MATHÉMATIQUES
&
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et M. Benaïm

60

Nathalie Caspard
Bruno Leclerc
Bernard Monjardet

Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages

Springer

Nathalie Caspard

Laboratoire d'Algorithmique, Complexité et Logique
Département d'Informatique - Bâtiment P2
Université Paris 12
61, avenue du Général de Gaulle
94010 Creteil cedex
France
courriel: caspard@univ-paris12.fr

Bruno Leclerc

Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales
54, bd Raspail
75270 Paris cedex 06
France
courriel: leclerc@ehess.fr

Bernard Monjardet

Centre d'Economie de la Sorbonne
CNRS - UMR 8174
Maison des Sciences Economiques
Université Paris 1 Panthéon - Sorbonne
106-112, bd de l'Hôpital
75634 Paris cedex 13
France
courriel: Bernard.Monjardet@univ-paris1.fr

Library Congress Control Number: 2007931192

Mathematics Subject Classification (2000): 06A, 68R, 68T30, 90B, 91

ISSN 1154-483X
ISBN-10 3-540-73755-3 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-73755-1 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media

springer.com
WMXDesign GmbH

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

Table des matières

Avant-propos XIII

1 Concepts et exemples 1
1.1 Ensembles ordonnés 1
1.1.1 Ordres et ordres stricts 2
1.1.2 Graphes associés à un ensemble ordonné 5
1.1.3 Diagramme d'un ensemble ordonné 7
1.1.4 Isomorphisme et dualité 8
1.2 Exemples d'usages 10
1.2.1 Mathématiques 11
1.2.2 Biologie 12
1.2.3 Informatique 13
1.2.4 Sciences sociales 14
1.2.5 Recherche opérationnelle 16
1.3 Sous-ensembles ordonnés et extensions 17
1.3.1 Sous-ensembles ordonnés 18
1.3.2 Chaînes, antichaînes et paramètres fondamentaux 19
1.3.3 Extensions 21
1.4 Éléments et sous-ensembles particuliers 24
1.4.1 Infimums, supremums, éléments irréductibles 24
1.4.2 Parties commençantes, parties finissantes 27
1.5 Opérations entre ensembles ordonnés 28
1.5.1 Substitution, sommes cardinale et ordinale, produit lexicographique 29
1.5.2 Produit direct 32
1.6 Compléments et références 33
1.7 Exercices 38

2 Classes particulières d'ensembles ordonnés 43
2.1 Ensembles ordonnés rangés, semi-modulaires et bipartis 44
2.2 Ensembles ordonnés définis par configurations exclues 50
2.3 Ensembles ordonnés latticiels : demi-treillis et treillis 52
2.4 Ensembles totalement ordonnés et tournois 58
2.5 Compléments et références 62
2.6 Exercices 67

3 Morphismes d'ensembles ordonnés 71
3.1 Applications isotones et antitones : exponentiation 73
3.2 Parties sup-génératrices et inf-génératrices 74
3.3 Fermetures et ouvertures 80
3.4 Applications résiduées, résiduelles, galoisiennes 84
3.5 Correspondance de Galois associée à une relation 90
3.5.1 Treillis de Galois 91
3.5.2 Table d'un ensemble ordonné 93
3.5.3 Complété d'un ensemble ordonné 96
3.6 Compléments et références 99
3.7 Exercices 103

4 Chaînes et antichaînes 109
4.1 Le théorème de Dilworth 110
4.2 Couplages et transversales dans un ensemble ordonné biparti 114
4.3 La propriété de Sperner 118
4.4 Produits directs de chaînes 122
4.5 Compléments et références 127
4.6 Exercices 130

5 Ensembles ordonnés et treillis distributifs 133
5.1 Treillis distributifs 134
5.2 Treillis distributif associé à un ensemble ordonné 138
5.3 Représentations d'un treillis distributif 141
5.4 Dualités entre préordres et topologies et entre ensembles ordonnés et treillis distributifs 147
5.5 Dualité entre ordres et fuseaux d'ordres totaux 154
5.6 Compléments et références 159
5.7 Exercices 163

6 Codages et dimensions des ordres 169
6.1 Codages booléens et dimension booléenne d'un ensemble ordonné 171
6.2 Dimension d'un ensemble ordonné 176

6.3 Ensembles ordonnés de dimension 2 . . . 185
6.4 k-dimension d'un ensemble ordonné . . . 188
6.5 Compléments et références . . . 193
6.6 Exercices . . . 198

7 Quelques usages . . . 201
7.1 Modélisation des préférences . . . 201
7.2 Agrégation des préférences : théorèmes Arrowiens pour ordres . . . 214
7.3 Les rôles des ordres en classification . . . 224
7.4 Analyse galoisienne des données : fermetures et implications . . . 238
7.5 Ordonnancements . . . 251
7.5.1 Problème d'ordonnancement à 1 machine . . . 251
7.5.2 Problème d'ordonnancement à m machines . . . 252
7.5.3 Problème d'ordonnancement à 2 étapes (et 2 machines) . . . 255
7.6 Compléments et références . . . 259
7.6.1 Modélisation des préférences . . . 259
7.6.2 Agrégation des préférences : théorèmes arrowiens pour ordres . . . 261
7.6.3 Les rôles des ordres en classification . . . 264
7.6.4 Analyse galoisienne des données : fermetures et implications . . . 266
7.6.5 Ordonnancements . . . 268
7.7 Exercices . . . 269
7.7.1 Modélisation des préférences . . . 269
7.7.2 Agrégation des préférences : théorèmes arrowiens pour ordres . . . 272
7.7.3 Les rôles des ordres en classification . . . 274
7.7.4 Analyse galoisienne des données : fermetures et implications . . . 276
7.7.5 Ordonnancements . . . 277

A Questions de complexité . . . 279
A.1 Théorie de la complexité . . . 280
A.2 Résultats de complexité . . . 285
A.2.1 Problèmes faciles (algorithmes polynomiaux) . . . 286
A.2.2 Problèmes difficiles (algorithmes exponentiels) . . . 290
A.2.3 Problèmes difficiles et classes particulières d'ordres . . . 292

B Les 58 types d'ordres connexes à au plus 5 éléments . . . 295

C Nombres d'ordres et de types d'ordres . . . 297

D Repères documentaires 299
D.1 Internet et l'incontournable Google 299
D.2 Livres 300
D.3 Journaux 301
D.4 Textes de synthèse et comptes-rendus de conférences 301
D.5 Logiciels 303

Bibliographie 305

Liste des symboles 331

Index 335

Contents

Foreword XIII

1 Concepts and examples 1
1.1 Ordered sets 1
1.1.1 Reflexive and irreflexive orders 2
1.1.2 Graphs associated to an ordered set 5
1.1.3 Diagram of an ordered set 7
1.1.4 Isomorphism and duality 8
1.2 Examples of uses 10
1.2.1 Mathematics 11
1.2.2 Biology 12
1.2.3 Computer science 13
1.2.4 Social sciences 14
1.2.5 Operations research 16
1.3 Ordered subsets and extensions 17
1.3.1 Ordered subsets 18
1.3.2 Chains, antichains and associated parameters 19
1.3.3 Extensions 21
1.4 Special elements and subsets 24
1.4.1 Meets, joins and irreducible elements 24
1.4.2 Downsets and upsets 27
1.5 Operations between ordered sets 28
1.5.1 Lexicographical, cardinal and ordinal sums, lexicographical product 29
1.5.2 Direct product 32
1.6 Further topics 33
1.7 Exercices 38

2 Particular classes of ordered sets 43
2.1 Ranked, semimodular and bipartite ordered sets 44
2.2 Ordered sets with forbidden substructures 50
2.3 Semilattices and lattices 52
2.4 Linearly ordered sets and tournaments 58
2.5 Further topics 62
2.6 Exercises 67

