlussfolgerung geführt hat, also die Logik des Mannes, der das gefolgert hat, weil das menschliche Urteil oder die Schlussfolgerung nicht zu trennen sind von dem, der sie ausgesprochen hat, vom Augenblick und den Umständen, unter denen das geschehen ist, schließlich von seinem Charakter und seinen Erfahrungen.

Die Logik von Chayyams mathematischen Beweisführungen freilich ist universell. Die Umstände, unter denen Omar Chayyam Mathematik betrieb, spielen jedoch erkennbar in seine Aufsätze hinein und waren tatsächlich ungewöhnlich. Im Augenblick von Chayyams Geburt hatte die islamische Kultur eine Blüte der Wissenschaften erlebt – Medizin, Philosophie, Astronomie und Mathematik hatten einen erstaunlichen Stand erreicht. Nun aber wurden die Tugenden der Vernunft immer weniger geachtet, stattdessen geächtet. Chayyams Lebenszeit markiert den Übergang zwischen einer ausgeprägten Kultur des Rationalen und einer sich festsetzenden Kultur der Unvernunft, des Traditionalismus, des geistigen Stillstands. Und so ist nicht nur Chayyams mathematisches Vermächtnis zeitlos, sondern auch seine Biografie ein stets aktuelles Lehrstück über die Gefahren, denen unsere Freiheit zum öffentlichen Gebrauch der Vernunft beständig ausgesetzt ist.

Braunschweig, Juni 2017 *Sebastian Linden*

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Abkürzungen

E Die *Elemente* von Euklid
Verwendungsbeispiel: Der 5. Satz des X. Buchs der Elemente wird abgekürzt als E:X§5.

D Die *Data* von Euklid
Verwendungsbeispiel: Der 4. Satz der Data wird abgekürzt als D:§4.

KS Die *Kegelschnitte* des Appollonius
Verwendungsbeispiel: Der 11. Satz des I. Buchs der Kegelschnitte wird abgekürzt als KS:I§11.

Algebra Die *Abhandlung über die Algebra und die Murhabala* von Omar Chayyam (Kapitel 6) wird oft einfach Algebra genannt.

Viertelkreis Die *Abhandlung über die Teilung eines Viertelkreises* von Omar Chayyam (Kapitel 5) wird oft einfach Viertelkreis genannt.

Teil I
Omar Chayyam in seiner Zeit

Kapitel 1
Überblick über Omar Chayyam und seine algebraische Arbeit

1.1 Omar Chayyam als Poet

Heute ist Omar Chayyam,[1] der wohl von 1048 bis 1121/22 lebte, vor allem als Dichter der *Rubaiyat* bekannt. Dies ist insofern kurios, als nicht geklärt werden konnte, ob er wenigstens einige der ihm zugeschriebenen, stets vierzeiligen Gedichte tatsächlich geschrieben hat (arabisch für «vierzeilig»: *rubaiyat*). Die Abb. 1.1 zeigt zwei Seiten aus dem ältesten gesichert datierten Manuskript, das vierzeilige Gedichte enthält, als deren Autor Omar Chayyam angegeben wird. Es befindet sich heute im Besitz der Universität von Oxford. Die *Rubaiyat* sind in Chayyams Muttersprache, in Persisch, verfasst, wohingegen alle philosophischen und mathematischen Aufsätze Omar Chayyams in der Wissenschaftssprache seiner Zeit, in Arabisch, verfasst sind. Das abgebildete Manuskript datiert aus dem Jahr 1460, also über dreihundert Jahre nach Omar Chayyam. Manuskripte aus Chayyams Lebzeit, die seine Autorschaft nachweisen würden, konnten bisher nicht gefunden werden. Es existieren nur Manuskripte, in denen die Autorschaft Chayyams nachträglich behauptet wird. Immer wieder haben moderne Übersetzer und Herausgeber versucht, in biografischen, sprachlichen, historischen und weltbildlichen Analysen dieser indirekten Quellen authentische *Rubaiyat* zu identifizieren und sie von den nicht authentischen zu trennen. FitzGerald (1859) hatte zunächst 75 Vierzeiler übersetzt, in einer späteren Ausgabe 110 (im Jahr 1868), dann wieder nur 101 (ab 1872). In Christensens Dissertation zur Authentizität der *Rubaiyat* blieben nur 14 Vierzeiler übrig, die der Autor mit gutem Gewissen Omar Chayyam zuschreiben mochte (1905). Die erste deut-

[1] Das ch in Chayyam wird gesprochen wie das ch in Buch.

S. Linden, *Die Algebra des Omar Chayyam*, Mathematik im Kontext, DOI 10.1007/978-3-662-55347-3_1

sche Übersetzung von Rosen (1909) enthielt 93 Vierzeiler, spätere Ausgaben 122 (im Jahr 1912) und 152 (1929). Christian Rempis in Tübingen hielt 255 *Rubaiyat* für authentisch (1935), Arberry 252 (1952), Dashti 75 (1971). Tirtha hatte Chayyam zuvor über 1000 *Rubaiyat* zugeschrieben (1941). Die Liste ließe sich fortsetzen. Je nachdem, wie viele Manuskripte man kennt, was man von den Kopisten der Manuskripte weiß und für wie glaubwürdig man sie hält; abhängig auch davon, wie gut andere Quellen bekannt sind, in denen dieselben Vierzeiler anderen Autoren zugeschrieben werden; abhängig schließlich davon, was man von Omar Chayyam hält und welches Ziel man mit seiner Analyse verfolgt, kommt man zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen über die Authentizität der *Rubaiyat*. Beispielhaft für die Probleme in den Analysen ist Dashtis Vorgehensweise: Er postulierte, dass Chayyam tatsächlich der Autor der *Rubaiyat* ist und suchte dann, auf der Grundlage von vorliegenden Berichten und Biografiedaten zu Omar Chayyam dessen Charakter zu ergründen und ihm daraufhin die passenden *Rubaiyat* zuzuschreiben.[2] Monteil (1998) wiederum vertraute nur einem einzigen Manuskript und nahm die Authentizität der 172 darin enthaltenen *Rubaiyat* an. Gleichzeitig schrieb er aber:

> Wie viele dieser Vierzeiler hat Chayyam wirklich geschrieben? Um ehrlich zu sein, wir wissen nichts darüber.[3]

Unabhängig von diesen Problemen aber hat diese chayyamische Poesie, seit sie der englische Privatgelehrte Edward FitzGerald (1859) für den Westen entdeckte, weltweit Wirkung entfaltet. Der kritische Rationalismus der Vierzeiler erstaunte die Leserinnen und Leser des viktorianischen Zeitalters.[4] Auch heute finden wir uns eigenartig berührt von der Kraft dieser Poesie, die etwas in uns anspricht, das spezifisch menschlich und doch so schwer in Worte zu fassen ist. Es entbrannte in der Folge von FitzGeralds erster Übersetzung eine regelrechte Chayyam-Euphorie; die Anzahl der publizierten Übersetzungen und Interpretationen explodierte förmlich.

[2] Die aus Chayyams wissenschaftlichen Aufsätzen entnehmbaren biografischen Daten werden bei Dashtis *Suche nach Omar Chayyam* allerdings nicht berücksichtigt.

[3] Monteil (1998, Seite 13)

[4] Die Geschichte der Verbreitung der Übersetzung FitzGeralds selbst ist erstaunlich. Der Preis des Bandes, der in geringer Auflage gedruckt worden war und zunächst in den Auslagen des Buchhandels versauerte, war teilweise auf einen Penny gesenkt worden, als er schließlich von einigen Lyrikern von Rang entdeckt wurde. Die FitzGerald-Ausgabe ist seitdem hundertfach nachgedruckt worden. Es sollte aber auf die bereits vor FitzGerald begonnene westliche Rezeptionsgeschichte hingewiesen worden sein. Sie begann wohl mit einer Übersetzung eines der *Rubaiyat* von Hyde 1760 ins Lateinische. Weitere bekannte frühe Übersetzungen stammen von Sir Jones (1771) und von Hammer-Purgstall (1818). Hammer-Purgstall nannte Chayyam den «Voltaire der persischen Poesie».

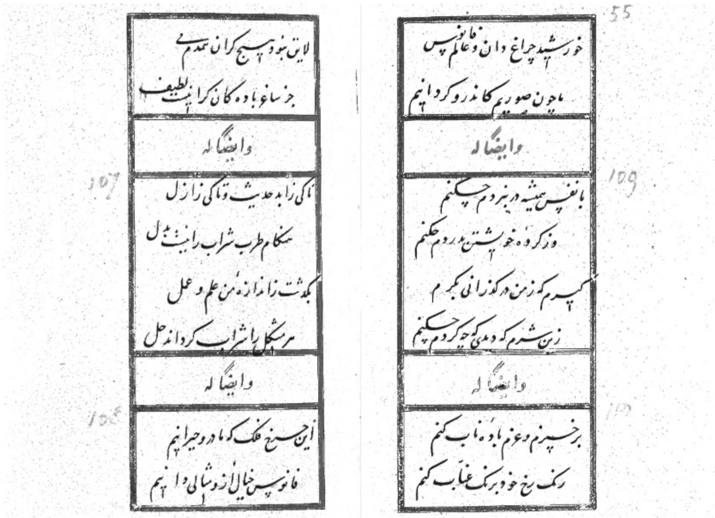


Abb. 1.1 Aus einem 1460 datierten Manuskript der *Rubaiyat* (Ms. Ouseley 140, Bodleian Library Oxford)

In der Chayyam-Bibliografie von Potter aus dem Jahr 1929 wurden bereits mehrere Hundert Ausgaben der *Rubaiyat* aufgeführt. In der aktuellsten vorliegenden Chayyam-Bibliografie von Coumans (2010) aus dem Jahr 2010 finden sich über 1000 *Rubaiyat*-Ausgaben. Übersetzungen und Studien der schon damals bekannten philosophischen und noch mehr der wissenschaftlichen Arbeiten Omar Chayyams waren aber von Beginn an rar, und nur wenige Fachleute scheinen sich hierfür interessiert zu haben. In Großbritannien und in den USA gründeten sich Omar-Chayyam-Clubs, in denen in unterschiedlich seriöser Ausprägung Chayyams Lyrik rezitiert und diskutiert wurde. Es wurde beispielsweise darauf hingewiesen, dass der Londoner Omar-Chayyam-Club eher der gastronomischen Befriedigung des elitären Mitgliederkreises als der Auseinandersetzung mit der Poesie der *Rubaiyat* diente. Anders verhielt es sich mit dem Club in Boston, der einige hervorragende Ausgaben und Kommentare der *Rubaiyat* editierte und in dem auch William Story (1850–1930), Professor für Mathematik an der Universität in Worcester, aktives Mitglied war. Ein deutscher Chayyam-Club wurde 1934 von Christian Rempis in Tübingen gegründet und existierte nur für kurze Zeit. Den an die Macht geratenen Nationalsozialisten passte die Fundamentalismus- und Autoritarismuskritik Omar Chayyams, und wohl noch mehr die libertäre Zusammensetzung des Clubs, nicht ins Weltbild. Auch die heute noch populäre

Übersetzung der *Rubaiyat* von Friedrich Rosen wurde aus den Buchläden entfernt.[5] Die Verbreitung und Rezeption der Vierzeiler, das Wirken der genannten Clubs und noch sehr viel mehr über Omar Chayyam kann in der umfassendsten aktuell vorliegenden Chayyam-Monografie von Aminrazavi (2005) nachgelesen werden.