3 Morphisms of ordered sets 71
3.1 Isotone and antitone maps: exponentiation 73
3.2 Join- and meet-generating subsets 74
3.3 Closure and dual closure operators 80
3.4 Residuated, residual and Galois maps 84
3.5 The Galois connection associated to a binary relation 90
3.5.1 Galois lattice 91
3.5.2 Table of an ordered set 93
3.5.3 Completion of an ordered set 96
3.6 Further topics 99
3.7 Exercises 103

4 Chains and antichains 109
4.1 Dilworth's theorem 110
4.2 Matchings and transversals in a bipartite ordered set 114
4.3 Sperner's property 118
4.4 Direct products of chains 122
4.5 Further topics 127
4.6 Exercises 130

5 Ordered sets and distributive lattices 133
5.1 Distributive lattices 134
5.2 Distributive lattice associated to an ordered set 138
5.3 Representations of a distributive lattice 141
5.4 Dualities between preorders and topologies and between ordered sets and distributive lattices 147
5.5 Duality between orders and spindles of linear orders 154
5.6 Further topics 159
5.7 Exercises 163

6 Codings and dimensions of orders 169
6.1 Boolean codings and Boolean dimension of an ordered set 171
6.2 Dimension of an ordered set 176

6.3 Two-dimensional ordered sets 185
6.4 k-dimension of an ordered set 188
6.5 Further topics 193
6.6 Exercises 198

7 Some uses 201
7.1 Models of preferences 201
7.2 Aggregation of preferences: Arrowian theorems for orders 214
7.3 The roles of orders in cluster analysis 224
7.4 Galois data analysis: closure and implicational systems 238
7.5 Orders in scheduling 251
7.5.1 One-machine scheduling problems 251
7.5.2 Multi-machine scheduling problems 252
7.5.3 Two-machine two-stage scheduling problems 255
7.6 Further topics 259
7.6.1 Models of preferences 259
7.6.2 Aggregation of preferences: Arrowian theorems for orders 261
7.6.3 The roles of orders in cluster analysis 264
7.6.4 Galois data analysis: closure and implicational systems 266
7.6.5 Orders in scheduling 268
7.7 Exercises 269
7.7.1 Models of preferences 269
7.7.2 Aggregation of preferences: Arrowian theorems for orders 272
7.7.3 The roles of orders in cluster analysis 274
7.7.4 Galois data analysis: closure and implicational systems 276
7.7.5 Orders in scheduling 277

A About algorithmic complexity 279
A.1 Complexity theory 280
A.2 Complexity results 285
A.2.1 Easy problems (polynomial algorithms) 286
A.2.2 Difficult problems (exponentional problems) 290
A.2.3 Difficult problems and particular classes of orders 292

B The 58 non-isomorphic connected ordered sets with at most 5 elements 295

C Numbers of ordered sets and of non-isomorphic ordered sets 297

D Documentation marks 299
D.1 Internet and the inescapable Google 299
D.2 Books 300
D.3 Journals 301
D.4 Reviews and proceedings 301
D.5 Softwares 303

References 305

List of symbols 331

Index 335

Avant-propos

Les notions d'ordre, de classement, de rangement sont présentes dans de multiples activités ou situations humaines : hiérarchies administratives ou sociales, organigrammes, ordonnancements de tournois sportifs, ordres de préséance, de succession ou de préférences, motions d'ordre, ordres du jour, classements scolaires ou audiovisuels, ordre alphabétique, lexicographique, etc., on n'en finirait pas d'énumérer toutes les situations où interviennent des ordres.

Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines où les mathématiques de l'ordre sont présentes. Toutefois, celles-ci sont relativement récentes. Certes, en mathématiques, la notion d'ordre des grandeurs est connue depuis longtemps et c'est au seizième siècle qu'apparaissent pour la première fois les symboles $>$ et $<$ pour désigner « plus grand que » et « plus petit que » [1]. Mais la notion abstraite d'ordre défini comme un type particulier de relation transitive n'a été élaborée qu'entre les années 1880 et 1914 par des mathématiciens et/ou logiciens comme Peirce, Peano, Schröder, Cantor, Dedekind, Russel, Huntington, Scheffer et Hausdorff, dans le contexte de la formalisation de l'« algèbre de la logique » (i.e. de l'algèbre de Boole) et celui de la création de la théorie des ensembles (avec l'étude des « types d'ordre »). Les ordres particuliers, car définissables algébriquement, que sont les treillis, avaient été aussi considérés dès la fin du dix-neuvième siècle par Schröder et Dedekind, puis étaient tombés dans l'oubli avant de renaître dans les années trente du siècle dernier grâce à Birkhoff, Öre et une pléiade d'autres mathématiciens. Ce furent longtemps les principaux ordres étudiés, et la théorie des treillis ainsi que l'« algèbre universelle », qui en est son prolongement naturel, sont toujours extrêmement actives. Ainsi, le résultat sans doute le plus fondamental dans la théorie des ordres finis, à savoir le théorème de Dilworth, n'a été montré qu'en 1950 et d'ailleurs à l'occasion d'un problème posé sur les treillis. Cependant,

[1] Dans une oeuvre, l'« Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas », du mathématicien Thomas Harriot.

depuis les années soixante-dix du siècle dernier, la situation a considérablement évolué. Les travaux sur les structures d'ordres se sont multipliés pour répondre aussi bien à des motivations internes de « mathématiques pures » qu'aux problèmes soulevés à l'occasion de l'usage de ces structures par des « mathématiques appliquées » (dans des domaines comme la recherche opérationnelle, la microéconomie, l'analyse et la fouille des données, la biologie, la robotique, l'informatique théorique, l'algorithmique, etc.)[2]. Aujourd'hui, il faudrait un traité d'au moins 1000 pages pour présenter seulement une synthèse des résultats obtenus.

Ce n'est évidemment pas ce que vise cet ouvrage qui se limite à certains aspects et à trois buts principaux dont nous discutons après leur énoncé :

- Donner les concepts et résultats fondamentaux sur les ensembles ordonnés finis,
- Présenter leurs usages dans des domaines variés,
- Signaler un certain nombre de résultats et de recherches en cours.

Le fait de se limiter aux ensembles ordonnés finis n'est pas simplement justifié par le souci de garder une taille raisonnable à cet ouvrage. Il le situe dans le champ des « mathématiques discrètes », dont l'importance n'est plus à démontrer de nos jours. Dans ce cadre, déjà très large, nous avons privilégié les notions et résultats qui nous paraissent essentiels, notamment du fait de leurs usages dans de très nombreuses modélisations : extensions linéaires d'un ordre, isotonies, fermetures et familles de Moore, applications résiduelles et correspondances de Galois, chaînes et antichaînes avec les théorèmes de Dilworth et de Sperner, dualité entre ensembles ordonnés et treillis distributifs, codages et dimensions d'un ordre, ordres d'intervalles et ordres quasi-forts, résultats Arrowiens sur les ordres, etc. En effet, dans tous les chapitres de ce livre, le lecteur trouvera des exemples d'utilisation des structures d'ordre dans des domaines variés. Le dernier et plus long chapitre développe quelques-uns de ces usages dans des contextes souvent interdisciplinaires, comme celui de la modélisation des préférences.

Enfin pour pallier le fait de ne présenter que les résultats les plus fondamentaux, chaque chapitre comprend une section intitulée « Compléments et références », où l'on signale de nombreux thèmes qui n'ont pu être évoqués dans le corps du chapitre et où l'on donne éventuellement quelques éléments d'ordre historique, jamais inutiles pour la compréhension d'un sujet.