Bezeichnend für die moderne Rezeption Omar Chayyams ist, dass der Autor auch dieses gerade genannten Buches, dessen erklärte Absicht es ist, eine umfassende Einleitung zu Person und Gesamtwerk vorzulegen, bereits im Untertitel seiner Arbeit, *The Life, Poetry, and Philosophy of Omar Khayyam*, den *Mathematiker* Omar Chayyam schlicht ignoriert. Es gereicht dem Autor zwar zur Ehre, dass er diese Auslassung einräumt und wie im Folgenden zitiert zu entschuldigen bittet:

> Chayyams mathematisches Genie und sein Vermächtnis wurden von westlichen Mathematikern in Europa und in Amerika gebührend beachtet. Der hohe Grad an Spezialisierung dieser Arbeiten hindert uns jedoch an einer ausgiebigeren Diskussion, die ihre technischen Aspekte weiter untersuchte.[6]

Doch so hoch, wie Aminrazavi befürchtet, ist das Hindernis nicht. Wir werden in der Auseinandersetzung mit Chayyams Mathematik feststellen, dass diese weder zu spezialisiert noch zu technisch, sondern im Gegenteil grundlegend, elegant und für den modernen Leser mit mathematischer Bildung gymnasialen Niveaus erstaunlich leicht verständlich ist.

---

[5] Siehe Aminrazavi (2005, Seite 274). Rempis hat eine Übersetzung der *Rubaiyat* herausgegeben (1935), in der er auch eine wortwörtliche Prosa-Übersetzung der jeweils zugrunde liegenden persischen Handschrift bot. Der eingangs des Buchs zitierte Vierzeiler ist diesem Buch entnommen. Die *Rubaiyat*-Ausgabe von Rosen ist noch auf besondere Art zu Ruhm gelangt: Sie diente in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts einer Art Manuskriptfabrik in Teheran als Vorlage für die Fälschung weiterer vermeintlicher *Rubaiyat*-Manuskripte, die vor ihrer Aufdeckung Aufsehen erregten und den Fälschern wohl hohe Erlöse bescherten, siehe Dashti (1971, Seiten 8–9).

[6] Aminrazavi (2005), Seite 203. Tatsächlich werden zwar die beiden algebraischen Abhandlungen Omar Chayyams auf etwas weniger als vier Seiten diskutiert. Weite Teile dieser Passage sind allerdings direkt dem Buch von Burton (2003) entnommen. Eine Bemerkung Aminrazavis deutet darauf hin, dass er die Authentizität der Abhandlung über die *Teilung eines Viertelkreises* infrage stellt (bei ihm Seite 202). Gründe für diese Vermutung werden nicht angegeben.

1.2 Omar Chayyam als Algebraiker

Es verhält sich mit den vermeintlichen Verständnisschwierigkeiten von Omar Chayyams algebraischen Abhandlungen nicht viel anders als mit den mathematischen Texten der alten Griechen: Die Ausdrucksweise ist ungewohnt. Jene der Autoren und wohl auch jene der Übersetzer. Durch seine etwas prosaischere Ausdrucksweise ist die Arbeit Omar Chayyams sogar einfacher zu lesen als zum Beispiel die *Elemente* des Euklid, die sich durch eine extreme Sachlichkeit und herausragende Struktur auszeichnen. Es ist nicht der hohe Grad an Abstraktion, der die Chayyam-Freunde und -Interpreten an der Lektüre seiner mathematischen Arbeiten hindert, es ist vielmehr die Ermangelung einer Ausgabe dieser Arbeiten, die die etwas umständliche Ausdrucksweise des Autors in eine moderne Sprache übersetzt. Der moderne Leser benötigt für das Verständnis der algebraischen Aufsätze Omar Chayyams in der Tat nicht mehr als die Kenntnis der Diskussion von Kurven bis zur dritten Potenz von x im kartesischen Koordinatensystem sowie einige algebraische Grundtechniken. Abiturienten sollten mit dem Verständnis von Chayyams Methode keinerlei Probleme haben, wenn nur einmal ihre moderne Formulierung verstanden ist. Die Lektüre dieser mathematischen Arbeiten lohnt sich dann doppelt: Die Freunde der Poesie und der Person Omar Chayyams erfahren so einiges Interessantes über den Autor; die Freunde der Mathematik erkennen, vielleicht zum ersten Mal, den engen Zusammenhang der Mathematik der islamischen Mathematik mit der modernen Schulmathematik.

Von Omar Chayyam sind zwei Arbeiten zur Algebra überliefert. Die mathematische Disziplin der Algebra, das Lösen von Gleichungen, war 200 Jahre vor Chayyams Lebzeit in ihrer heutigen Form vom persischen Mathematiker Charasmi (ca. 780–840) geschaffen worden, der sich auf grundlegende Arbeiten des Inders Aryabhata (476–550) hatte stützen können. Die erste der beiden algebraischen Arbeiten Omar Chayyams ist ein kurzer Aufsatz über die Lösung einer speziellen kubischen Gleichung ($x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$) mithilfe des Schnitts zweier Kegelschnitte. Chayyam verweist darin auf ein Problem in dem schon damals mehr als tausend Jahre alten Buch des Archimedes (287–212 v. Chr.) über *Kugel und Zylinder*. Archimedes hatte sich die Aufgabe gestellt, eine Kugel in einem vorgegebenen Verhältnis zu teilen. Die Analyse der Aufgabenstellung führte ihn auf ein Problem, das, algebraisch formuliert, der Lösung einer kubischen Gleichung gleichkommt. Archimedes versprach an dieser Stelle seines Buches, die Lösung nachzureichen. Diese konnte aber nicht gefunden werden. Das Fehlen dieser Lösung hat die islamischen Mathematiker besonders fasziniert und sie schon ab dem frühen 9. Jahrhundert zur Beschäftigung mit kubischen Gleichungen motiviert. Es war schließlich der persische Mathematiker Abu Dschafar Chasen (900–971), der die Methode zur geometrischen Lösung kubischer Gleichungen erkannte, die Chayyam dann perfektionierte.

Dies ist ein typisches Beispiel für die islamische Mathematik jener Epoche: Im Studium der alten griechischen Texte fanden die islamischen Mathematiker ungelöste Probleme oder Lücken, die sich aus der Abschrift und Übersetzung der Manuskripte ergaben, und versuchten, diese zu lösen oder die fehlenden Teile zu ergänzen. Sie nutzten dabei auch ihre Kenntnisse der indischen Mathematik, die ihnen über die nahe Grenze bekannt geworden war und die neuartige Rechentechniken mitbrachte; anders als die Mathematik der Griechen, bei denen aller Anwendbarkeit ihrer Ergebnisse zum Trotz der Erkenntnisgewinn das höherrangige Ziel gewesen zu sein scheint. Von den Indern übernahmen die islamischen Mathematiker beispielsweise das Dezimalsystem.

Wie sehr die erste Arbeit Omar Chayyams, die Abhandlung *Über die Teilung eines Viertelkreises*, in der Wissenschaftstradition seiner direkten Vorgänger des 9. bis 11. Jahrhunderts verankert ist, erkennt man schon daran, dass Omar Chayyam in ihr diese Autoren reichlich zitiert. Die gesamte Arbeit ist in einem bescheidenen Ton gehalten, der Omar Chayyams Respekt vor den Leistungen seiner «achtenswerten Vorgänger», wie er sie dort nennt, zum Ausdruck bringt. Sowohl der Inhalt als auch der bescheidene Ton der Arbeit deuten darauf hin, dass es sich um die erste Arbeit eines jungen Wissenschaftlers handelt, der bemüht ist, die Aufmerksamkeit und Anerkennung der wissenschaftlichen Gemeinschaft zu erlangen.

Doch bereits in dieser Arbeit kündigt der junge Autor ein großes Projekt an, das über die bis dahin geübte Vorgehensweise, alle Probleme dieser Art einzeln zu betrachten, hinausgehen wird: die systematische Lösung aller algebraischen Gleichungen bis zum dritten Grad, das heißt, in moderner Schreibweise, die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit rationalen Koeffizienten. Dieses Projekt ist in seiner späteren Abhandlung *Über die Algebra und die Murhabala* dann tatsächlich realisiert. Omar Chayyam löste also nicht mehr nur einzelne Probleme, in denen Vorzeichen oder gar Zahlenwerte der Koeffizienten vorgegeben waren, sondern er löste die allgemeine kubische Gleichung, indem er sie nach und nach für jede der möglichen Vorzeichenkombinationen der Koeffizienten löste.

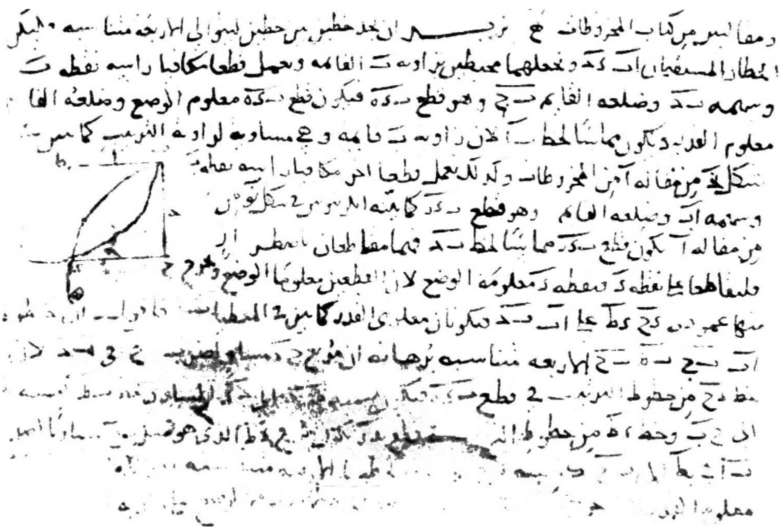


Abb. 1.2 Aus einem 1144 datierten Manuskript der *Algebra* (Ms. arabe 2458, Bibliothèque Nationale de France)

Er war der Erste, der diese systematische Untersuchung durchführte, und seine gesamte Behandlung des Themas ist von großer Wissenschaftlichkeit. Die ausgeprägte Systematik seiner Behandlung der kubischen Gleichungen wird in der tabellarischen Übersicht im mathematischen Kommentarteil erkennbar.[7] In Ermangelung einer analytischen Lösungsformel für x, die erst Jahrhunderte später gefunden werden konnte,[8] löste er die Gleichungen auf geometrische Weise. Er erkannte, dass die Schnittpunkte zweier Kegelschnittkurven – also von Parabeln, Ellipsen, Kreisen und Hyperbeln – Gleichungen dritten Grades genügen.

Es ist unbestritten, dass Omar Chayyam der Autor dieser algebraischen Arbeiten ist. Seine Autorschaft geht zum einen aus den darin getroffenen biografischen Angaben hervor, die den Autor als Omar Chayyam erkennen lassen. Zum anderen datieren die ältesten erhaltenen Handschriften aus der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts, also wenigstens beinahe aus Chayyams Lebzeit, und die in den Handschriften getroffene Angabe Omar Chayyams als Autor kann daher als recht zuverlässig gelten. Die Abb. 1.2 zeigt einen Seitenausschnitt aus einer 1144 datierten Handschrift der *Algebra* aus dem Bestand

[7] Seite 273.

[8] Siehe Seite 207.

der Französischen Nationalbibliothek in Paris.[9] Wie alle erhaltenen philosophischen und mathematischen Aufsätze Omar Chayyams ist dieses Manuskript in der Wissenschaftssprache seiner Zeit, in Arabisch, verfasst, wohingegen die *Rubaiyat* in Persisch, Chayyams Muttersprache, verfasst sind.