Ajoutons une motivation plus générale pour l'écriture de cet ouvrage. On a mentionné l'important développement de la théorie des treillis sur laquelle il existe actuellement plusieurs dizaines de volumes. Au contraire, les livres portant sur les ensembles ordonnés quelconques sont très rares, et ne portent le plus souvent que sur des aspects particuliers (voir l'annexe D documentaire). Une conséquence de cette situation (ainsi, du moins dans certains pays, que du peu de place consacré à l'enseignement des structures d'ordres dans les

[2] Un autre signe de ce développement est la création en 1985 du journal *Order* par Ivan Rival

cursus universitaires) est que des résultats sont trop souvent inutilisés ou redécouverts, ce qui va à l'encontre du bon usage de ces mathématiques.

Nous continuons cet avant-propos par une description du contenu des chapitres et annexes.

Le but du chapitre 1 est d'abord de donner et d'illustrer les notions fondamentales utilisées pour décrire, étudier, raisonner sur les ensembles ordonnés, notions qui seront utilisées et/ou développées dans les autres chapitres. En conséquence, ce chapitre contient peu d'énoncés de résultats et ne comporte aucune démonstration. On y trouvera aussi un florilège d'usages d'ensembles ordonnés dans des domaines allant des mathématiques à la recherche opérationnelle en passant par la biologie, l'informatique ou les sciences sociales.

Si les ordres sont des relations binaires vérifiant des propriétés fortes, il n'en reste pas moins qu'il existe assez peu de résultats portant sur des ordres quelconques. En fait, comme dans d'autres théories mathématiques, on s'intéresse souvent à des classes d'ordres définies par des propriétés particulières. Le chapitre 2 décrit les classes d'ensembles ordonnés les plus importantes : ensembles ordonnés rangés, semimodulaires et bipartis, ensembles ordonnés définis par des configurations exclues, demi-treillis et treillis, ensembles totalement ordonnés.

Le chapitre 3 est consacré à l'importante question des morphismes entre ensembles ordonnés, c'est-à-dire des applications entre deux ensembles ordonnés conservant ou inversant leur ordre. Parmi ces morphismes, on trouve les codages, les fermetures et les ouvertures, les applications résiduées, résiduelles ou galoisiennes. Ces dernières sont les composantes des correspondances de Galois, outil fondamental permettant d'établir la dualité entre deux ensembles ordonnés et en particulier de définir un treillis de Galois dont l'usage va de la recherche d'« échelles de Guttman »(en analyse des questionnaires) à la génération de « concepts » (en analyse de données ou en intelligence artificielle). C'est aussi dans ce chapitre que sont approfondies les importantes notions d'éléments irréductibles d'un ensemble ordonné et de relations flèches entre ces éléments.

Le théorème de Dilworth (1950) établit l'égalité pour un ensemble ordonné quelconque du nombre maximum d'éléments incomparables de cet ensemble ordonné et du nombre minimum de chaînes en lesquelles on peut partitionner l'ensemble de ses éléments. C'est un résultat central car, d'une part, il porte sur un ensemble ordonné arbitraire et permet d'y résoudre un problème rencontré dans des situations variées (par exemple, en recherche opérationnelle, informatique ou géométrie du plan) et, d'autre part, il est relié (en fait, souvent équivalent) à beaucoup d'autres résultats célèbres de la combinatoire (comme les théorèmes de König–Hall, de Menger et de Ford et Fulkerson). Le chapitre 4 est consacré à ce théorème de Dilworth, ainsi qu'à la descendance d'un autre résultat fameux dû à Sperner, résultat donnant le nombre maximum de parties incomparables (pour l'inclusion) d'un ensemble. Les ordres de Sperner étudiés dans ce chapitre sont ceux pour lesquels le nombre maximum d'éléments incomparables de l'ordre s'obtient à partir de la considération de ses niveaux.

Le théorème de représentation des treillis distributifs dû à Birkhoff fournit une représentation ensembliste d'un treillis distributif au moyen de ses éléments irréductibles. On en déduit une dualité fondamentale entre la classe des treillis distributifs et celle des ensembles ordonnés, qui implique que tout résultat sur un treillis distributif peut se traduire en un résultat sur un ensemble ordonné, et inversement. Cette dualité est étudiée au chapitre 5, où l'on montre qu'elle est la conséquence d'une correspondance de Galois entre relations binaires et familles de parties. On y présente aussi une autre dualité entre ordres et fuseaux d'ordres totaux, notion introduite à l'occasion de problèmes d'analyse des préférences.

Un résultat déjà ancien de Szpilrajn (1930) permet de montrer que tout ordre peut être étendu en un ordre total (dit extension linéaire de l'ordre) et qu'il est l'intersection de toutes ses extensions linéaires. La dimension d'un ordre est alors le nombre minimum de ses extensions linéaires dont il est intersection. Ce paramètre de dimension a été intensivement étudié pour des raisons théoriques, mais aussi parce qu'il a servi dans certaines modélisations. C'est ainsi qu'on a pu l'utiliser comme modèle explicatif d'une relation de préférence, l'ordre partiel de préférence d'un agent économique (par exemple) sur un ensemble de biens étant interprété comme résultant de la prise en compte de plusieurs critères pour chacun desquels sa préférence est un ordre total. De plus, rechercher la dimension d'un ordre revient aussi à rechercher le nombre minimum d'ordres totaux dans le produit desquels il peut être codé (c'est-à-dire dans lequel on peut en trouver une image isomorphe). Plus généralement, on peut chercher à coder un ordre dans un produit de chaînes de longueur donnée. Si ces chaînes sont de longueur deux, ceci revient à coder l'ordre par des parties d'un ensemble (i.e. par des suites de 0 et de 1), et on parle alors de codage et de dimension booléens, ces notions ayant été introduites et étant très étudiées en informatique. Le chapitre 6 donne les résultats fondamentaux sur ces codages et dimensions.

Les chapitres précédents contiennent tous des exemples d'utilisations d'ensembles ordonnés dans des contextes variés. Notre dernier chapitre développe certains de ces usages. Les deux premières sections du chapitre 7 portent sur le thème des préférences dont on sait qu'il concerne, entre autres, les sciences cognitives, la microéconomie, la recherche opérationnelle, l'intelligence artificielle ou encore les bases de données (pour définir des langages de requêtes performants). On traite d'abord la modélisation d'une relation de préférence, par exemple, celle d'un agent économique, lorsqu'on ne fait plus l'hypothèse forte que la relation d'indifférence est transitive ; les modèles adéquats sont alors ceux des ordres d'intervalles et des ordres quasi-forts. On considère ensuite le problème d'agréger plusieurs relations de préférence en une relation de préférence globale qui soit un ordre et on établit quelques théorèmes « Arrowiens » montrant la difficulté d'obtenir une solution satisfaisante. On continue par la présentation des modèles ordonnés utilisés en taxonomie mathématique : hiérarchies, hiérarchies indicées, demi-treillis à médianes, treillis des partitions. La section suivante est consacrée à l'utilisation des treillis de Galois en analyse de données relationnelles. On y montre comment, à partir d'un tel treillis ou de la fermeture qui lui est associée, on peut déduire un système d'implications permettant de répondre à des questions du type : les sujets ayant telles caractéristiques ont-ils – ou n'ont-ils pas – telles autres caractéristiques ? La cinquième section expose la problématique de l'ordonnancement et quelques outils ordinaux utilisés pour la traiter.

Suite à sa section « Compléments et références », chacun des sept chapitres du livre contient pour dernière section une liste d'exercices, qui illustrent les notions présentées dans le chapitre et dont il est indispensable de chercher la solution si l'on veut arriver à une pratique réelle de la mathématique des ensembles ordonnés. Pour la plupart de ces exercices, les solutions seront trouvées facilement à partir des résultats donnés dans le chapitre. Pour les autres, des indications ou des références seront donnés.