In den Beweisen seiner Lösungen berücksichtigte Omar Chayyam die Bedingungen an die Koeffizienten für die Existenz keiner, einer oder mehrerer Lösungen, und dies zumeist fehlerfrei. Was dem heutigen Leser dieser Abhandlung überraschend erscheint, ist Chayyams konsequente Nichtberücksichtigung negativer Lösungen. Chayyam gibt stets nur die positiven Lösungen der kubischen Gleichung an. Dies ist jedoch keine Unzulänglichkeit seiner Methode. Das Problem erwächst aus dem Umstand, dass die ersten Potenzen der Unbekannten von den frühen Algebraikern in der Tradition des Aristoteles als «messbare» geometrische Objekte veranschaulicht wurden. Und so veranschaulichte sich auch Chayyam die Unbekannte x als eine Strecke, x^2 als eine Fläche und x^3 als einen Quader. Negative Strecken, Flächen und Quader sind aber nicht veranschaulichbar. Das Bestreben nach Veranschaulichung der gesuchten «Objekte» x, x^2 und x^3 macht Chayyam die Akzeptanz negativer Lösungen daher unmöglich.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang jedoch, dass Omar Chayyams Lösungen der kubischen Gleichungen deutlich aufzeigen, wie nah seine Denkweise bereits dem erst Jahrhunderte später von Descartes etablierten Koordinatensystem mit seinen in alle Richtungen ins Unendliche ausgedehnten Achsen kam. Hätte Omar Chayyam seine Konzepte noch ein wenig weiter gedacht und sich von der Bedingung der Anschaulichkeit zu lösen vermocht, so hätte er womöglich den Abstraktionsgrad des Koordinatensystems erreicht, mithilfe dessen sich die Ausführung seiner Lösungen um so vieles einfacher gestaltet. Zweifelsfrei war er ja um Abstraktion und Allgemeingültigkeit seiner Ergebnisse bemüht, wie das gesamte Unterfangen aber auch viele einzelne Bemerkungen in seiner *Algebra* zeigen. Über eine symbolische Ausdrucksweise verfügte er ebenfalls, wenn auch noch nicht so formalisiert, wie wir sie heute kennen. Vor dem Hintergrund der Nähe seiner Methodik zur Lösung im Koordinatensystem bleibt unklar, ob Chayyam die negativen Lösungen tatsächlich nicht gesehen hat – oder ob er sie sah, aber zurückwies, da sie keinen messbaren Größen entsprachen. Einige Bemerkungen in der Abhandlung über die Algebra und die Murhabala deuten darauf

---

[9] Es handelt sich um eine Seite des Manuskripts [B] aus der Auflistung auf Seite 83. Dargestellt ist in der Abbildung das Lemma 1, vgl. Seite 123 und den zugehörigen mathematischen Kommentar auf Seite 224.

hin, dass er sie gesehen haben muss.[10] Betrachtet man Chayyams Lösungen im kartesischen Koordinatensystem, so fragt man sich, wie Chayyam in der Lage war, seine Lösungen ohne Koordinatensystem zu finden und darzustellen. Eine in höchstem Maße erstaunliche Leistung. Chayyam war wohl tatsächlich

> der originellste und daher größte der sarazenischen Mathematiker.[11]

1.3 Der Nutzen der geometrischen Konstruktionen

Dass die allgemeine, reelle kubische Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mithilfe von Kegelschnitten gelöst werden kann, ist in moderner Notation klar: Man betrachte die Hyperbel $y = -d/x$ und die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Schnittpunkte der beiden Kurven müssen die reellen Lösungen der Gleichung sein.[12] Die Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems aber war Omar Chayyam unbekannt. Er verwendete stattdessen die elementargeometrische Notation des Apollonius von Perge (262–ca. 190 v. Chr.). Seine Lösungsmethode bestand darin, für jede mögliche Vorzeichenkombination der Koeffizienten Kegelschnittkurven aufzufinden, deren Schnittpunkte Lösungen der Gleichung sind. Was aber war überhaupt der Nutzen dieses Vorhabens?

Diese Frage stellte schon der dänische Wissenschaftshistoriker Hieronymus Zeuthen (1839–1920) im Jahr 1896 in einem Aufsatz, in dem er sich intensiv mit den «algebraischen» Sätzen in Euklids *Elementen* und mit der Bedeutung von geometrischen Konstruktionen in der griechischen Mathematik

[10] Siehe beispielsweise die Lösung der Gleichung (XVI), in der Chayyam explizit das in den negativen Zahlenbereich hineinreichende Intervall «zwischen A und I» (entsprechend $[-a_2, \sqrt[3]{a_0}]$ im gewählten kartesischen Koordinatensystem) als den Bereich möglicher Lösungen nennt, ohne dann allerdings die in diesem Intervall mögliche negative Lösung anzugeben. Die entsprechenden Abbildungen sind die Abb. 6.21 und 9.12 auf Seite 132 und 239.

[11] Story (1919, Seite 13). Vergleichbare Hochachtung zollte der Wissenschaftshistoriker George Sarton (1927), der Omar Chayyam im I. Band seines monumentalen Werks zur Geschichte der Wissenschaften als «einen der größten Mathematiker des Mittelalters» bezeichnete. Sarton betitelte diesen I. Band mit *From Homer to Omar Khayyam*, woraus bereits seine Wertschätzung für Chayyam spricht.

[12] Der Beweis, dass $y = -d/x$ eine Hyperbel ist, wird später im Kapitel über die Kegelschnitte des Apollonius geführt, siehe Gleichung (9.33) auf Seite 215 (setze dort $d = -a^2/2$).

auseinandersetzte.[13] Hierin schoss Zeuthen zwar übers Ziel hinaus, indem er wie einige andere Autoren auch die Auffassung formulierte, dass diese «algebraischen» Abschnitte in Euklids Werk algebraische Aussagen im modernen Sinne enthielten.[14] Die Frage nach der grundsätzlichen Bedeutung der geometrischen Konstruktionen, darin inbegriffen die Bedeutung geometrischer Lösungen der Gleichungen dritten Grades mithilfe der Kegelschnitte, stellt sich aber natürlich dennoch.