L'utilisation en pratique des notions et résultats présentés dans ce livre nécessite de pouvoir répondre à des questions posées sur un ensemble ordonné modélisant telle ou telle situation, ce qui passera en général par le recours à un programme informatique implémentant un algorithme de résolution. Notre première et plus longue annexe donne quelques notions de base sur la théorie de la complexité algorithmique, et de nombreux résultats de complexité pour l'algorithmique des ordres. Les deux annexes suivantes portent sur les petits ordres et le dénombrement des ordres. La dernière annexe fournit des repères documentaires variés, tandis que la liste de références permettra au lecteur de pouvoir accéder aux résultats mentionnés dans les compléments des chapitres. Comme il se doit, une liste de notations et symboles et un index terminent l'ouvrage.

Les définitions, théorèmes, propositions, corollaires, lemmes, exemples et remarques de chaque chapitre sont numérotés $n.p$ où n est le numéro du chapitre et p le numéro d'apparition dans le chapitre. Par exemple, la définition 4.14 est le 14ème item numéroté du chapitre 4.

Les figures (respectivement, les tableaux) de chaque chapitre sont numérotées FIG. $n.p$ (respectivement, TABLEAU $n.p$) où n est le numéro du chapitre et p le numéro d'apparition dans le chapitre. Par exemple, FIG. 3.6 est la 6ème figure du chapitre 3 et le TABLEAU 7.3 est le 3ème tableau du chapitre 7.

1

Concepts et exemples

Ce premier chapitre présente les notions de base de la théorie des ensembles ordonnés finis et donne une idée de la variété des domaines où on les rencontre. Il n'est pas destiné à une lecture suivie, mais à servir de texte de référence pour la définition et l'illustration de notions utilisées dans les autres chapitres. En particulier, il ne contient pas les démonstrations des quelques résultats qui y sont énoncés (on trouvera ces démonstrations dans d'autres chapitres et/ou dans des exercices). Dans la première section nous donnons les concepts et le vocabulaire permettant de définir, représenter et décrire un ensemble ordonné, et nous introduisons plusieurs graphes – de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture et de voisinage – qui lui sont naturellement associés. La seconde section présente des ensembles ordonnés apparus dans divers champs disciplinaires, des mathématiques elles-mêmes aux sciences sociales en passant par la biologie et l'informatique. Nous définissons les notions de sous-ensemble ordonné, de chaîne, d'antichaîne et d'extension d'un ensemble ordonné dans la section 1.3 et les notions de supremum, d'infimum, d'éléments irréductibles et de parties commençantes ou finissantes dans la section 1.4. La section 1.5 décrit des procédés fondamentaux de construction (substitution, produit direct, etc.) qui, à deux ou plusieurs ensembles ordonnés, en associent un nouveau.

1.1 Ensembles ordonnés

Au tout début était l'ordre... ou l'ordre strict ! Cette section commence donc par la définition de ces deux notions d'ordre et du vocabulaire de base qui leur est associé. On présente ensuite différents graphes (de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture, de voisinage) associés à un ensemble ordonné. La section 1.1.1 suivante est consacrée à une représentation extrêmement utile d'un ensemble ordonné, appelée son diagramme. Enfin, on termine cette section par la notion (traditionnelle en mathématiques) d'isomorphisme de structures d'ordres à laquelle s'ajoute dans ce cas la notion tout aussi importante d'anti-isomorphisme (ou de dualité).

1.1.1 Ordres et ordres stricts

Qu'est-ce qu'un ordre ? Cette question posée par Russel en 1903 a reçu essentiellement deux réponses qui portent (le plus souvent) les noms d'*ordre* et d'*ordre strict* (cf. les compléments de la section 1.6 pour l'histoire de ces notions). D'autre part, les notations et termes utilisés pour désigner les mêmes notions ordinales ont été et sont toujours très variées. Toutefois l'influence de Bourbaki [73] (1956) a permis qu'en français existe un relatif accord sur la terminologie de certaines notions de base (cf. à ce sujet la fin de la section 2.6). Dans cet ouvrage nous ne nous priverons pas d'utiliser plusieurs termes pour désigner la même notion ; l'expérience montre en effet que se contraindre à utiliser un système unique de notations dans des situations extrêmement diverses a plus d'inconvénients que d'avantages. Toutefois et pour pallier les incontestables inconvénients de notations multiples, nous détaillons dans cette section de façon précise – et donc quelque peu fastidieuse – les deux notions fondamentales d'ordre avec les différents systèmes et conventions de notations que nous utiliserons.

Une *relation binaire* sur un ensemble X est une partie R de l'ensemble X^2 des couples de X. La notation $(x, y) \in R$ (ou xRy) signifie que le couple (x, y) appartient à la relation R. On écrit $(x, y) \notin R$ (ou xR^cy) dans le cas contraire.

Définition 1.1 *Une relation binaire O sur un ensemble X est un* ordre *sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *Réflexivité : pour tout $x \in X, xOx$,*
2. *Antisymétrie : pour tous $x, y \in X$, (xOy et yOx) impliquent $x = y$,*
3. *Transitivité : pour tous $x, y, z \in X$, (xOy et yOz) impliquent xOz.*

L'ordre O est dit total *s'il est tel que, pour tous $x, y \in X$, xO^cy implique yOx.*

Un ensemble ordonné *est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre sur X (dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter O_P l'ordre de l'ensemble ordonné P). Si O est un ordre total, $P = (X, O)$ est alors appelé un* ensemble totalement ordonné *(ou* ensemble linéairement ordonné *ou* chaîne*). Les symboles C_n et $\underline{n}$ désigneront une chaîne à n éléments.*

Exemple 1.2 Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné où O est l'ordre suivant sur X :

$$O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

On peut représenter l'ensemble ordonné P par un « réseau » dans le plan dont les points correspondent aux éléments de X et les arcs fléchés aux couples de O, les boucles représentant les couples de la forme (x, x) (cf. la figure 1.1). On peut aussi le représenter au moyen de tables (cf. le tableau 1.1 ci-dessous). Cependant nous verrons à la section 1.1.3 une manière beaucoup plus économique de représenter un ensemble ordonné : le *diagramme (de Hasse).*

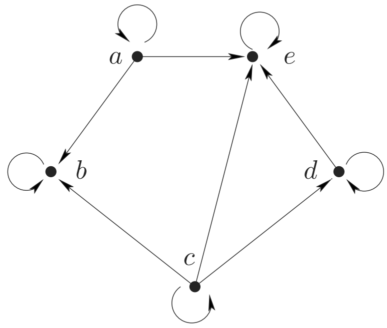


Fig. 1.1. Un ensemble ordonné P représenté par un réseau dans le plan.

Tableau 1.1. Deux sortes de tables pour l'ensemble ordonné P de l'exemple 1.2.

	a	b	c	d	e
a	×	×			×
b		×			
c		×	×	×	×
d				×	×
e					×

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

Définition 1.3 *Soit O une relation sur un ensemble X.*

- *O est un* ordre strict *si elle est irréflexive (pour tout $x \in X$, $xO^c x$) et transitive. Un ensemble* strictement ordonné *est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre strict sur X.*
- *L'ordre strict O est dit* strictement total *s'il est tel que $x \neq y$ et $xO^c y$ impliquent yOx. On dit alors que P est un ensemble* strictement totalement ordonné*. Si $|X| = n$, P ou l'ordre strict correspondant pourra être noté $\underline{n}_s$.*

N.B. Un ordre strict O sur X est également une relation *asymétrique*, c'est-à-dire telle que $yO^c x$ pour tous $x, y \in X$ vérifiant xOy (le démontrer).

Puisqu'il existe une bijection évidente entre l'ensemble des ordres et l'ensemble des ordres stricts définis sur X (laquelle ?), on a deux manières équivalentes de formaliser la notion d'ordre (cf. la section 1.6 des compléments et références). Il s'ensuit qu'à toute classe particulière d'ordres correspond une classe particulière d'ordres stricts (par exemple les ordres strictement totaux correspondent aux ordres totaux). Afin de ne pas alourdir le vocabulaire, il sera parfois préférable d'utiliser les mêmes termes pour désigner les ordres de ces deux classes. Ainsi, au chapitre 7 où l'on considérera différents modèles ordinaux de la préférence stricte, le qualificatif « strict » sera systématiquement omis.