Die Auffassung, Euklid habe in den benannten Abschnitten tatsächliche algebraische Aussagen getroffen, erscheint übrigens deswegen wenig gerechtfertigt, da sich in keinem der Werke Euklids eigentlich algebraische Ausdrücke finden. Schon Woepcke bemerkte hierzu in seiner Übersetzung der *Algebra* Omar Chayyams:

> Man hört manchmal und denkt des Öfteren, dass die Griechen Gleichungen dritten Grades konstruiert hätten. Diese Meinung enthält, wenn schon nicht einen Fehler, dann eine Ungenauigkeit. Es stimmt, dass die griechischen Geometer bestimmte geometrische Probleme gelöst haben, die, auf ihren algebraischen Ausdruck geführt, einer Gleichung dritten Grades entsprechen. Aber man kommt schnell darin überein, dass es etwas ganz anderes ist, ein solches Problem geometrisch zu lösen oder anzuerkennen, dass dieses Problem von einer Gleichung dritten Grades abhängt; unter anderen geometrischen Problemen auch einige dritten Grades zu lösen oder die Gleichungen dritten Grades systematisch hinzuschreiben, sie eine nach der anderen zu konstruieren, die Spezialfälle ihrer Lösungen zu diskutieren und dies alles mit dem erklärten Ziel, mithilfe dieser allgemeinen Theoreme implizit jedes beliebige Problem jederzeit lösen zu können. Dies findet man bei den Griechen nirgends.[15]

Die Griechen konnten also keine algebraischen Gleichungen dritten Grades lösen, da sie über gar keine algebraische Vorstellung des Problems verfügten.

---

[13] Diesem Artikel sind einige der hier präsentierten Gedanken zur Bedeutung der geometrischen Konstruktionen in der griechischen Mathematik entnommen. Auch Berggren (2011) widmet dem Sinn euklidischer Konstruktionen einen lesenswerten Abschnitt (bei ihm 3§1).

[14] Gemeint sind das gesamte II. Buch von Euklids *Elementen* und die Paragraphen §56–62 der *Data*. Zur Frage dieser modernen Interpretation der genannten Abschnitte siehe insbesondere Unguru (1975).

[15] Woepcke (1851, Seite xii).

1.3.1 Erkenntnistheorie und Praxis

Schon in Euklids *Elementen* haben viele geometrische Konstruktionen wenig bis keinen praktischen Nutzen, obwohl sie mit Zirkel und Lineal praktisch konstruierbar gewesen wären. Keinen direkten praktischen Nutzen hatte für die alten Griechen auch die Konstruktion der Kegelschnitte Hyperbel und Parabel, da sie keine Geräte zum Zeichnen derselben besaßen und damit auf eine ungenaue punktweise Konstruktion angewiesen gewesen wären.[16] Es sei denn, sie haben reale Kegel angefertigt und durchgeschnitten, was allerdings recht unpraktikabel erscheint. Geometrische Konstruktionen waren für die Griechen vielmehr ein theoretisches Mittel zur Erweiterung der Erkenntnis oder dafür da, möglichst sparsam mit den vorausgesetzten Annahmen umzugehen. Die Konstruktionen mit dem dazugehörigen Beweis für ihre Richtigkeit dienten einer verbreiteten These zufolge dazu, die Existenz desjenigen, was konstruiert werden sollte, sicherzustellen.[17] So konnten die Griechen ja beispielsweise auf geometrischem Weg neben Hilfssätzen zum Beweis weiterer Sätze auch Größen konstruieren, die sie arithmetisch nicht als Zahl akzeptieren konnten, nämlich die irrationalen Zahlen wie etwa $\sqrt{2}a$ als Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge a. Die Konstruierbarkeit, nah verwandt der «Messbarkeit» von Größen, ist in der Mathematik der Griechen von überragender Bedeutung.[18] Auch bei Chayyam hat die Konstruktion der Lösungen der Gleichungen dritten Grades die Funktion eines Existenzbeweises: Was konstruiert werden kann, existiert. Sowohl in der Abhandlung über die *Algebra* als auch in der Behandlung des *Viertelkreises* finden sich zahlreiche Beweise von «nützlichen Eigenschaften» von Kegelschnitten und von Chayyams Dreieck, die keinen direkten praktischen Nutzen in der Lebenswelt haben, die jedoch die Konstruktion der Lösungen vereinfachen.

Doch die Konstruierbarkeit der Lösungen dient bei Chayyam nicht allein dem Beweis der Existenz, sie hat auch praktischen Nutzen. Denn während die Griechen die Kegelschnitte nicht tatsächlich konstruieren konnten, hatten die islamischen Mathematiker eben solche Geräte zur Konstruktion von Kegelschnitten entwickelt. Die Abb. 1.3 zeigt einen Nachbau eines solchen In-

---

[16] Für die Ellipse stand mit der Gärtnerkonstruktion eine exakte Konstruktionsweise zur Verfügung.

[17] Die letzten beiden Sätze sind teils wortgetreue Zitate aus dem Artikel von Zeuthen (1896) und dem Buch von Berggren (2011, Seite 77).

[18] Negative Zahlen freilich lassen sich in diesem Sinne – als negative Längen einer Strecke – nicht konstruieren. Hierzu bedarf es in einem höheren Abstraktionsgrad einer in positive und negative Richtung beliebig ausgedehnten Koordinatenachse.

struments, das von Abu Sahl Kuhi (ca. 940–1000) entwickelt worden war. Die Funktionsweise dieses Zirkels wird im Abschnitt über die Kegelschnitte des Apollonius ab Seite 220 genauer besprochen. Mit diesem Instrument besaßen die islamischen Mathematiker die Möglichkeit, die Existenz der Lösungen der Gleichungen dritten Grades, die sie algebraisch formulieren, aber auf algorithmischen Wege nicht lösen konnten, nicht nur zu beweisen, sondern diese auch tatsächlich beliebig exakt zu konstruieren. Die islamischen Mathematiker waren fast ohne Ausnahme ebenfalls Astronomen, und daher vermutlich mindestens ebenso sehr an den tatsächlichen Lösungen ihrer Probleme interessiert wie am akademischen Erkenntnisgewinn. Darüber hinaus waren viele der islamischen Mathematiker auch in Kunst und Architektur aktiv, wo die konkrete Konstruktion von geometrischen Proportionen ebenfalls wichtig war. Hierauf hat der türkische Wissenschaftler Alpay Özdural hingewiesen, der auch überzeugende Indizien für eine architektonische Tätigkeit Omar Chayyams zusammengetragen hat.[19]