Nous avons utilisé la notation O pour désigner un ordre mais, dans un grand nombre de situations, cette notation est avantageusement remplacée par le symbole « $\leq$ », qui se lit « inférieur ou égal ». On utilise ainsi pour un ordre quelconque le symbole traditionnel de l'ordre entre les nombres. Un ensemble ordonné est alors noté $P = (X, \leq_P)$ ou, plus simplement, $P = (X, \leq)$.

De la même manière, un ordre strict sera fréquemment symbolisé par « $<$ » qui se lit « inférieur » ou « strictement inférieur », et les notations $P = (X, <_P)$ ou, plus simplement, $P = (X, <)$ seront utilisées pour désigner un ensemble strictement ordonné.

Pour un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ (ou $P = (X, O)$), l'expression « x appartient à P » signifiera $x \in X$, et on notera indifféremment $x \in X$ ou $x \in P$. Le nombre d'éléments de X sera indifféremment noté $|P|$, $|X|$, ou simplement n selon le contexte. Enfin le fait que (x, y) appartient à l'ordre de P s'écrit, suivant les notations utilisées pour P, $x \leq_P y$, $x \leq y$, xO_Py ou simplement xOy. Le nombre de ces couples se note $|O|$, $m(P)$ ou simplement m.

Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$.

– Si $x \leq y$, on dit que x est *inférieur ou égal à* y, ou que y est *supérieur ou égal à* x. On dit aussi que x est un *minorant* de y et que y est un *majorant* de x. L'ensemble $\{t \in P \ : t \leq x\}$ des minorants de x se note $(x]$ ou Px. L'ensemble $\{t \in P \ : x \leq t\}$ des majorants de x se note $[x)$ ou xP.

– Si $x \leq y$ n'est pas vérifié, on dit que x *n'est pas inférieur ou égal à* y, ce qu'on note $x \not\leq y$. La relation ainsi définie est aussi notée $\leq^c$ (puisque c'est la relation complémentaire de la relation $\leq$).

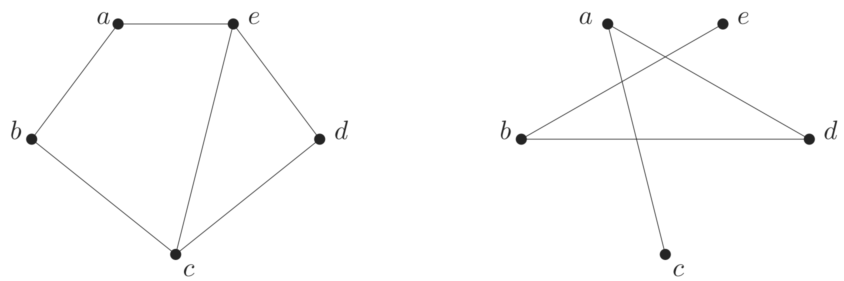
– Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on dit que x est *inférieur à* y, ou que y est *supérieur à* x, ce qu'on note $x < y$. On dit aussi que x est un *minorant strict* de y et que y est un *majorant strict* de x. La relation $<$ est la relation d'ordre strict associée à la relation $\leq$. L'ensemble des minorants (respectivement, majorants) stricts de x se note $(x[$ (respectivement, $]x)$).

– Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont *comparables*. Dans le cas contraire, i.e. si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, on dit que x et y sont *incomparables*, ce que l'on note $x||y$.

Dans l'exemple 1.2, a et b sont comparables alors que a et c sont incomparables.

On remarquera que $y \not\leq x$ est équivalent à ($x < y$ ou $x||y$). Il résulte des définitions précédentes qu'une chaîne est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques sont toujours comparables. A l'inverse, on définit la notion d'antichaîne comme suit :

Définition 1.4 *On appelle* antichaîne *tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables. Le symbole A_n désignera une antichaîne à n éléments.*



$Comp(P)$ $Inc(P)$

Fig. 1.2. Les graphes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2.

1.1.2 Graphes associés à un ensemble ordonné

A un ensemble ordonné sont naturellement associés différents graphes[1], tels notamment les graphes de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture et de voisinage. Chacun de ces graphes correspond à des aspects particuliers de l'ensemble ordonné et intervient dans l'étude de celui-ci. Nous définissons et illustrons ci-dessous ces graphes.

Définition 1.5 *Soit* $P = (X, \leq)$ *un ensemble ordonné. On appelle* graphe de comparabilité *de* P *le graphe non orienté* $Comp(P) = (X, Comp_P)$ *dont les sommets sont les éléments de* P*, et les arêtes les paires* $\{x, y\}$ *d'éléments comparables dans* P*. Si* $\{x, y\}$ *est une arête de ce graphe, on note* $xy \in Comp_P$ *ou* $xComp_Py$ *(ou, plus simplement,* $xy \in Comp$ *ou* $xCompy$*), et* $Comp_P$ *est appelée la* relation de comparabilité de P.

Le graphe $Inc(P) = (X, Inc_P)$ d'incomparabilité *de* P *est défini de manière semblable, ses arêtes étant les paires* $\{x, y\}$ *d'éléments incomparables dans* P*. On note alors* $xy \in Inc_P$ *ou* $xInc_Py$ *(ou, plus simplement,* $xy \in Inc$ *ou* $xIncy$*) et* Inc_P *est appelée la* relation d'incomparabilité de P.

La figure 1.2 représente les graphes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2.

Les graphes $Comp(P)$ et $Inc(P)$ étant évidemment complémentaires (au sens où la paire $\{x, y\}$ est une arête de l'un si et seulement si elle n'est pas une arête de l'autre), l'étude de l'un se ramène à celle de l'autre.

---

[1] Un *graphe non orienté* est un couple $G = (X, E)$ où X est un ensemble et E un ensemble de paires d'élements distincts de X, appelées les *arêtes* de G ; un *graphe orienté* est un couple $G = (X, A)$ où X est un ensemble et A un ensemble de couples de X, appelés les *arcs* de G.

Nous définissons à présent la relation de couverture associée à un ensemble ordonné. Cette relation qui, en général, n'est pas un ordre, est en revanche la manière la plus économique (en nombre de couples) de se donner un ordre. Elle sera constamment utilisée tout au long de l'ouvrage.

Définition 1.6 *La* relation de couverture *d'un ensemble ordonné* $P = (X, \leq)$, *notée* $\prec_P$ *ou simplement* $\prec$, *est définie par* $x \prec y$ *si* ($x < y$ *et* $x \leq z < y$) *impliquent* $x = z$. *On dit alors que* x est couvert par y *ou que* y couvre x. *On pose* $xP^+ = \{t \in P \ : x \prec t\}$ *et* $P^-x = \{t \in P \ : t \prec x\}$.

Le graphe $Couv(P) = (X, \prec)$ *associé à la relation de couverture s'appelle le* graphe de couverture *de* P.

Autrement dit, x est couvert par y dans P si $x < y$ et il n'existe pas dans P d'élément z supérieur à x et inférieur à y.

L'ensemble ordonné P de l'exemple 1.2 (page 2) a cinq couples de couverture : $a \prec b, a \prec e, c \prec b, c \prec d$ et $d \prec e$.

La relation de couverture d'une chaîne sur un ensemble à n éléments s'écrit $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n$, ce que l'on notera plus simplement $x_1 x_2 \dots x_n$. Cette écriture particulièrement économique des ordres totaux sera souvent utilisée. Inversement, toute suite de n éléments distincts (ou, de façon équivalente, toute permutation de ces éléments) peut être considérée comme définissant un ordre total sur ces éléments, à savoir l'ordre d'occurrence dans la suite. Il s'ensuit que le nombre d'ordres totaux sur un ensemble à n éléments est égal à n !.

A la relation de couverture de P est également associé un graphe non orienté, son *graphe de voisinage*, noté $Vois(P) = (X, V)$, où la paire $\{x, y\} \in V$ si ($x \prec y$ ou $y \prec x$). Dans ce cas, on note $xy \in V$ ou xVy. Pour l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2, ce graphe est donné par la figure 1.3.

Certaines notions sur les ensembles ordonnés peuvent être définies par l'intermédiaire du graphe de voisinage. Il en est ainsi de la notion de connexité :

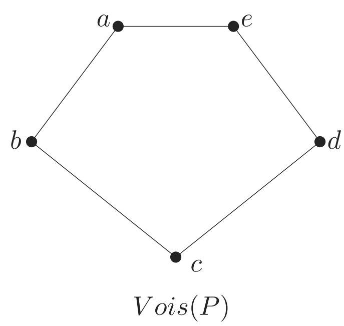


FIG. 1.3. Le graphe de voisinage de l'ensemble ordonné P de l'exemple 1.2.

Définition 1.7 *Un ensemble ordonné P est* connexe *si son graphe de voisinage est un graphe connexe i.e. si, pour toute paire de sommets distincts $\{x, y\}$ de P, il existe une suite de sommets $x = x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p = y$ vérifiant $x_i V x_{i+1}$, pour tout $i = 0, \ldots, p-1$.*

Un ensemble ordonné non connexe est partitionné en sous-ensembles ordonnés (définition 1.26) connexes maximaux appelés ses *composantes connexes*. Un problème sur un ensemble ordonné non connexe se ramenant le plus souvent à des problèmes sur ses composantes connexes, il suffit en général de considérer des ensembles ordonnés connexes pour traiter ce problème.

1.1.3 Diagramme d'un ensemble ordonné

On a vu au début de ce chapitre qu'on pouvait se donner un ensemble ordonné par un réseau, qui en est une représentation « géométrique » (cf. la figure 1.1). Toutefois, dès que l'on considère un ensemble ordonné un peu grand, ce réseau risque d'être passablement inextricable. Peut-on faire mieux ? La notion de diagramme d'un ensemble ordonné répond positivement à cette question et en permet une représentation beaucoup plus économique. On remarque d'abord que se donner les couples de couverture de $P = (X, \leq)$ permet de « retrouver » tous les couples de l'ordre $\leq$: on a $x < y$ si et seulement si il existe une suite $x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p$ d'éléments de X tels que $x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_i \prec x_{i+1} \prec \cdots \prec x_p = y$. On peut donc représenter un ensemble ordonné à l'aide de ses seuls couples de couverture, ce que l'on fait au moyen d'un graphique appelé traditionnellement diagramme (de Hasse).

Définition 1.8 *Le* diagramme *(ou* diagramme de Hasse*) d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x de P sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :*

1. *Si $x < y$, (l'horizontale passant par) $p(x)$ est au dessous de (l'horizontale passant par) $p(y)$,*
2. *$p(x)$ et $p(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si $x \prec y$.*

Evidemment, il existe une infinité de diagrammes possibles du même ensemble ordonné (cependant nous parlerons généralement, comme dans la définition ci-dessus, « du » diagramme d'un ensemble ordonné P au lieu de préciser « l'un des diagrammes » de P). Le choix de la position des points permet d'obtenir certains diagrammes d'un ensemble ordonné plus « lisibles » que d'autres. La figure 1.4 représente deux diagrammes possibles pour l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2, et la figure 1.5 donne des diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaîne A_4 et du « cube » B_3 (la lettre « B » signifiant « booléen », cf. l'exemple 1.12 donné plus loin).

Dans la suite, les figures représentant un ensemble ordonné seront toujours celles d'un diagramme d'icelui. On remarquera que, puisque le diagramme

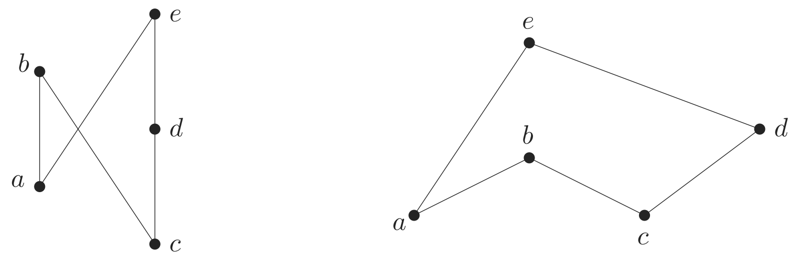


Fig. 1.4. Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2.

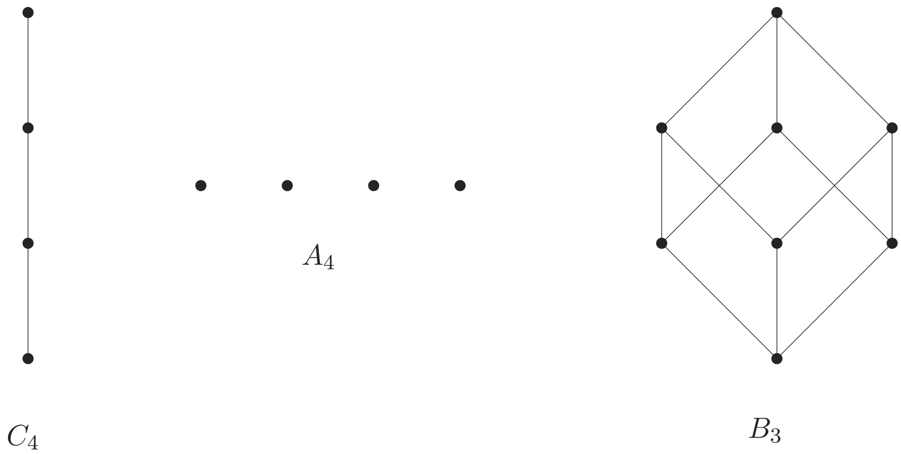


Fig. 1.5. Les diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaîne A_4 et du cube B_3.

d'un ensemble ordonné ne représente pas les couples de réflexivité, il peut tout aussi bien représenter l'ensemble strictement ordonné correspondant.

1.1.4 Isomorphisme et dualité

En mathématiques la notion d'*isomorphisme* entre deux structures est fondamentale. Elle permet de montrer que deux ensembles d'objets de nature totalement différente peuvent vérifier les mêmes propriétés. Dans le cas de structures d'ordre, s'y ajoute la notion d'*anti-isomorphisme* (ou de *dualité*) tout aussi importante.

Définition 1.9 *Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits* isomorphes *(ou* de même type*) s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant :*

$$x \leq_P y \iff f(x) \leq_Q f(y)$$

La bijection f est appelée un isomorphisme (d'ordre) *entre P et Q et on écrit $P \equiv Q$ (dans le cas où $P = Q$, on dit que f est un* automorphisme *de P).*

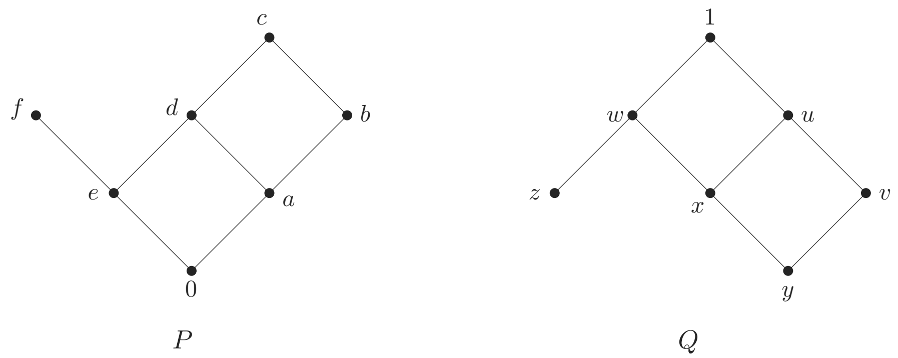


FIG. 1.6. Deux ensembles ordonnés P et Q duaux.