Im Vergleich mit den Mathematikern seiner Epoche, die er seine «achtenswerten Vorgänger» nennt, zeichnet Chayyam vor allem aus, dass er sich nicht mit der Lösung von Spezialfällen zufriedengegeben, sondern eine systematische, allgemeine Lösungsmethode entwickelt hat. Dies ist, was Story meinte, als er Chayyam den «originellsten Mathematiker» seiner Epoche nannte.[20] Insbesondere wegen dieses Erkenntnisstrebens, das zum rein praktischen Nutzen seiner Mathematik für Astronomie und Architektur hinzukommt, sah Omar Chayyam sich selbst mit zunehmendem Selbstbewusstsein eher in der Tradition der klassischen griechischen Autoren als der seiner direkten Vorgänger und Zeitgenossen.[21] Andersherum scheint auch folgender Gedanke nicht abwegig: Da Mathematiker zu Omar Chayyams Lebzeiten als «Philosophen» geschimpft und gar verfolgt wurden,[22] ist es gewiss keine unbegründete Annahme, dass es eine Notwendigkeit der Zeit war, die Betreibung von Mathematik, der «Ersten der Wissenschaften»,[23] zum Zwecke des reinen Erkenntnisgewinns unter den Schirm der Praxistauglichkeit zu stellen, ihr Betreiben also aus ihrem praktischen Nutzen heraus zu begründen.

Der allgemeine Anspruch, der den Aspekt des Existenzbeweises mit umfasst, spiegelt sich übrigens auch in der Wortwahl der *Algebra* Omar Chay-

---

[19] Özdural (1995, 1998), siehe im mathematischen Kommentar ab Seite 167.

[20] Story (1919), vgl. Seite 11.

[21] Siehe hierzu die Bemerkungen ab Seite 179.

[22] Siehe Abschnitt 3.4, darin zum Beispiel auf Seite 77 das Zitat von Nadschm al-Din Rasi.

[23] Seite 107.16.

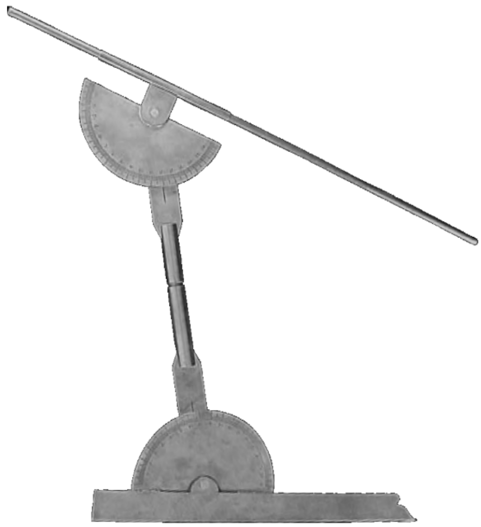


Abb. 1.3 Nachbau von Abu Sahl Kuhis Kegelschnittzirkel (Sezgin, 2003, Band III, Seite 151)

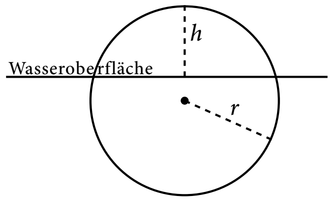
yams wieder, in der von geometrischen und numerischen «Beweisen» (*burhan*), nicht aber von Konstruktionen oder von Lösungen gesprochen wird.

1.3.2 Eine Anwendung der geometrischen Konstruktion

Als ein typisches modernes Beispiel für das Auftreten von kubischen Gleichungen in physikalischen und technischen Aufgabenstellungen kann die Berechnung der Eintauchtiefe einer Kugel der Massendichte ρ_K in Wasser gelten. Die Massendichte von Wasser werde mit ρ_W bezeichnet. Die beschriebene Situation ist in der Abb. 1.4 (links) skizziert, worin r der Radius der Kugel ist und die Eintauchtiefe der Kugel mit der Höhe h der eingetauchten, stationären Kugel über der Wasseroberfläche beschrieben wird. Grundlegende Überlegungen (Stichwort: archimedisches Prinzip[24]) führen dann auf die Gleichung:

$$\left(\frac{h}{r}\right)^3 = 3\left(\frac{h}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\rho_K}{\rho_W} - 1\right). \tag{1.1}$$

[24] Es ist eine Arbeit Omar Chayyams über das archimedische Problem überliefert. Ein Fragment dieser Arbeit ist von Rosen (1925) ins Deutsche übersetzt worden.



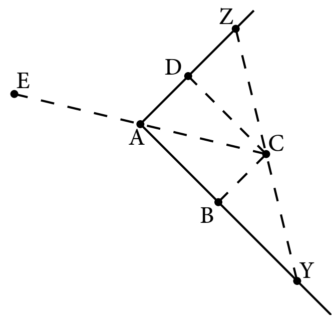


Abb. 1.4 Eintauchende Kugel (links) und KS:II§4 (rechts)

Die Eintauchtiefe der Kugel wird also durch eine kubische Gleichung der Form $x^3 = bx^2 + d$ beschrieben, worin $x = h/r$, $b = 3$ und $d = 4(\frac{\rho_K}{\rho_W} - 1)$.

Wir wollen zunächst annehmen, dass b und d positive rationale Zahlen seien, x werde gesucht. Omar Chayyam lehrt uns, zur Lösung wie folgt und mithilfe von Abb. 1.5 vorzugehen:

1 Zeichne eine Strecke der rationalen Länge b. Dies ist elementargeometrisch mithilfe eines Lineals und eines Zirkels möglich, wie auf Seite 184 gezeigt werden wird (dort Abb. 9.1). Diese Strecke sei AB.

2 Konstruiere nun ein Quadrat der Fläche d/b. Dies geht wie folgt: Zeichne eine Gerade der Länge 1 und senkrecht darauf eine Gerade der (rationalen) Länge d/b. Du erhältst ein Rechteck der Fläche d/b. Hieraus kannst du elementargeometrisch mit Zirkel und Lineal ein Quadrat derselben Fläche konstruieren, wie Euklid im II. Buch seiner *Elemente* gezeigt hat.[25] Die Seite dieses Quadrats sei die Strecke BC. Lege diese Strecke senkrecht zu AB in den Punkt B.

3 Bilde das Rechteck ABCD. Dieses hat dann die Fläche $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} = \sqrt{db}$.