En d'autres termes, deux ensembles ordonnés sont isomorphes s'ils sont identiques à la dénomination près de leurs éléments. Ainsi, on obtient un ensemble ordonné isomorphe à celui de l'exemple 1.2 en remplaçant a, b, c, d, e par 1, 2, 3, 4 et 5.

La relation d'isomorphisme entre ensembles ordonnés est une relation d'équivalence dont les classes, conformément à la définition 1.9, s'appellent les types d'ensembles ordonnés. Deux ensembles ordonnés isomorphes sont dits de même type. Pour illustrer la distinction entre ordre et type d'ordre, on peut noter qu'il y a 130 023 ordres distincts sur un ensemble à six éléments contre seulement 318 types d'ordres différents sur un tel ensemble[2] (pour des dénombrements simples, voir l'exercice 1.1). L'annexe B permet d'obtenir les diagrammes des 58 types d'ordres connexes à au plus cinq éléments.

Définition 1.10 *Deux ensembles ordonnés* $P = (X, \leq_P)$ *et* $Q = (Y, \leq_Q)$ *sont dits* anti-isomorphes *(ou* duaux*) s'il existe une bijection* f *de* X *sur* Y *vérifiant, pour tous* $x, y \in X$ *:*

$$x \leq_P y \iff f(x) \geq_Q f(y)$$

La bijection f *est appelée un* anti-isomorphisme (d'ordre) *entre* P *et* Q *et on écrit* $P \equiv_d Q$.

Un cas particulièrement intéressant d'anti-isomorphisme est obtenu en considérant l'ensemble ordonné $P^d = (X, \leq^d)$ *dual* d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ et défini par :

$$x \leq^d y \iff y \leq x$$

[2] D'une manière générale, dénombrer tous les ordres (respectivement, tous les types d'ordres) sur un ensemble à n éléments est très difficile et la réponse n'est actuellement connue que pour n allant jusqu'à 18 (respectivement, jusqu'à 16). Ces nombres croissent très vite (cf. l'annexe C).

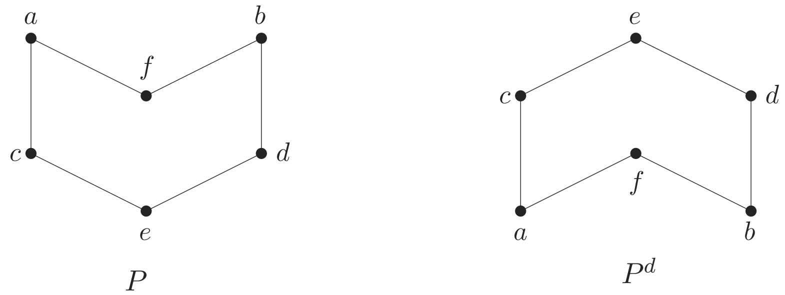


Fig. 1.7. Un ensemble ordonné P et son ensemble ordonné dual P^d.

(Le lecteur vérifiera que $\leq^d$ est bien un ordre et que P et P^d sont anti-isomorphes). L'ordre $\leq^d$ est appelé l'ordre *dual* (parfois l'ordre *opposé*, *réciproque*, *inverse*) de l'ordre $\leq$, et on le note aussi $\geq$. Un diagramme de P^d s'obtient en « renversant » un diagramme de P (figure 1.7).

On remarquera que, dans le cas d'un ensemble totalement ordonné L qui s'écrit $L = x_1x_2 \ldots x_n$, l'ensemble totalement ordonné L^d s'écrit $L^d = x_n \ldots x_2x_1$.

De l'existence de l'ordre dual pour tout ordre découle ce qu'on appelle le *principe de dualité* pour les ensembles ordonnés, qui s'énonce comme suit :

Si une propriété faisant intervenir les symboles $\leq$ et $\geq$ est vraie dans tous les ensembles ordonnés, la propriété duale obtenue en échangeant ces symboles l'est également.

Par exemple, dans tout ensemble ordonné, tout élément est inférieur ou égal à au moins un élément maximal (voir page 24). Dualement, dans tout ensemble ordonné, tout élément est supérieur ou égal à au moins un élément minimal (voir même page).

Plus généralement, la *classe duale* $\mathcal{E}^d$ d'une classe $\mathcal{E}$ d'ensembles ordonnés est formée de tous les ensembles ordonnés P^d avec $P \in \mathcal{E}$. Si une propriété est vraie dans tout ensemble ordonné de $\mathcal{E}$, sa propriété duale l'est dans tout ensemble ordonné de $\mathcal{E}^d$.

Une classe $\mathcal{E}$ d'ensembles ordonnés est dite *ipsoduale* (ou *auto-duale*) si tout ensemble ordonné de $\mathcal{E}$ a son dual dans $\mathcal{E}$, i.e. si $\mathcal{E} = \mathcal{E}^d$ (la classe des ensembles totalement ordonnés d'une part, et celle de tous les ensembles ordonnés d'autre part, sont deux exemples de classes ipsoduales). Pour une telle classe, le principe de dualité s'énonce alors :

Si une propriété est vraie pour tout ensemble ordonné d'une classe ipsoduale d'ensembles ordonnés, la propriété duale l'est également.

1.2 Exemples d'usages

Les activités de classement et de hiérarchisation étant consubstantielles à l'activité cognitive, il n'est pas surprenant que le modèle mathématique de l'ordre soit présent dans de très nombreux domaines, des mathématiques elles-mêmes aux sciences sociales, en passant par exemple par la biologie et l'informatique. Nous présentons dans cette section un échantillon d'ordres apparaissant dans ces domaines. Le chapitre 7 développera certains de ces usages.

1.2.1 Mathématiques

Exemple 1.11 La notation $\leq$ utilisée pour un ordre quelconque est la notation classique de l'ordre sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Un autre ordre sur $\mathbb{N}^*$ joue un rôle important en théorie des nombres, celui de *divisibilité* entre entiers, noté $|$ et défini par : $a|b$ si a divise b (le lecteur vérifiera que cette relation est bien un ordre). Tout ensemble d'entiers est un ensemble ordonné pour cet ordre de divisibilité (voir l'exercice 1.9 de la section 1.7).

Exemple 1.12 On note $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E. Pour désigner l'ensemble $(P(E), \subseteq)$ des parties de E ordonnées par l'inclusion, la notation $\underline{2}^E$ sera souvent utilisée[3]. Si $|E| = n$, ce même ensemble ordonné pourra aussi être noté B_n (« B » pour *booléen*, voir la figure 1.5 et la définition 2.18 du chapitre 2) ou $\underline{2}^n$ (voir la note de bas de page). Il n'est totalement ordonné que pour $n = 1$.

Lorsque E est égal à l'ensemble X^2 de tous les couples d'un ensemble X, on obtient l'ensemble ordonné $(P(X^2), \subseteq)$, donc également noté $\underline{2}^{X^2}$, de toutes les relations binaires sur X. Pour $R, S \in P(X^2)$ avec $R \subseteq S$, on dit aussi que la relation R *implique* la relation S (ou que S est *compatible* avec R).

Lorsque E est égal à l'ensemble $P(X)$ de toutes les parties de X, on obtient l'ensemble ordonné $(P(P(X)), \subseteq)$, également noté $(P^2(X), \subseteq)$ ou $\underline{2}^{P(X)}$. Ses éléments, qui sont donc les sous-ensembles de $P(X)$, seront appelés les *familles de parties de* X (une famille est donc dans cet ouvrage un ensemble). Une correspondance fondamentale entre les deux ensembles ordonnés $\underline{2}^{X^2}$ et $\underline{2}^{P(X)}$ sera étudiée au chapitre 5.

Exemple 1.13 On note $\mathcal{O}_E$ (ou $\mathcal{O}_n$) l'ensemble de tous les ordres définis sur un ensemble E à n éléments. Pour deux ordres $\leq$ et $\leq'$ de $\mathcal{O}_E$, on dit que $\leq$ *implique* $\leq'$ si, pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ implique $x \leq' y$. Cette relation – qui n'est autre que la relation d'inclusion entre ordres – est un ordre. On notera aussi $\mathcal{O}_E$ l'ensemble ainsi ordonné de tous les ordres sur E (il sera considéré au chapitre 5).

[3] Cette notation est classique : il est bien connu que l'ensemble ordonné $(P(E), \subseteq)$ est isomorphe à l'ensemble ordonné des applications isotones de E dans $\underline{2}$, ensemble ordonné noté $\underline{2}^E$ (cf. la définition 3.4 et son commentaire).

1.2.2 Biologie

Exemple 1.14 Une *partition* $\mathbf{P} = \{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E, appelées *classes*, deux à deux disjointes et dont l'union est E. Sur l'ensemble $\mathcal{P}_E$ des partitions de E, la relation définie par $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$ si toute classe de $\mathbf{P}$ est incluse dans une classe de $\mathbf{P}'$ est un ordre (total pour $|E| < 3$) et l'on dit que « $\mathbf{P}$ est plus fine que $\mathbf{P}'$ ». Cet ordre est appelé *ordre de finesse* entre partitions. La recherche d'un partitionnement d'un ensemble en classes apparaît dans de multiples domaines, notamment dans des problèmes de discrimination. Par exemple, la reconnaissance de plusieurs souches microbiennes liées à une maladie infectieuse (aux voies de contamination de laquelle on s'intéresse) va conduire à l'étude du rattachement de l'agent infectieux trouvé sur chaque malade à l'une de ces souches, d'où un partitionnement de l'ensemble de ces observations. Une nouvelle distinction entre des souches jusque-là identifiées correspondra à une partition plus fine des données.

Exemple 1.15 Une famille $\mathcal{H}$ de parties d'un ensemble E est un *arbre de parties* si $E \in \mathcal{H}$ et si $A, B \in \mathcal{H}$ implique $A \cap B \in \{\emptyset, A, B\}$. Un arbre $\mathcal{H}$ de parties est une *hiérarchie* sur E si, de plus, $\{e\} \in \mathcal{H}$ pour tout $e \in E$. Si $\mathcal{H}$ est une famille de parties de E ordonnée par l'inclusion ensembliste, alors $\mathcal{H}$ est un arbre de parties si et seulement si $E \in \mathcal{H}$ et, pour tout $A \in \mathcal{H}$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ contenant A est une chaîne (on dit que $\mathcal{H}$ est un *ensemble ordonné arborescent*, voir la définition 2.12). $\mathcal{H}$ est une hiérarchie si et seulement si $E \in \mathcal{H}$ et si, pour tout $A \in \mathcal{H}$ ayant au moins deux éléments, l'ensemble des parties couvertes par A (dans l'ordre d'inclusion) constitue une partition de A. Les hiérarchies sont le modèle de base des arbres de classification considérés en phylogénie (et, plus généralement, en analyse de données). Par exemple, si E est un ensemble d'espèces actuelles, un élément A de $\mathcal{H}$ qui est une partie de E à au moins deux éléments correspond à un ensemble d'espèces de E admettant un ancêtre commun et représente alors cet ancêtre hypothétique. La hiérarchie $\mathcal{H}$ représente donc un ensemble d'espèces, actuelles ou hypothétiques, muni d'un ordre de filiation (dual de l'inclusion). L'ensemble des ancêtres d'une espèce donnée est totalement ordonné par filiation. Les hiérarchies ainsi que d'autres modèles classificatoires ordinaux seront étudiés au chapitre 7, section 7.3.

Exemple 1.16 On sait reconnaître la présence de gènes homologues sur les ADN correspondant à deux espèces suffisamment voisines. Toutefois ces gènes communs se présentent souvent dans un ordre différent. Une hypothèse couramment admise est que la transformation élémentaire faisant passer d'un ADN à un autre est le retournement d'un intervalle de cet ordre. Pour évaluer la « distance » entre les deux ADN, on cherche donc le nombre minimum de transformations élémentaires, donc de retournements d'intervalles, nécessaires pour passer d'un ordre total à un autre sur le même ensemble X de gènes (on parle de *reversal distance* ; notons que l'on retrouve les commutations de l'exemple 1.17 suivant si l'on se restreint aux intervalles à deux éléments). Evidemment, la situation biologique est bien plus complexe. Tout élément de X est affecté d'un signe $+$ ou $-$ selon le brin sur lequel il est situé (rappelons que l'ADN se présente comme une double hélice) et l'inversion d'un intervalle s'accompagne du changement de signe de ses éléments. En revanche, la complexité algorithmique de ce dernier problème « signé » le situe comme tout à fait traitable (linéaire), alors que le problème « non signé » est $\mathcal{NP}$-difficile (cf. l'annexe A).

1.2.3 Informatique

Exemple 1.17 On note Σ_n l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$. On dit qu'on opère une *inversion* (ou encore une *commutation montante*) sur la permutation $s = s_1 \ldots s_i \ldots s_n$ de Σ_n si l'on échange deux éléments consécutifs s_i et s_{i+1} de s vérifiant $s_i < s_{i+1}$ (avec $i < n$). On pose $s < s'$ si la permutation s' peut être obtenue à partir de s par une suite d'inversions. On obtient ainsi un ordre (total pour $n < 3$) sur Σ_n, appelé *ordre permutoèdre* ou *ordre (faible) de Bruhat*, défini à partir de la notion d'inversion. Cette notion sert naturellement pour mesurer le degré d'ordre ou de désordre d'une suite d'éléments constituant une information à trier. De nombreux algorithmes de tri sont ainsi intrinsèquement liés au nombre d'inversions présentes dans cette information, souvent représentable sous forme d'une permutation d'éléments (voir Knuth [250] (1973) pour l'étude de telles méthodes). La notation $(\Sigma_n, <)$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, Σ_n, désignera l'ensemble des permutations sur $\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ muni de l'ordre permutoèdre défini ci-dessus. On a déjà remarqué à la section 1.1.1 qu'il existe une bijection entre permutations et ordres totaux définis sur un même ensemble. Cette bijection induit sur l'ensemble de ces ordres totaux un ordre isomorphe à l'ordre permutoèdre. Des propriétés de cet ordre sont données dans le chapitre 5 (sections 5.5 et 5.6) et à la toute fin de la section 6.5.

Exemple 1.18 Dans les langages de programmation orientés objets avec héritage multiple, on dispose d'une hiérarchie de types qui est un ensemble ordonné. Notons T l'ensemble des types et $\leq$ l'ordre d'inclusion entre types. Pour implémenter efficacement cette hiérarchie de types, on utilise un « codage » de l'ensemble ordonné $(T, \leq)$ dans l'ensemble ordonné des parties d'un ensemble S. Un type est représenté par une partie de S et est inclus dans un autre si et seulement si la partie de S codant le premier type est contenue dans la partie de S codant le second ; autrement dit, les parties images des types constituent un sous-ensemble ordonné de $\underline{2}^S$ (ensemble des parties de S ordonné par l'inclusion) isomorphe à $(T, \leq)$. Un tel codage s'appelle un codage *booléen*, puisque $(T, \leq)$ est codé dans $\underline{2}^S$ (cf. l'exemple 1.12). On cherche d'autre part à obtenir un codage booléen « optimal » au sens où la cardinalité de l'ensemble S est minimum. Cette cardinalité minimum s'appelle la 2-*dimension* de $(T, \leq)$. Plus généralement, on définit la 2-*dimension d'un*