4 Zeichne eine Hyperbel, die durch den Punkt C geht und die die Verlängerungen von AB und AD zu Asymptoten habe. Wie dies geht? Schaue in Apollonius' Buch über die *Kegelschnitte* nach, II. Buch, Satz 4. Dort findest du die Abb. 1.4 rechts und folgende Anweisung: Ziehe die Strecke AC und verlängere diese um sich selbst über A hinaus bis zum Punkt E. Die

[25] Für diese Konstruktion siehe Seite 196, Abb. 9.2.

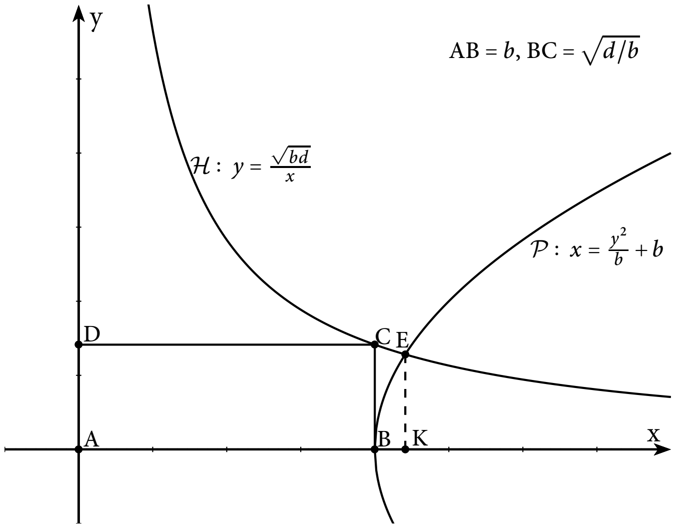


Abb. 1.5 x = AK ist Lösung der Gleichung $x^3 = bx^2 + d$

Länge der Strecke EC wird später der *Durchmesser* $2a$ der Hyperbel genannt werden: $2a$ = EC. Verlängere AD um sich selbst bis zum Punkt Z. Verbinde Z mit C und verlängere diese Strecke, bis sie die Verlängerung der Strecke AB schneidet. Dieser Schnittpunkt sei der Punkt Y. Dann ist der *Parameter* $2p$ der Hyperbel gegeben durch $2p = (\mathrm{ZY})^2/2a$. Diese Herleitung gilt bis hierhin ganz allgemein für alle Winkel $\angle(\mathrm{DAB})$. Im Falle eines rechten Winkels vereinfacht sich die Angelegenheit aber wesentlich, und man liest aus der Abb. 1.4 (rechts) ab, dass $2p = 2a = \mathrm{EC} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} = \sqrt{db}$. Setze nun diese Werte in die Gleichungen (9.37) und (9.38) ein (Seiten 221 und 222) und bestimme die Winkel α und β (die Strecke AS ist am Kegelschnittzirkel per Konstruktion vorgegeben). Beachte die Abb. 9.7 (rechts, Seite 221) und stelle die Winkel α und β am Kegelschnittzirkel ein: $\angle(bcd) = \alpha$ und $\angle(gab) = \beta$. Orientiere den Zirkel entlang der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle(\mathrm{DAB})$ der Zeichnung 1.4 und setze den Zeichenstift in den Punkt C. Zeichne nun die Hyperbel.

5 Sehr gut! Zeichne nun eine Parabel, deren Achse die Verlängerung von AB über B hinaus ist. Ihr Scheitelpunkt sei B, ihr Parameter sei $2p$ = AB. Entnimm wieder den Gleichungen (9.37) und (9.38) die Winkel $\alpha = \beta$, die am Kegelschnittzirkel einzustellen sind. (Die Parabel ist *definiert* durch

$\alpha = \beta$). Orientiere dann den Zirkel entlang der Achse der Parabel und setze den Stift im Scheitelpunkt auf. Zeichne die Parabel.

6 Du siehst: Hyperbel und Parabel schneiden sich. Nenne diesen Schnittpunkt E. Fälle von E das Lot EK auf die Achse der Parabel. (Du erhältst Chayyams Abb. 6.23 auf Seite 134). Die Länge der Strecke AK ist die exakte Lösung der Gleichung.

Die Lösung im kartesischen Koordinatensystem (Abb. 1.5)

In der modernen Schulmathematik würden wir diese Lösung der Gleichung $x^3 - bx^2 = d$ wie folgt formulieren: Zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem die Hyperbel

$$\mathcal{H}: \; y = \frac{\sqrt{bd}}{x}$$

und die Parabel

$$\mathcal{P}: \; x = \frac{y^2}{b} + b.$$

Der x-Achsenabschnitt ihres Schnittpunkts ist die Lösung der Gleichung.

Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass in Gleichung (1.1) der Koeffizient d negativ sein muss, damit die Gleichung tatsächlich die schwimmende Kugel beschreibt. Denn für $d = 0$ schwebt die Kugel in beliebiger Tiefe im Wasser, für $d > 0$ geht sie unter. Das obige Lösungsverfahren kann Chayyam für $d < 0$ aber nicht anwenden, da wir in Schritt 2 ein Quadrat «negativen» Flächeninhalts zeichnen müssten. Omar Chayyam löst diese Gleichung daher für $d < 0$ mithilfe anderer Kurven.[26] Zur Übung mag sich der Leser die Frage stellen und beantworten, wieso uns dieser «negative Flächeninhalt» heute nicht stört, wenn wir die Lösung wie gezeigt im kartesischen Koordinatensystem zeichnen. In der Hyperbelgleichung müsste schließlich die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden.

Dies war ein Beispiel für die Lösungsmethode Omar Chayyams, an dem die Konstruktion der Lösung nachvollzogen werden kann. Der Beweis, dass der x-Achsenabschnitt AK tatsächlich eine Lösung ist, steht noch aus. Dieser wird in der Abhandlung und im mathematischen Kommentarteil nachgeholt. Statt des physikalischen Problems der schwimmenden Kugel hätte ein ein-

[26] Siehe ab Seite 130.